

Ramsey teooria

Olgu $G = (V, E)$ graaf. Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *klikiks*, kui suvalised kaks (erinevat) tippu $u, v \in S$ on G -s servaga ühendatud.

Teisisõnu, S on klikk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on täisgraaf.

Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks*, kui ühegi kahe S -i kuuluva tipu vahel serva ei ole.

Teisisõnu, S on sõltumatu hulk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on tühigraaf.

Lause. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, nii et $|V| \geq 6$. Siis leidub G -s kolmeelemendiline klikk või kolmeelemendiline sõltumatu hulk.

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi tipp. Olgu

- $X = N(v)$ (tipu v naabertippude hulk);
- $Y = \overline{N}(v) = V \setminus (X \cup \{v\})$ (tipu v mitte-naabrid).

Kuna $|X| + |Y| = |X \cup Y| = |V| - 1 \geq 5$, siis $|X| \geq 3$ või $|Y| \geq 3$. Oletame, et $|X| \geq 3$. On kaks võimalust:

- X on sõltumatu hulk.
- Leiduvad $u, w \in X$, nii et $(u, w) \in E$. Siis $\{u, v, w\}$ on klikk.

Juht $|Y| \geq 3$ on analoogiline (G asemel \overline{G}). □

Olgu $r(k, l)$ (kui ta leidub) vähim selline täisarv, et iga lihtgraafi $G = (V, E)$ jaoks, kus $|V| \geq r(k, l)$, kehtib

$$K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_l \hookrightarrow G .$$

Siin \hookrightarrow tähistab indutseeritud alamgraafiks olemist.

Tänases loengus me näitame, et $r(k, l)$ leidub kõigi $k, l \in \mathbb{N}$ jaoks, ning anname mõned alam- ja ülemtõkked.

Eelmine lause näitas, et $r(3, 3)$ leidub ja on ülimalt 6.

Kuna $K_3 \not\hookrightarrow C_5$ ja $O_3 \not\hookrightarrow C_5$, siis $r(3, 3) = 6$.

Lemma. Kui $r(k, l)$ leidub, siis leidub ka $r(l, k)$ ja $r(l, k) = r(k, l)$.

Tõestus. Ilmne. Vahetame ära servade olemise ja mitte-olemise. □

Lemma. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$. Suurused $r(k, 1)$ ja $r(k, 2)$ leiduvad ning $r(k, 1) = 1$ ja $r(k, 2) = k$.

Analoogiliselt $r(1, l) = 1$ ja $r(2, l) = l$.

Tõestus. O_1 on lihtsalt ühetipuline graaf. See sisaldub igas graafis. Seega $r(k, 1) = 1$.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu $|V| = k$. Kui $G = K_k$, siis $K_k \hookrightarrow G$. Kui $G \neq K_k$, siis olgu $u, v \in V$ sellised, et $(u, v) \notin E$. Siis $G[\{u, v\}] = O_2$.

Oleme näidanud, et $r(k, 2) \leq k$. Samas $K_k \not\hookrightarrow K_{k-1}$ ja $O_2 \not\hookrightarrow K_{k-1}$. Seega $r(k, 2) = k$. \square

Teoreem. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$, nii et $k \geq 2$ ja $l \geq 2$. Siis $r(k, l)$ leidub. Peale selle kehtib $r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1)$.

Tõestus. Induktsioon üle $k + l$.

Baas. $k + l = 4$. Siis $k = l = 2$. Eelmine lemma annab

$$r(2, 2) = 2 = 1 + 1 = r(1, 2) + r(2, 1) .$$

Samm. Induktsiooni eeldusest saame, et $r(k-1, l)$ ja $r(k, l-1)$ leiduvad.

Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, nii et $|V| = r(k-1, l) + r(k, l-1)$.

Olgu $v \in V$ ja vaatame hulki $N(v)$ ja $\overline{N}(v)$.

Kuna $|N(v)| + |\overline{N}(v)| = r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1$, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1, l)$.
2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k, l-1)$.

Esimesel juhul vaatame graafi $G[N(v)]$. On kaks võimalust:

- $K_{k-1} \hookrightarrow G[N(v)]$. Olgu $S \subseteq N(v)$ $(k-1)$ -tipuline klikk. Siis $S \cup \{v\}$ on k -tipuline klikk.
- $O_l \hookrightarrow G[N(v)]$. Siis ka $O_l \hookrightarrow G$.

Teisel juhul vaatame graafi $G[\overline{N}(v)]$. On kaks võimalust:

- $O_{kl-1} \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Olgu $S \subseteq \overline{N}(v)$ $(l-1)$ -tipuline sõltumatu hulk. Siis $S \cup \{v\}$ on l -tipuline sõltumatu hulk.
- $K_k \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Siis ka $K_k \hookrightarrow G$.

Oleme näidanud, et suvaline $(r(k-1, l) + r(k, l-1))$ -tipuline graaf sisaldab k -elemendilist klikki või l -elemendilist sõltumatut hulka. Seega on $r(k, l)$ ülimalt $r(k-1, l) + r(k, l-1)$. □

Järeldus. Kui $r(k-1, l)$ ja $r(k, l-1)$ on paarisarvud, siis $r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1$.

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, kus $|V| = r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1$. Olgu $v \in V$ selline, et $|N(v)|$ on paarisarv. Selline v leidub, sest $|V|$ on paaritu.

Kuna nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1, l)$.
2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k, l-1)$.

Tõestus jätkubidentselt eelmise teoreemi tõestusega. \square

Lause. $r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Tõestus. $r(1, 1) = r(1, 2) = r(2, 1) = 1 = \binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1}$.

k ja l -i ülejäänud väärtuste jaoks tõestame selle väite induktsiooniga üle $k+l$. Me oleme juba ära teinud baasi $k+l \leq 3$.

Samm. Olgu $k+l \geq 4$. Siis

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

□

Arvused $r(k, l)$ saab üldistada.

$r(k, l)$ on vähim selline arv n , et kui me värvime K_n servad kahe värviga (värvimisviis ei pruugi olla korrektne), siis leidub seal alamgraafina esimest värvi K_k või teist värvi K_l .

Olgu $r(a_1, \dots, a_k)$ vähim selline arv n , et kui me värvime K_n servad k värviga, siis leidub $i \in \{1, \dots, k\}$ nii, et leidub alamgraaf K_{a_i} , mille kõik servad on värvi a_i .

Kehtib võrratus

$$r(a_1, \dots, a_k) \leq r(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + r(a_1, a_2 - 1, a_3, \dots, a_k) + \dots + r(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1) - (k - 2)$$

ning $r(\dots, 1, \dots) = 1$.

Tõestus: samasugune kui juhul $k = 2$.

Teoreem. Kui $k \geq 2$, siis $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Tõestus. Olgu $n < 2^{k/2}$ ja olgu \mathbf{G}_n kõigi n -tipuliste lihtgraafide hulk. Meil tuleb näidata, et leidub $G \in \mathbf{G}_n$, nii et $K_k \not\hookrightarrow G$ ja $O_k \not\hookrightarrow G$.

Olgu meil antud mingi hulk \mathcal{X} ja selle hulga elementide mingi omadus P . S.t. P on funktsioon hulgast \mathcal{X} hulka $\{\text{tõene, väär}\}$. Olgu meil tarvis näidata, et leidub $x \in \mathcal{X}$, mille korral $P(x)$ kehtib.

Selleks piisab, kui näitame, et kui x on mingi *juhuslikult* valitud element hulgast \mathcal{X} , siis $\mathbf{P}[P(x)] > 0$.

Defineerimaks, mida kujutab endast hulgast \mathbf{G}_n juhusliku graafi valimine, tuleb meil fikseerida mingi tõenäosusjaotus hulgal \mathbf{G}_n .

Olgu \mathbf{G}_n hoopis kõigi *märgendatud* n -tipuliste lihtgraafide hulk (märgenditega hulgast $\{1, \dots, n\}$). Siis $|\mathbf{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.

Olgu $G \in \mathbf{G}_n$ tipuhulk $\{v_1, \dots, v_n\}$, kus v_i märgendiks on i .

Olgu G juhuslik märgendatud graaf hulgast \mathbf{G}_n , kusjuures kõigil $2^{\binom{n}{2}}$ graafil olgu sama suur tõenäosus valituks saada.

Leiame ülemise tõkke suurustele $\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G]$ ja $\mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G]$.

$$\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] =$$

$$\frac{\textit{k}-\textit{elemendilist klikki sisaldavate graafide arv } \mathbf{G}_n\text{-s}}{|\mathbf{G}_n|} \leq$$

$$\frac{1}{|\mathbf{G}_n|} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\{G \in \mathbf{G}_n \mid G[\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}] \cong K_k\}| =$$

$$\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq$$

$$\frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \frac{(2^{k/2})^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k^2}{2} - \frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!}$$

Kui k kasvab, siis $\frac{2^{k/2}}{k!}$ kahaneb. Kui $k \geq 3$, siis $\frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$.

Variant $k = 2$ tuleb pärast eraldi läbi vaadata.

Analoogiliselt, kui $k \geq 3$, siis $\mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$.

Meil oli $P(G) \equiv \text{„}K_k \not\leftrightarrow G \text{ ja } O_k \not\leftrightarrow G\text{“}$. Kui $k \geq 3$, siis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[K_k \not\leftrightarrow G \text{ ja } O_k \not\leftrightarrow G] &= 1 - \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \geq \\ &1 - \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] - \mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] > 1 - 1/2 - 1/2 = 0 . \end{aligned}$$

Seega, kui $k \geq 3$, siis $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Kui $k = 2$, siis $r(k, k) = 2 = 2^{k/2}$. □

$r(k, l)$ täpsed väärtused on teada ainult väheste paaride (k, l) jaoks. Ülevaate leiab aadressilt

<http://www1.combinatorics.org/Surveys/index.html>