Pourquoi les mathématiques sont-elles si compliquées ?

Jan Willemson

21 septembre 2002

1. Théorie de $\mathbb{N}$

Considérons un ensemble $\mathbb{N}$, contenant au moins un élément $o \in \mathbb{N}$ et dans lequel sont définies des fonctions $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\forall n \in \mathbb{N}[s(n) \neq o]$;
2. $\forall m, n \in \mathbb{N}[s(m) = s(n) \Rightarrow m = n]$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}[\sigma(o, n) = n]$;
4. $\forall m, n \in \mathbb{N}[\sigma(m, s(n)) = s(\sigma(m, n))]$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}(\pi(o, n) = o]$;
6. $\forall m, n \in \mathbb{N}[\pi(m, s(n)) = \sigma(m, \pi(m, n))]$;
7. si P est une propriété quelconque relative aux éléments de $\mathbb{N}$, alors

$$P(o) \& [\forall n (P(n) \Rightarrow P(s(n)))] \Rightarrow \forall n P(n).$$

On peut alors démontrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ et les fonctions s, σ et π jouissent d'un certain nombre de propriétés, par exemple :

- $\sigma(s(s(o)), s(s(o))) = s(s(s(s(o))))$;
- $\pi(s(s(o)), s(s(o))) = s(s(s(s(o))))$;
- $\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\sigma(l, \sigma(m, n)) = \sigma(\sigma(l, m), n)]$;
- $\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(l, \pi(m, n)) = \pi(\pi(l, m), n)]$;
- $\forall m, n \in \mathbb{N}[\sigma(m, n) = \sigma(n, m)]$;
- $\forall m, n \in \mathbb{N}[\pi(m, n) = \pi(n, m)]$;
- $\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(l, \sigma(m, n)) = \sigma(\pi(l, m), \pi(l, n))]$;
- $\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(\sigma(l, m), n) = \sigma(\pi(l, n), \pi(m, n))]$.

2. Comment comprendre cela, et pourquoi ?

Pour la personne qui n'a pas suivi un cours de mathématiques supérieures à l'Université, le contenu du paragraphe précédent ressemble sans doute à du chinois. L'auteur de cet article prie ses lecteurs de l'excuser pour le trouble occasionné – cette incompréhensibilité était volontaire, et tout l'article est destiné à ceux qui, bien qu'intéressés, sont dépourvus de préparation mathématique.

On peut trouver le contenu du paragraphe 1 (sous une forme plus ou moins proche de celle donnée ici) dans pratiquement n'importe quel manuel de logique de première année ; l'étudiant moyen de première année ne diffère pourtant en rien, dans sa préparation, du lecteur moyen de cet article. Mon bienveillant lecteur peut donc se mettre dans la peau du mathématicien débutant et ressentir ce qu'éprouve ce dernier lorsqu'il ouvre son manuel de logique pour la première fois, le soir précédant l'examen. Tout d'abord, deux choses le perturbent :

- qu'est-ce que tout cela veut dire ;
- pourquoi tout cela est-il si compliqué à dire ?

Si notre débutant aurait obtenu la réponse à la première question en allant consciencieusement au cours, il faut en revanche reconnaître que l'enseignement de mathématiques à l'Université ne fournit pas de réponse à la seconde. C'est un fait que celui qui, à ses débuts, prend la peine de se plonger dans la philosophie et l'histoire de la science arrive tôt ou tard à la vérité, mais de tels étudiants sont plutôt rares. La conséquence la plus dommageable en est que la majorité des gens chargés d'enseigner les humanités n'ont pas eux mêmes une idée claire de la raison pour laquelle les mathématiques ont l'allure qu'elles ont, et sont par la suite incapables de l'expliquer à leurs élèves. Le résultat est qu'une proportion tristement importante des élèves sortent du lycée avec l'idée que les mathématiques sont une discipline compliquée à plaisir, et dont l'étude ne paiera jamais la peine qu'elle demande.

Mais avant d'aborder le cœur de cet article et de tâcher de justifier un tant soit peu le caractère inévitable de cette indéniable complication, récompensons la patience du lecteur en lui expliquant le contenu du paragraphe 1.

3. Comprenons la théorie de $\mathbb{N}$

En fait, le paragraphe 1 décrit les entiers naturels usuels (c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) et leurs diverses propriétés. L'élément o n'est rien d'autre que 0, la fonction s désigne le fait de prendre le suivant d'un nombre donné (ainsi $s(0) = 1$, $s(2002) = 2003$, etc). L'écriture $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indique que s a *un argument*, c'est-à-dire qu'elle prend un nombre naturel et en donne un autre (dans le cas présent, supérieur de 1 au précédent). Les écritures $\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ signifient que les fonctions σ et π ont *deux arguments*, c'est-à-dire que chacune d'entre elles prend deux nombres et en donne un comme résultat. Les fonctions σ et π ne sont rien d'autre que la somme et le produit, respectivement.

Bien qu'on écrive habituellement l'addition sous la forme $2 + 3$, il n'est en rien nécessaire d'écrire invariablement le signe '+' entre les deux nombres, et les mathématiciens aiment souvent aussi écrire sous la forme $+(2, 3)$. Pourquoi ? La raison se cache dans la nécessité d'avoir un symbolisme universel.

Plus concrètement, les fonctions d'un ou de deux arguments sont loin d'être les seules dont on a besoin dans la pratique, et il faut aussi pouvoir écrire ce qui se passe quand on a besoin de trois données ou plus pour calculer un résultat. Si l'on peut, dans le cas de deux arguments, écrire l'opération *entre* ceux-ci, que devrait-on écrire dans le cas de trois, quatre ou deux cents données ? La seule solution raisonnable est de mettre le symbole de la fonction au début, et d'énumérer tous les arguments à la suite de ce symbole. Au final, le résultat d'une fonction $\diamond$ évaluée sur deux cents arguments aura l'allure suivante :

$$\diamond(\mathrm{arg}_1, \mathrm{arg}_2, \ldots, \mathrm{arg}_{200}).$$

Mais si l'on fait quelque chose, il faut le faire avec assurance, et utiliser la même idéologie dans l'écriture de nos fonctions à deux arguments. Dans cette lumière, c'est l'écriture $2 + 3$ qui paraît bizarre, tandis que $+(2, 3)$ semble beaucoup plus cohérente.

Le cher lecteur attend peut-être déjà depuis quelques instants que l'auteur multiplie les nombres m et n en écrivant $\times(m, n)$ au lieu de $m \times n$, mais pourquoi donc était-il nécessaire de remplacer le vieux symbole familier $\times$, dans le premier paragraphe, par la lettre π ? Cette métamorphose-là est causée par le désir de l'auteur de mettre en lumière une autre vérité fondamentale de la philosophie linguistique des mathématiques, l'*indépendance par rapport aux symboles*.

En un certain sens, on peut définir les mathématiques comme la science de ce qui reste une fois qu'on a ôté toute signification. Et effectivement, si l'on convient d'écrire les formules de droite à gauche, alors le théorème de Pythagore, par exemple, affirme que si a et b sont les longueurs des deux petits côtés d'un triangle rectangle et c celle de son hypothénuse, alors on a l'égalité :

$$^2c = {}^2b + {}^2a.$$

Dans certains pays de langue arabe (où l'on écrit systématiquement de droite à gauche), le théorème de Pythagore s'exprime exactement par cette formule, et les mathématiciens de tradition gréco-latine n'ont absolument rien contre cela, puisque la *signification* du théorème ne change pas quand on l'écrit à l'envers.

De la même manière exactement, nous pouvons désigner l'addition par la lettre σ en lieu et place du signe plus et la multiplication par la lettre π, ou encore écrire o à la place de zéro. Dans le tableau 1 nous traduisons toutes les formules du paragraphe 1 (à l'exception de la formule 7) dans la symbolique familière aux écoliers. Le seul symbole étrange qui reste à expliquer est $\forall$, qui se lit “quel que soit...”, de sorte que $\forall l, m, n \in \mathbb{N}$ veut dire “quels que soient les entiers naturels l, m et n”. Il faudrait, par souci de correction formelle, placer cette phrase avant chaque formule, mais on l'omet souvent en classe, et nous-mêmes aussi, par souci d'économie de place.

au paragraphe 1	à l'école
$\forall n \in \mathbb{N}[s(n) \neq o]$	0 n'est le successeur d'aucun nombre
$\forall m, n \in \mathbb{N}[s(m) = s(n) \Rightarrow m = n]$	si $1 + m = 1 + n$, alors $m = n$
$\forall n \in \mathbb{N}[\sigma(o, n) = n]$	$0 + n = n$
$\forall m, n \in \mathbb{N}[\sigma(m, s(n)) = s(\sigma(m, n))]$	$m + (1 + n) = 1 + (m + n)$
$\forall n \in \mathbb{N}[\pi(o, n) = o]$	$0 \times n = 0$
$\forall m, n \in \mathbb{N}[\pi(m, s(n)) = \sigma(m, \pi(m, n))]$	$m \times (1 + n) = m + m \times n$
$\sigma(s(s(o)), s(s(o))) = s(s(s(s(o))))$	$2 + 2 = 4$
$\pi(s(s(o)), s(s(o))) = s(s(s(s(o))))$	$2 \times 2 = 4$
$\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\sigma(l, \sigma(m, n)) = \sigma(\sigma(l, m), n)]$	$l + (m + n) = (l + m) + n$
$\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(l, \pi(m, n)) = \pi(\pi(l, m), n)]$	$l \times (m \times n) = (l \times m) \times n$
$\forall m, n \in \mathbb{N}[\sigma(m, n) = \sigma(n, m)]$	$m + n = n + m$
$\forall m, n \in \mathbb{N}[\pi(m, n) = \pi(n, m)]$	$m \times n = n \times m$
$\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(l, \sigma(m, n)) = \sigma(\pi(l, m), \pi(l, n))]$	$l \times (m + n) = l \times m + l \times n$
$\forall l, m, n \in \mathbb{N}[\pi(\sigma(l, m), n) = \sigma(\pi(l, m), \pi(m, n))]$	$(l + m) \times n = l \times n + m \times n$

Tableau 1 : Traduction de la langue formelle en langue humaine

Faisons encore remarquer que la fonction s qui sert à désigner le successeur d'un nombre n'est pas vraiment nécessaire : une addition fait le même travail, aussi écrirons-nous $1 + n$ à la place de $s(n)$ dans le tableau 1. De plus, à la place de $s(s(o))$, ou $1 + 1 + 0$, nous utiliserons le symbole[1] 2, et 4 à la place de $s(s(s(s(o))))$ ou $1 + 1 + 1 + 1 + 0$.

L'hypothèse 7 du paragraphe 1 est d'une nature différente des autres, et nous ne pourrons pas l'expliquer ici. Remarquons simplement qu'elle exprime le principe d'induction, central dans la théorie des entiers naturels, et qu'elle intervient dans la démonstration de pratiquement toutes les propriétés importantes.

[1] NB !!! Juste comme symbole, à la place duquel on pourrait aussi bien avoir $\wr$, $\dagger$ ou Υ.

4. À quoi tout cela sert-il ?

Tout cela est bien joli, nous disposons d'une certaine collection de propriétés simples des entiers naturels, et nous avons confiance dans le fait qu'on peut en déduire beaucoup d'autres aussi belles ("la somme ne dépend pas de l'ordre des termes", etc), qui doivent être valables pour l'ensemble des entiers naturels. Mais... est-ce qu'on ne pourrait pas faire tout cela autrement, ou plus simplement ?

Cette dernière question joue un rôle vraiment fondamental du point de vue de la compréhension des mathématiques, et mériterait que chaque enseignant (même à l'Université) lui accorde une attention bien plus grande qu'on ne le fait habituellement. Les maîtres et les professeurs ont été confrontés à ces problèmes élémentaires il y a bien longtemps, si ce n'est jamais, et ne savent pas se mettre à la place des élèves ou des étudiants, qui doivent accepter nombre de choses importantes comme des dogmes.

S'il est nécessaire en physique d'accepter beaucoup de dogmes (la constante gravitationnelle est positive, d'où il s'ensuit que les corps s'attirent, au lieu de se repousser), en revanche il est possible d'expliquer pratiquement tout ce qu'on rencontre dans les études de mathématiques.

Pourquoi les conditions 3 et 4 du paragraphe 1 sont-elles précisément $\forall n \in \mathbb{N}[\sigma(o,n) = n]$ et $\forall m,n \in \mathbb{N}[\sigma(p, s(n)) = s(\sigma(m,n))]$, ou $0 + n = n$ et $m + (1 + n) = 1 + (m + n)$, et pas autre chose ? Il se trouve que parmi les entiers naturels l'addition est l'*unique* opération vérifiant l'une et l'autre de ces propriétés ; alors que les opérations qui ne satisfont que l'une de ces conditions sont nombreuses. Le lecteur pourra par exemple essayer de trouver une telle fonction de deux arguments, $\otimes$, qui ne soit pas l'addition, mais qui vérifie pour tout entier n la relation $\otimes(0,n) = n$.[2]

Les deux conditions en questions sont-elles les seules qui permettent de définir l'addition ? Non, loin s'en faut. Par exemple, on aurait pu remplacer les conditions 3 et 4 du paragraphe 1 par l'ensemble suivant :

1. $\forall n \in \mathbb{N}[\sigma(o,n) = n]$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}[\sigma(s(o),n) = s(n)]$;
3. $\forall m,n \in \mathbb{N}[\sigma(m, s(s(n))) = s(s(\sigma(m,n)))]$,

qui est cependant nettement plus complexe que les deux conditions dont nous avons parlé. Dans les brumes de l'histoire des mathématiques, il se trouve certainement d'autres possibilités de définitions de l'addition à avoir été testées, mais on a dû pour finir en rester à celles que nous avons exposées dans cet article, parce qu'elles se sont avérées *les plus simples*.

Hélas, on ne porte pratiquement aucune attention à ce type de démarche de pensée dans l'enseignement des mathématiques, de sorte que notre système d'éducation produit en grand nombre des individus pour qui les mathématiques ne sont qu'absurdité incompréhensible et fastidieuse, dont il ne pourront utiliser un jour, dans le meilleur des cas, qu'une infime partie. L'idée la plus profonde des mathématiques – décrire une portion notable du monde de façon correcte et laconique –, n'atteint pas sa cible.

5. Conclusion

Pour répondre à la question posée de façon rhétorique dans le titre de cet article, on peut dire que les mathématiques sont en réalité d'une simplicité absolue. Au cours de deux millénaires et demi d'histoire, les mathématiciens de tous les pays en ont ôté les complications inutiles, et ce qui est arrivé jusqu'à nous se présente effectivement comme le concentré du travail de toutes ces personnes. Pour comprendre comment telle ou telle chose se fait précisément de telle ou telle manière, il faudrait parcourir à nouveau toute cette histoire, mais malheureusement personne n'a deux mille cinq cents ans à consacrer à l'étude.

Les étudiants d'aujourd'hui n'ont donc pas d'autre solution que de s'accommoder de la plus grande partie des mathématiques, mais cela ne signifie pas qu'ils doivent tout accepter comme dogme. Au moins

---

[2] S'il ne trouve pas tout de suite quelque chose, le lecteur peut jeter un œil à la phrase suivante de cette note, mais auparavant qu'il essaye encore !

On peut prendre, par exemple, $\otimes(m,n) = |m - n|$.

dans certains domaines il conviendrait de retracer l'histoire de la discipline au fil des études, non pas pour ce domaine en particulier, mais pour sentir que l'on peut faire confiance aux mathématiciens qui nous ont précédés dans les temps anciens. L'assimilation du domaine suivant ne soulèverait plus alors de manière si insistante la question "À quoi tout cela va-t-il bien servir ?"

Notre enseignement des mathématiques s'approchera-t-il un jour de cet idéal ? L'avenir le dira.