Olgu antud mingi *tähestik* Σ — lihtsalt mingi lõplik hulk. Tema elemente nimetame *tähtedeks*.

Sõne on tähestiku elementide mingi (lõplik) järjend. Kõigi sõnede hulka üle tähestiku Σ tähistame Σ^*-ga.

Sõne t *pikkus* on tähtede arv temas. Tähistame $|t|$.

Sõne t tähti tähistame $t[1], t[2], \ldots, t[|t|]$. S.t. $t = t[1]t[2]\cdots t[|t|]$.

Alamsõne: $t[i \ldots j] := t[i]t[i+1]\cdots t[j]$.

Tühja sõnet — ainukest sõnet pikkusega 0 — tähistame ϵ-ga.

Kui $i > j$, siis $t[i \ldots j] := \epsilon$.

Olgu $s, t \in \Sigma^*$. s *esineb* t-s *positsioonis* i, kui $t[i \ldots i + |s| - 1] = s$.

s on t *prefiks*, kui s esineb t-s positsioonis 1. Tähistame $s \sqsubset t$.

s on t *sufiks*, kui s esineb t-s positsioonis $|t| - |s| + 1$. Tähistame $s \sqsupset t$.

Ülesanne: antud s ja t. Leia kõik sellised positsioonid i, et s esineb t-s positsioonis i.

Naiivne algoritm:

```
1  J := ∅; m := |s|; n := |t|
2  for i := 1 to n − m + 1 do
3      if võrdle_sõnesid(s, m, t, i) = 0 then J ⇐ i
4  return J
```

võrdle_sõnesid(s, m, t, i) kontrollib, kas sõne s pikkusega m on võrdne alamsõnega $t[i \ldots i+m-1]$. Tagastab vähima sellise j, kus $s[j] \neq t[i+j-1]$. Kui sellist ei leidu, siis tagastab 0. Ta on:

```
1  for j := 1 to m do
2      if s[j] ≠ t[i − 1 + j] then
3          return j
4  return 0
```

Keerukus: $\Theta(m(n-m))$, kus $m = |s|$ ja $n = |t|$.

$i = 1$ $J = \emptyset$

t

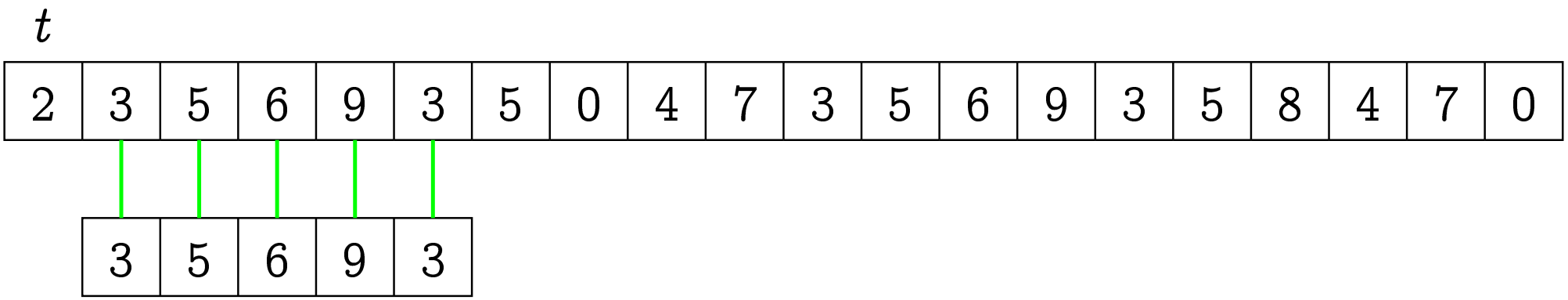
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

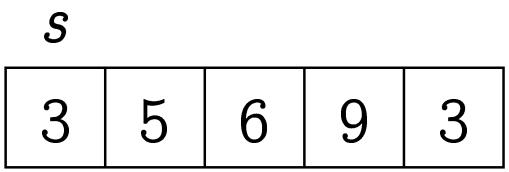
3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 2$ $J = \{2\}$





$i = 3$ $J = \{2\}$

t

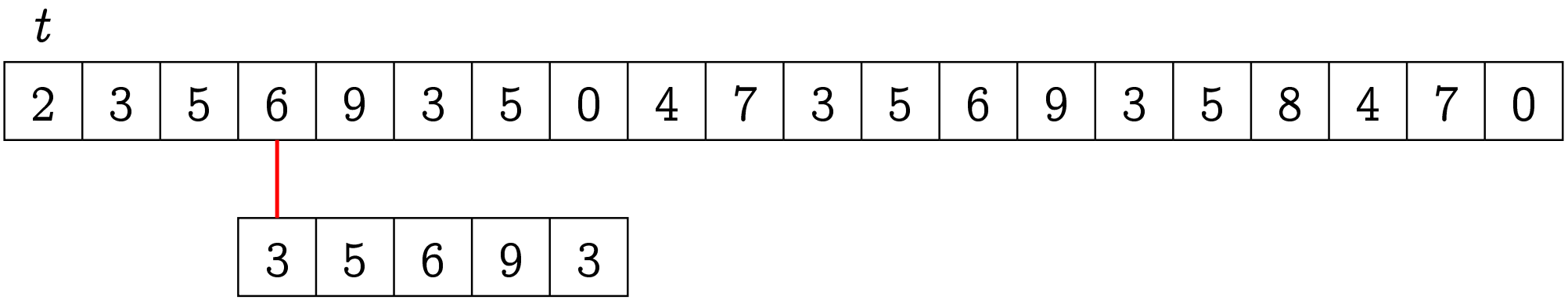
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

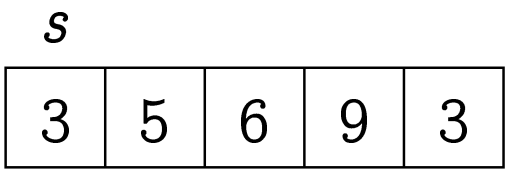
3	5	6	9	3

s

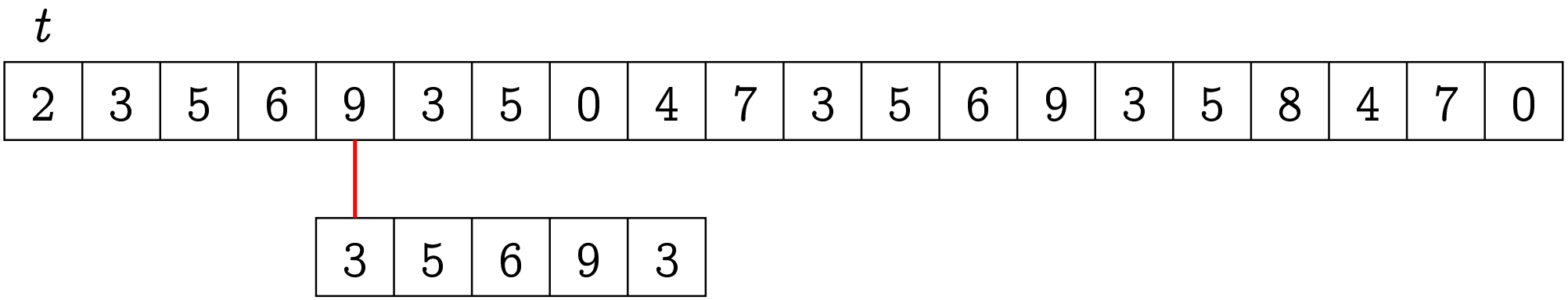
3	5	6	9	3

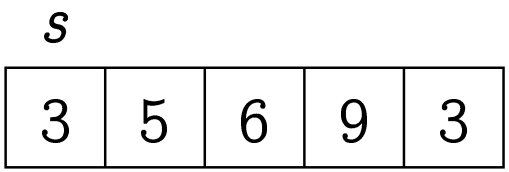
$i = 4$ $J = \{2\}$



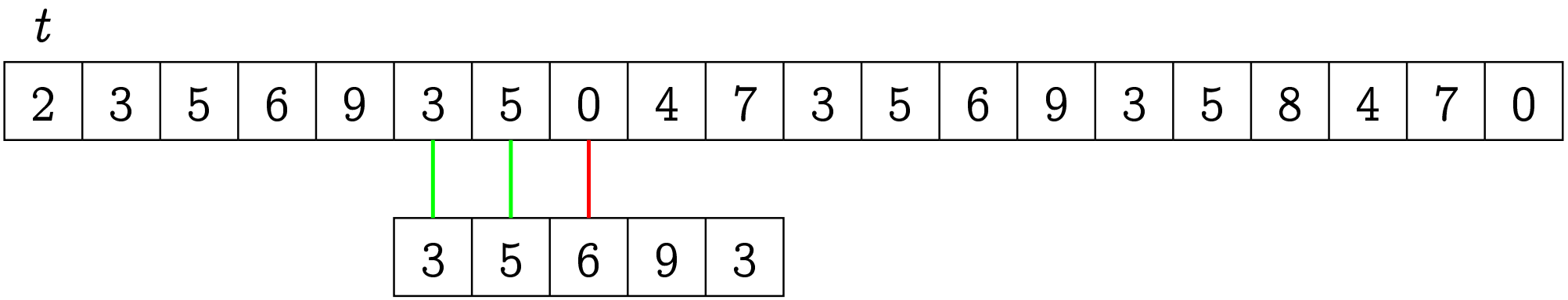


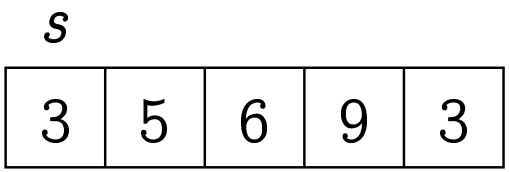
$i = 5$ $J = \{2\}$





$i = 6$ $J = \{2\}$





$i = 7$ $J = \{2\}$

t

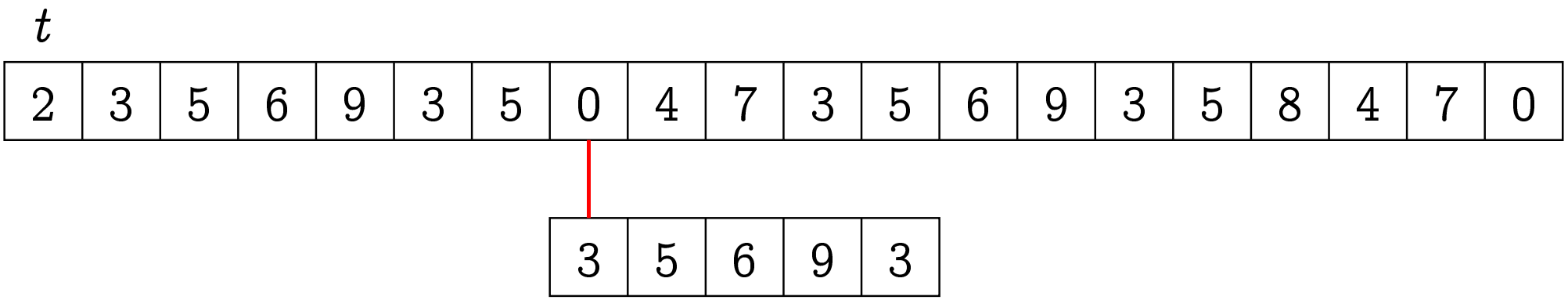
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

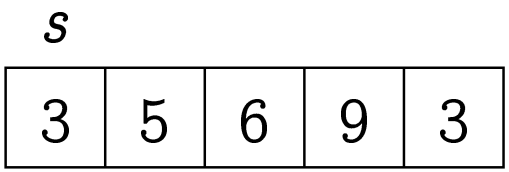
3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 8$ $J = \{2\}$





$i = 9$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 10$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 11$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 12$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 13$ $J = \{2, 11\}$

t

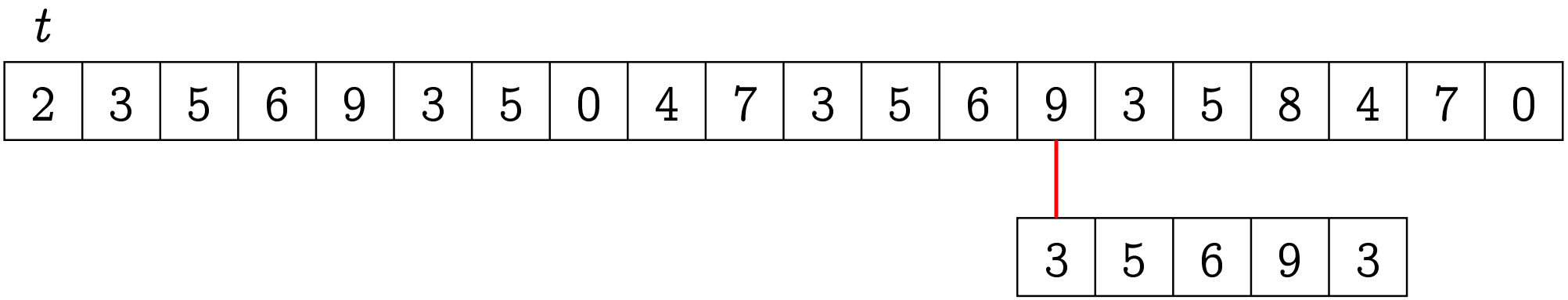
2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

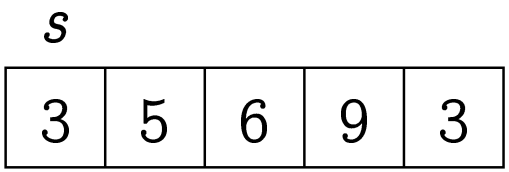
3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$i = 14$ $J = \{2, 11\}$

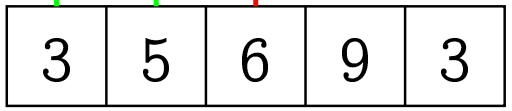




$i = 15$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0



s

3	5	6	9	3

$i = 16$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

Töö kiirendamiseks üritame kontrolle
„$s = t[i \ldots i+m-1]$?“ kiiremini teha.

Idee: defineerime mingi funktsiooni $h : \Sigma^m \longrightarrow X$ nii, et

- hulga X elementide võrdlemine on konstantse keerukusega;
- $h(t[i+1 \ldots i+m])$ on arvutatav $h(t[i \ldots i+m-1])$-st konstantses ajas.

Seejärel kontrollime iga i jaoks, kas
$h(s) = h(t[i \ldots i+m-1])$. Kui jah (mingi i jaoks), siis kontrollime, kas $s = t[i \ldots i+m-1]$.

Asümptootiliselt me ei võida, kuid veendumine, et s t-s mingis positsioonis ei esine, käib üldiselt märksa kiiremini.

Kui $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, siis sõne pikkusega m on mingi (ülimalt) m-kohaline arv.

Üldjuhul (suvalise Σ korral) olgu $d = |\Sigma|$ ning olgu $\nu : \Sigma \longrightarrow \{0, \ldots, d-1\}$ mingi fikseeritud bijektsioon. Siis igale m-tähelisele sõnele vastab m-kohaline arv d-ndsüsteemis.

$$\nu(s) := \sum_{i=1}^{m} \nu(s[i]) d^{m-i}$$

Olgu $q \in \mathbb{N}$. Võtame $h(s) := \nu(s) \mod q$.

(q võtame võimalikult suure, kuid piisavalt väikse selleks, et $h(s)$ täisarvutüüpi ära mahuks.)

$h(t[i+1 \ldots i+m])$ on arvutatav $h(t[i \ldots i+m-1])$-st konstantses ajas:

$$h(t[i+1 \ldots i+m]) = \big(h(t[i \ldots i+m-1]) - \nu(t[i]) \cdot d^{m-1}\big) \cdot d + \nu(t[i+m]) \pmod q \ .$$

Seejuures $d^{m-1} \mod q$ võib ette valmis arvutada.

Kõik arvutused on seejuures $\mod q$.

Vaatame eelmist näidet. Võtame $q = 17$.

Meil oli $s =$ „35693“. Siis $s \mod 17 = 10$.

Üldjuhul tuleb meil leida $\sum_{i=1}^{m} \nu(s[i]) d^{m-i} \mod q$. Seda on mugav teha Horneri skeemiga:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$
$$((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \ .$$

(kõik arvutused ikka mod q)

Funktsioon modpoly(s, d, q, a, m) leiab sõnele $s[a \ldots a+m]$ vastava h väärtuse. Ta on:

```
1  h := 0
2  for i := a to a + m do
3      h := (((h · d) mod q) + ν(s[i])) mod q
4  return h
```

$i = 1$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

7

s

3	5	6	9	3

$\text{mod } 17 = 10$

$i = 2$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

7	?

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 2$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

7	?

$= (7 - 2 \cdot 4) \cdot 10 + 3 \mod 17$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

s

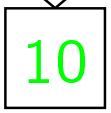
3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$i = 2$ $J = \emptyset$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

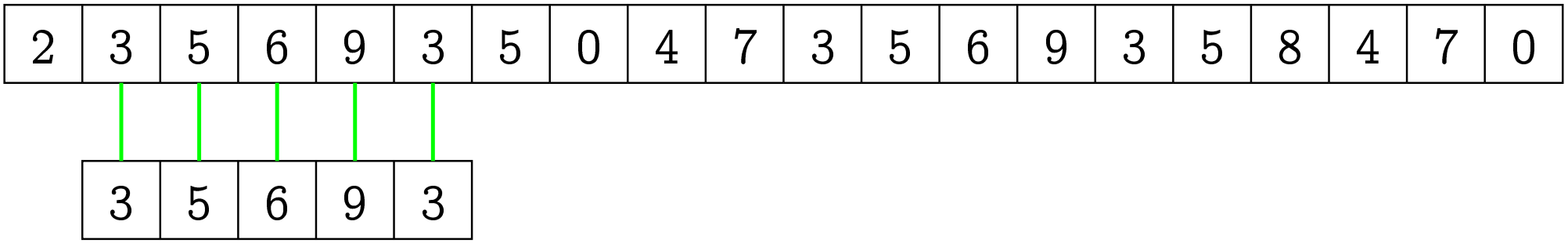
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 2$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\bmod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 3$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

10	?

$= (10 - 3 \cdot 4) \cdot 10 + 5 \mod 17$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

s

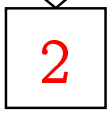
3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$i = 3$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 4$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

7

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

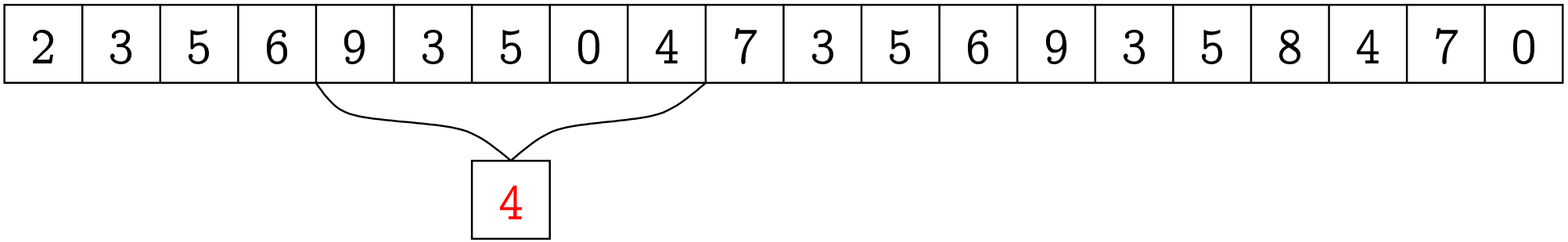
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 5$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

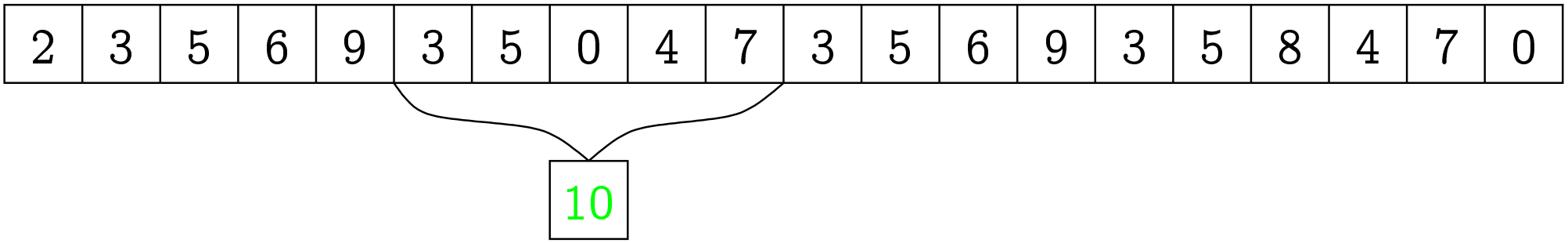
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 6$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

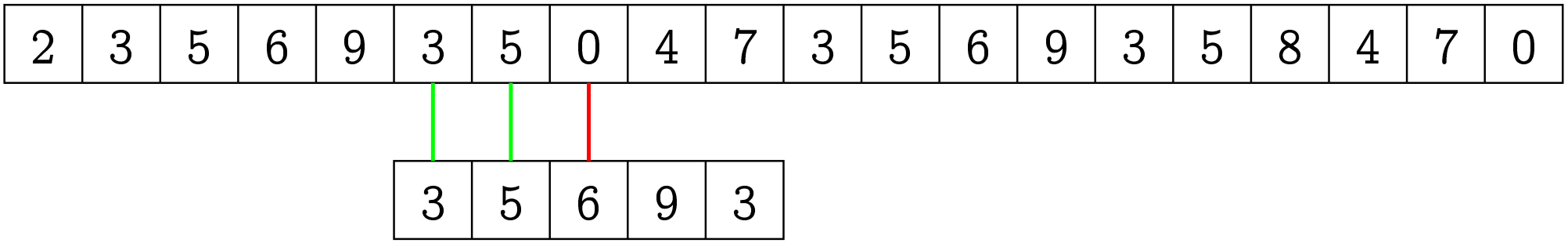
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 6$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

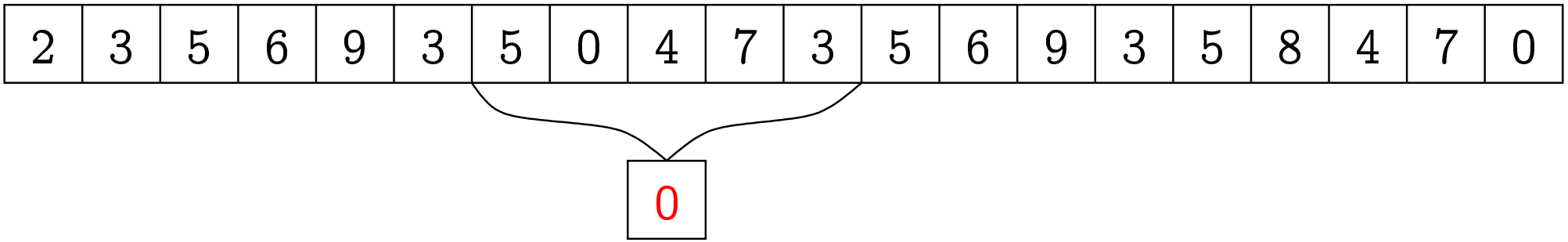
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 7$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

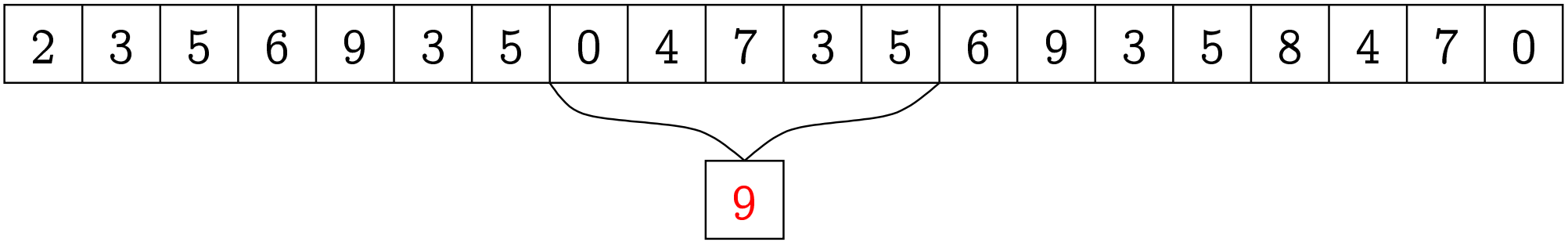
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 8$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

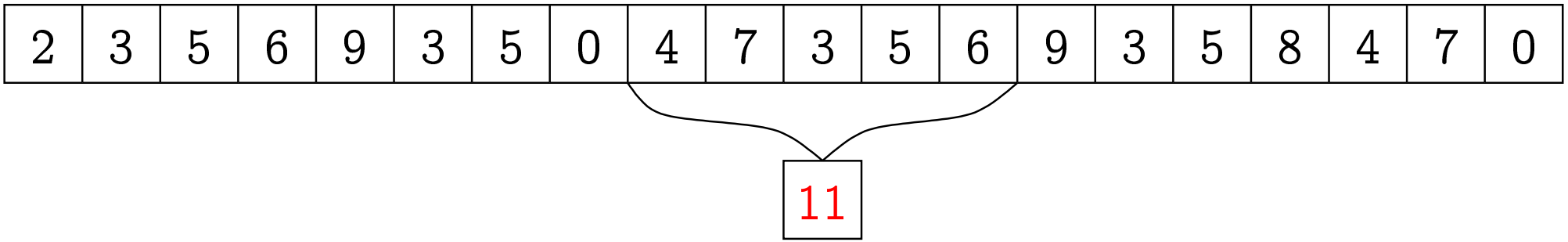
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 9$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

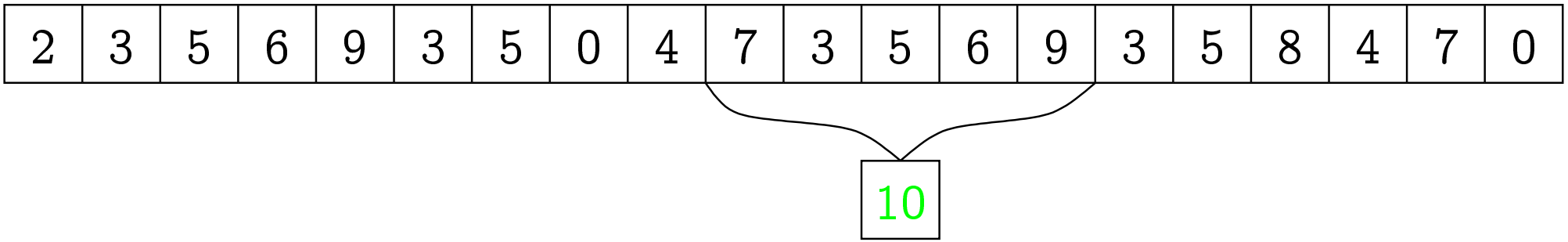
$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 10$ $J = \{2\}$

t



s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 10$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

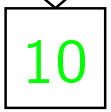
$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 11$ $J = \{2\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0



$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 11$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

3	5	6	9	3

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 12$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

2

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 13$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

15

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 14$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

16

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 15$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

11

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$10000 \mod 17 = 4$

$i = 16$ $J = \{2, 11\}$

t

2	3	5	6	9	3	5	0	4	7	3	5	6	9	3	5	8	4	7	0

7

s

3	5	6	9	3

$\mod 17 = 10$

$d = 10$

$m = 5$

$d^{m-1} = 10000$

$10000 \mod 17 = 4$

Eelnev on tuntud kui **Rabin-Karpi** algoritm:

```
 1  J := ∅; m := |s|; n := |t|; d := |Σ|
 2  D := 1
 3  for i := 1 to m − 1 do D := D · d  mod q
 4  hs := modpoly(s, d, q, 1, m); ht := modpoly(t, d, q, 1, m)
 5  for i := 1 to n − m + 1 do
 6      if hs = ht then
 7          if võrdle_sõnesid(s, m, t, i) = 0 then J ⇐ i
 8      if i < n − m + 1 then
 9          a1 := (ht − ν(t[i]) · D)  mod q
10          a2 := a1 · d  mod q
11          ht := (a2 + ν(t[i + m]))  mod q
12  return J
```

Töö kiirendamiseks kasutame ära järgmist tähelepanekut:

Kui s ja $t[i \ldots i+m-1]$ erinevad esimest korda j-ndas positsioonis, siis $s[1] = t[i]$, $s[2] = t[i+1]$,. . . ,$s[j-1] = t[i+j]$.

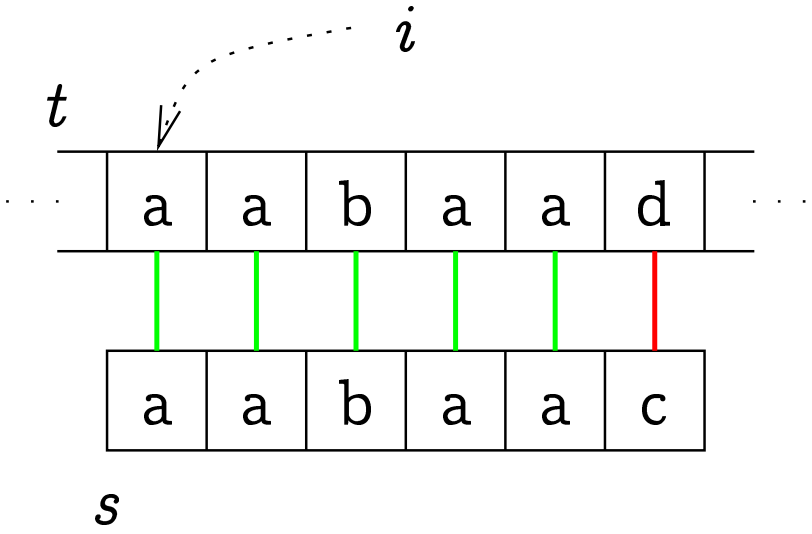
Sõltuvalt s-st võib järeldada, et mõningates järgmistes positsioonides ($i+1$, $i+2$, jne.) pole mõtet s-i t-s otsida — niikuinii ei ole.

Selleks, et s võiks t-s esineda positsioonis $i+1$, on tarvilik $s[1] = s[2]$, $s[2] = s[3]$,. . . $s[j-2] = s[j-1]$.

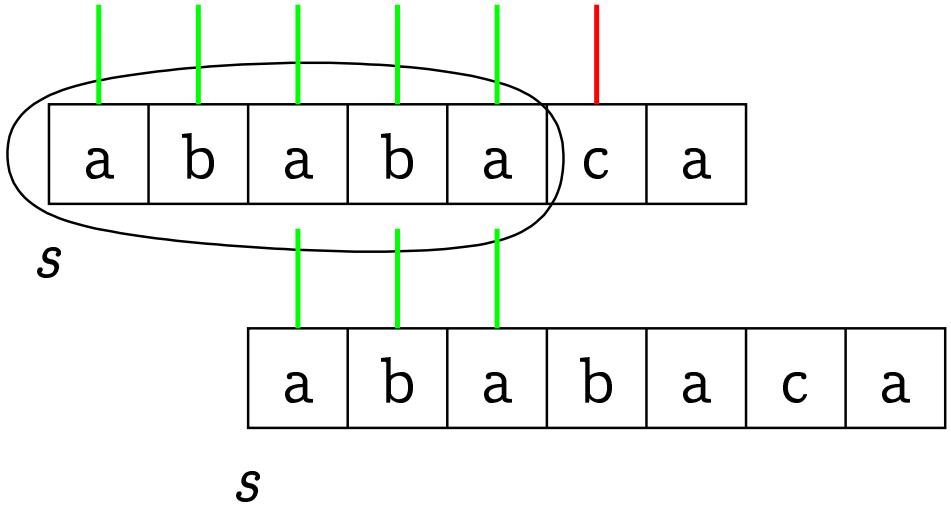
Selleks, et s võiks t-s esineda positsioonis $i+2$, on tarvilik $s[1] = s[3]$, $s[2] = s[4]$,. . . $s[j-3] = s[j-1]$.

Jne.

Näiteks:



Saades siin erinevuse 6. positsioonis, teame, et $i+1$ korral tuleb | |, $i+2$ korral tuleb |, $i+3$ korral tuleb | | ja edasi on mõtet võrrelda $s[3]$-e ja $t[(i+3)+2]$-e.



Kui erinevus tekkis $(j+1)$-ndas positsioonis, siis vaatame sõnet $s[1 \ldots j]$.

Nihutame sõnet s paremale senikaua, kuni tema algus langeb kokku sõne $s[1 \ldots j]$ lõpuga.

S.t. me otsime pikimat sellist sõne u, mis oleks $s[1 \ldots j]$ prefiksiks ja sufiksiks.

Olgu $\pi_1, \ldots, \pi_m$ massiiv („prefiksfunktsioon“), nii et iga i jaoks on

- $\pi_i \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$;
- $s[1 \ldots \pi_i] \sqsupset s[1 \ldots i]$;
- π_i on suurim arv, mis eelmisi tingimusi rahuldab.

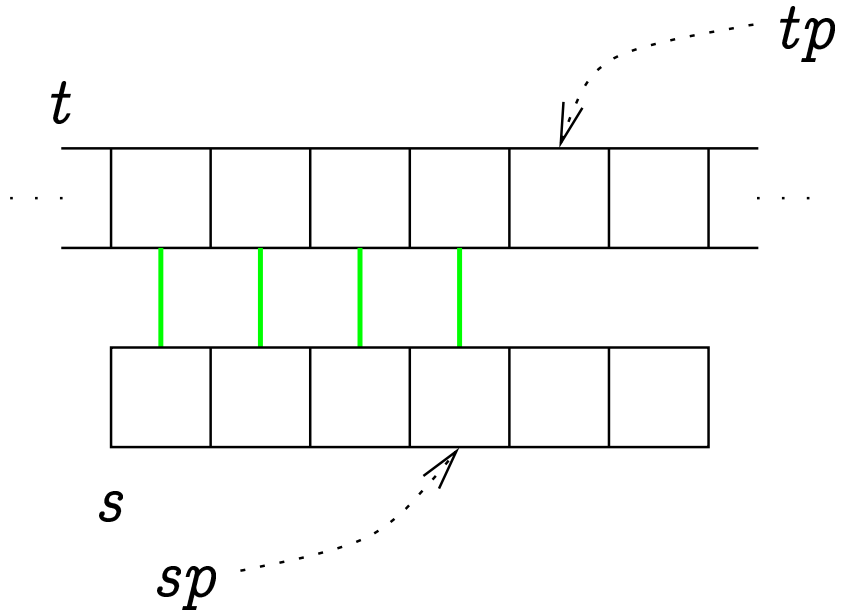
Näiteks kui $s =$ „aabcaabca“, siis π on:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π_i	0	1	0	0	1	2	3	4	5

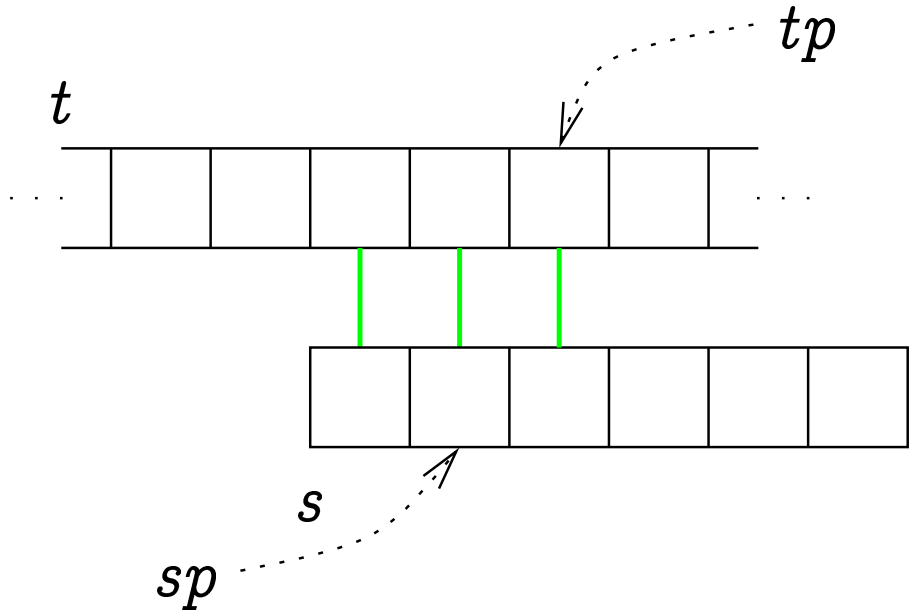
Alamsõne esinemisi saab siis otsida järgnevalt: (**Knuth-Morris-Pratti** (KMP) algoritm)

```
1   m := |s|; n := |t|; J := ∅
2   π := leia_pi(s)
3   sp := 0
4   for tp := 1 to n do
5       while sp > 0 and s[sp + 1] ≠ t[tp] do sp := π_sp
6       if s[sp + 1] = t[tp] then sp := sp + 1
7       if sp = m then
8           J ⇐ tp − m + 1
9           sp := π_sp
10  return J
```

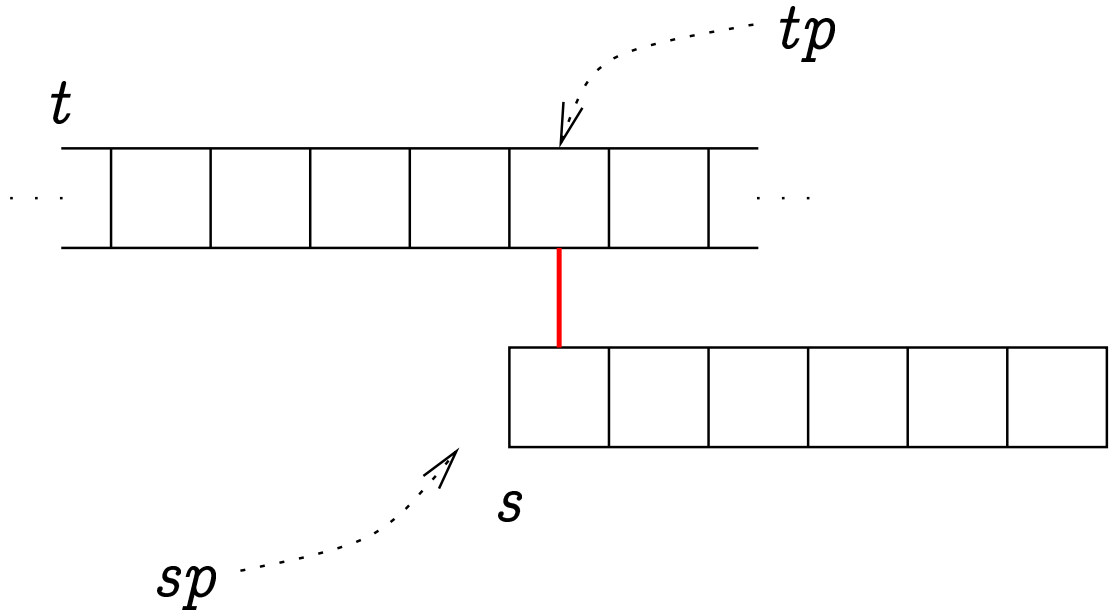
Peale 4. rida:



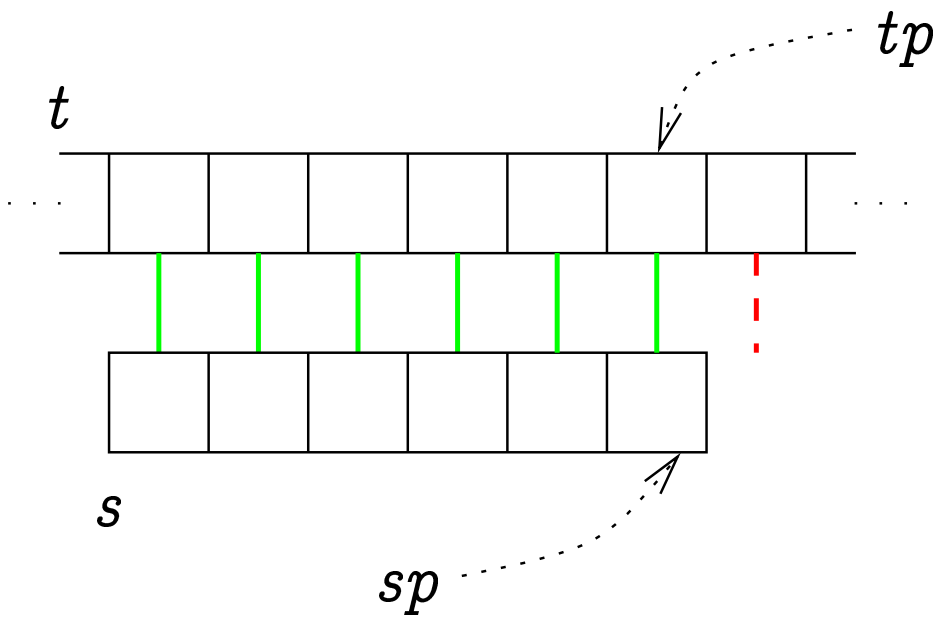
Peale 5. rida: kas



với



Read 7–9: kui $sp = m$, siis



Siis peaks $s[sp+1]$ võrdlemine t elemendiga negatiivse vastuse andma. Kuna $s[sp+1]$ tegelikult ei eksisteeri, siis tuleb seda juhtu eraldi töödelda (mitte teha järgmisel iteratsioonil reas 5).

Keerukus: ilma leia_pi väljakutseta on KMP-algoritmi tööaeg $O(n)$.

Näitame, et põhitsükli ühe iteratsiooni (read 4–9) *amortiseeritud* tööaeg on $O(1)$.

Potentsiaaliks võtame muutuja sp väärtuse. Küllalt suure ajaühiku korral siis:

Read 4 ja 7–9 võtavad $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Kuna sp väärtus neis ridades ei suurene, siis võtavad nad ka $\leqslant 1$ ühiku amortiseeritud aega.

```
4   for tp := 1 to n do
    ...
7       if sp = m then
8           J ⇐ tp − m + 1
9           sp := π_sp
```

Rida 6 võtab $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Kuna sp võib suureneda 1 võrra, siis võtab ta $\leqslant 2$ ühikut amortiseeritud aega.

6 $\quad$ **if** $s[sp+1] = t[tp]$ **then** $sp := sp + 1$

5. reas võtab iga iteratsioon $\leqslant 1$ ühiku tõelist aega. Et aga $\pi_i < i$, siis väheneb sp igal iteratsioonil (vähemalt ühe võrra). Seega võtab 5. rea iga iteratsioon $\leqslant 0$ ühikut amortiseeritud aega.

5 **while** $sp > 0$ **and** $s[sp+1] \neq t[tp]$ **do** $sp := \pi_{sp}$

Kokku võtab üks iteratsioon seega $\leqslant 1 + 2 + 0 = 3$ ühikut amortiseeritud aega.

Töö alguses $sp = 0$ ja alati $sp \geqslant 0$. Seega on tõeline koguaeg mitte suurem kui amortiseeritud koguaeg.

Korrektsuse näitamiseks tuleb näidata, et

1. s esineb t-s kõigil J-i lisatavatel positsioonidel;
2. ükski selline positsioon ei jää J-i lisamata.

Esimene neist järeldub otseselt invariandist peale 4. rida.

Teine järeldub sellest, et kui

$$s[1] = t[i], s[2] = t[i+1], \ldots, s[j] = t[i+j-1],$$

siis iga täiendava nihke k jaoks, mis on väiksem kui $j - \pi_j$, leidub $l \in \{1, \ldots, j-k\}$ nii, et $s[l] \neq s[l+k]$, s.t. $s[l] \neq t[i+k+l-1]$, s.t. s ei esine t-s positsioonil $i+k$.

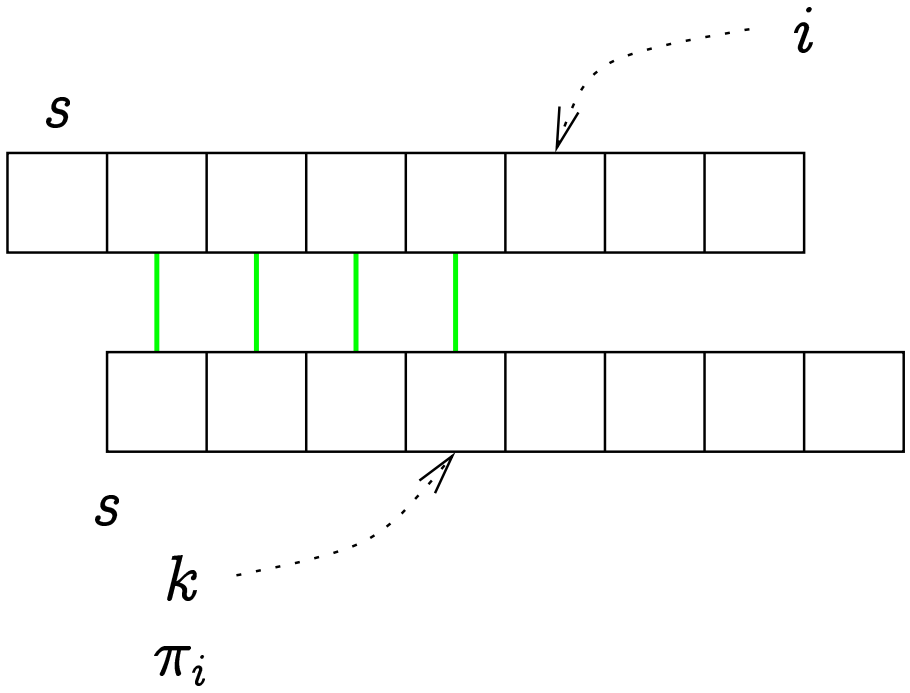
leia_pi(s) on sarnane otsimisalgoritmi endaga:

```
1   m := |s|; π_1 := 0
2   k := 0
3   for i := 2 to m do
4       while k > 0 and s[k + 1] ≠ s[i] do k := π_k
5       if s[k + 1] = s[i] then k := k + 1
6       π_i := k
7   return π
```

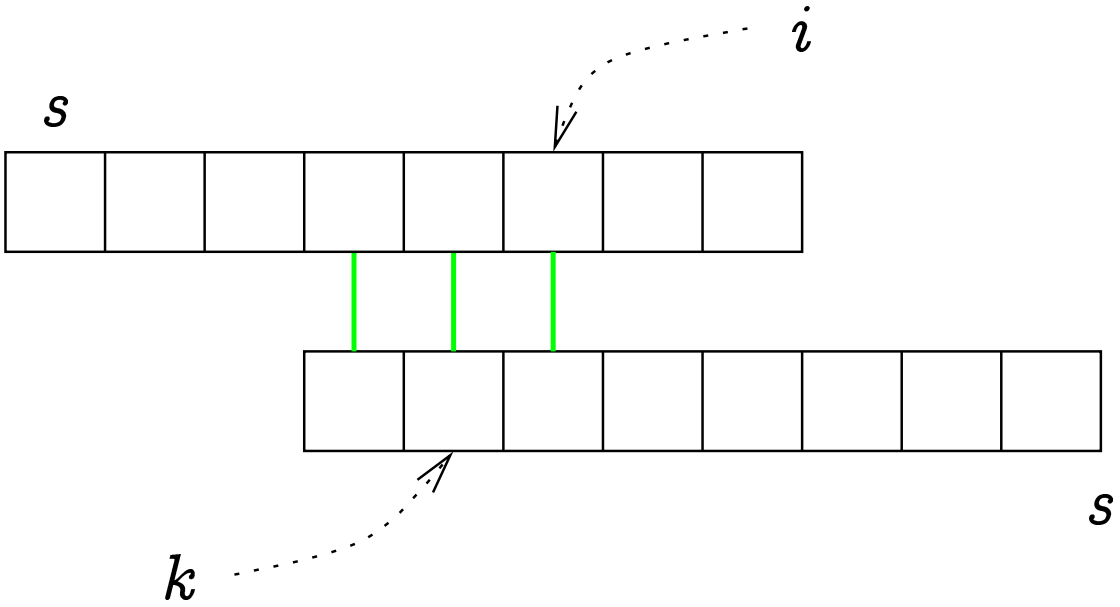
Taas saame näidata, et tsükli üks iteratsioon võtab $O(1)$ ühikut amortiseeritud aega. Potentsiaaliks on k väärtus.

Kogu KMP-algoritmi keerukus on seega $O(n + m)$.

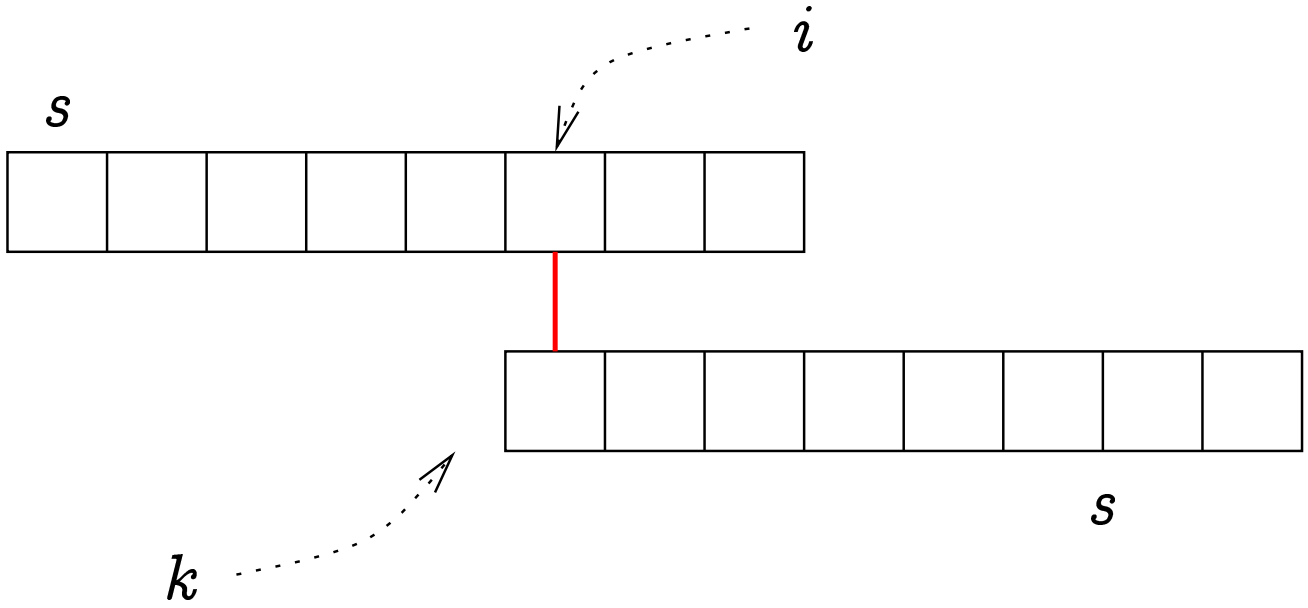
Peale 3. rida:



Peale 4. rida: kas



või



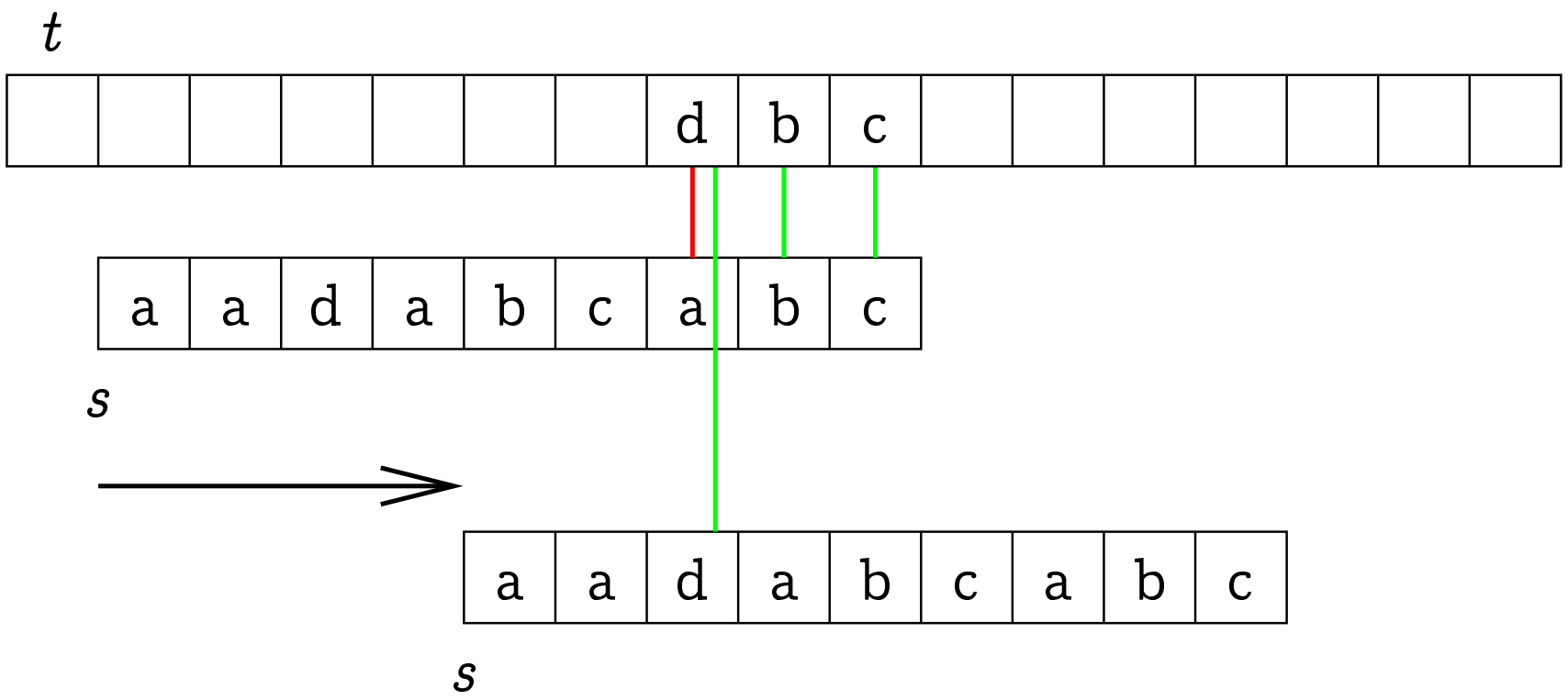
Boyer-Moore'i (BM) alamsõne otsimise algoritm töötab halvimal juhul ajas $O(m(n-m))$, aga pika s-i ja suure Σ korral võib praktikas kõige kiiremaks algoritmiks osutuda.

```
1  m := |s|; n := |t|; J := ∅
2  initsialiseeri_BM
3  i := 1
4  while i ⩽ n − m + 1 do
5      j := m
6      while j > 0 and s[j] = t[i + j − 1] do j := j − 1
7      if j = 0 then J ⇐ i
8      i := i + leia_nihe(j, t[i + j − 1])
9  return J
```

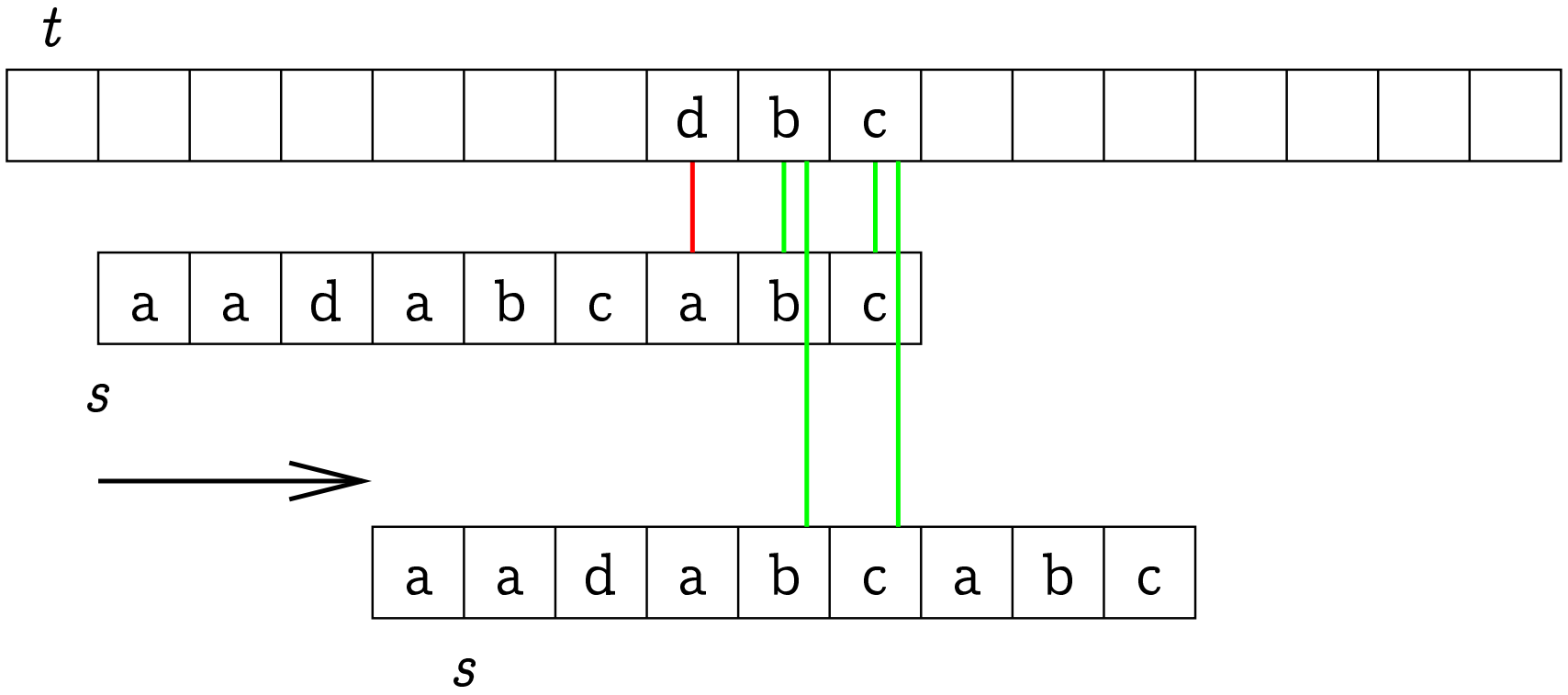
S.t. BM-algoritm käib sõne t lihtsalt vasakult paremale läbi ja uurib, kas seal esineb alamsõnena sõne s. Uurimine käib paremalt vasakule.

Teatavas positsioonis mitteesinemise korral minnakse sõnes t edasi (rida 8). Edasi minnakse vähemalt 1 positsiooni võrra, aga lisaks sellele kasutatakse kahte heuristikat:

ebasobiva tähe heuristika:



sobiva sufiksi heuristika:



Neist kahest heuristikast võetakse parem.

Ebasobiva tähe heuristika kasutamiseks tuleb meil iga $a \in \Sigma$ jaoks leida tema viimane esinemiskoht s-s.

Olgu λ massiiv, mis on indekseeritud Σ elementidega. Siis leia_viimased_kohad(s, Σ) on

```
1  for all a ∈ Σ do λ_a := 0
2  for i := 1 to |s| do
3      λ_{s[i]} := i
4  return λ
```

Sobiva sufiksi heuristika kasutamiseks: Olgu j see koht, kus tekkis erinevus s ja t vahel.

S.t. meie sobivaks sufiksiks on $s[j+1 \ldots m]$.

Meil tuleb leida suurim selline γ_j, et

- $\gamma_j < m$;
- kehtib üks järgmistest väidetest:
  - $s[j+1 \ldots m] \sqsupset s[1 \ldots \gamma_j]$ (kui $m - j \leqslant \gamma_j$),
  - $s[1 \ldots \gamma_j] \sqsupset s[j+1 \ldots m]$ (kui $\gamma_j \leqslant m - j$);

γ_j on korrektselt defineeritud, sest 0 rahuldab alati neid kahte tingimust.

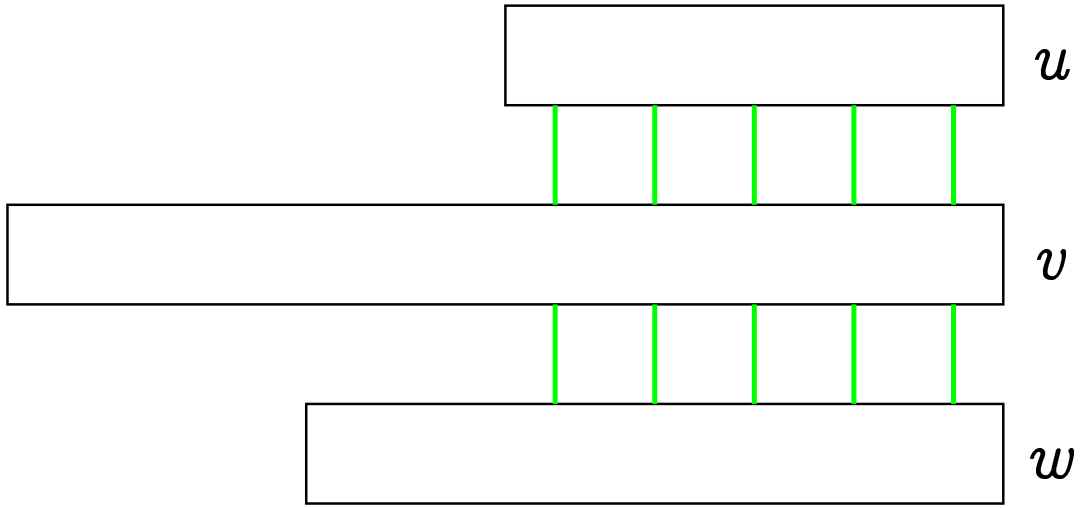
Tähistagu $u \sim v$, kus $u, v \in \Sigma^*$, seda, et $u \sqsupset v$ või $v \sqsupset u$.

Teisisõnu, kui $u \sim v$, siis u ja v lõpud langevad kokku kuni neist kahest lühema sõne alguseni.

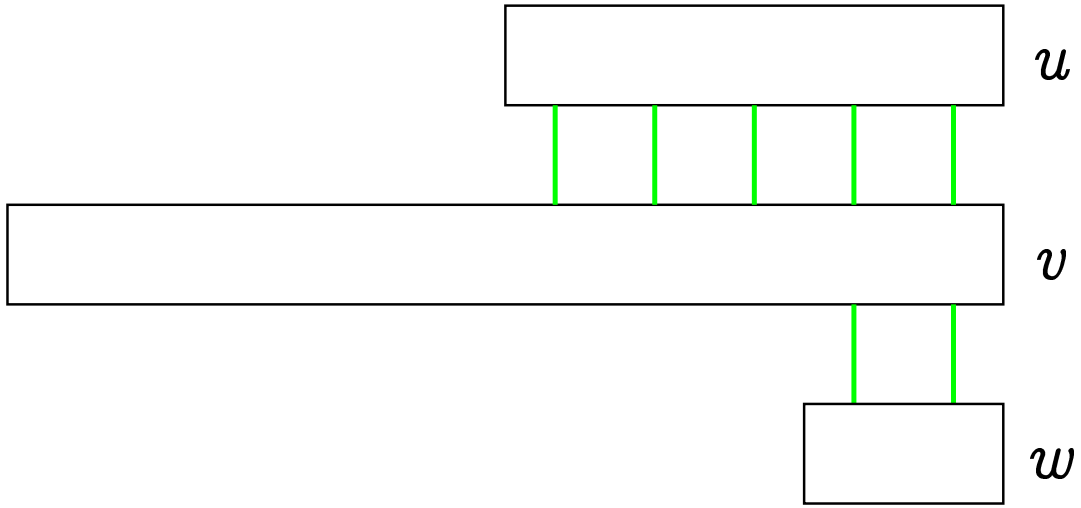
$$\gamma_j := \max\{k \,:\, 0 \leqslant k < m \text{ ja } s[1 \ldots k] \sim s[j+1 \ldots m]\}$$

Näitame, et kui $u \sim v$ ja $w \sqsupset v$ $(u, v, w \in \Sigma^*)$, siis $u \sim w$.

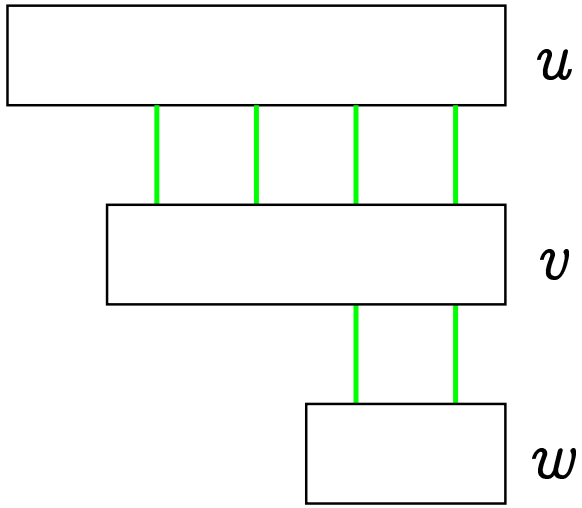
Kui $|u| < |v|$ ja $|u| \leqslant |w|$, siis



Kui $|u| < |v|$ ja $|u| > |w|$, siis



Kui $|u| \geqslant |v|$, siis



Kuna $s[1 \ldots \pi_m] \sim s$ ja $s[j+1 \ldots m] \sqsupset s$, siis $s[1 \ldots \pi_m] \sim s[j+1 \ldots m]$. Seega kuulub π_m hulka, mis esineb γ_j definitsioonis, ning järelikult

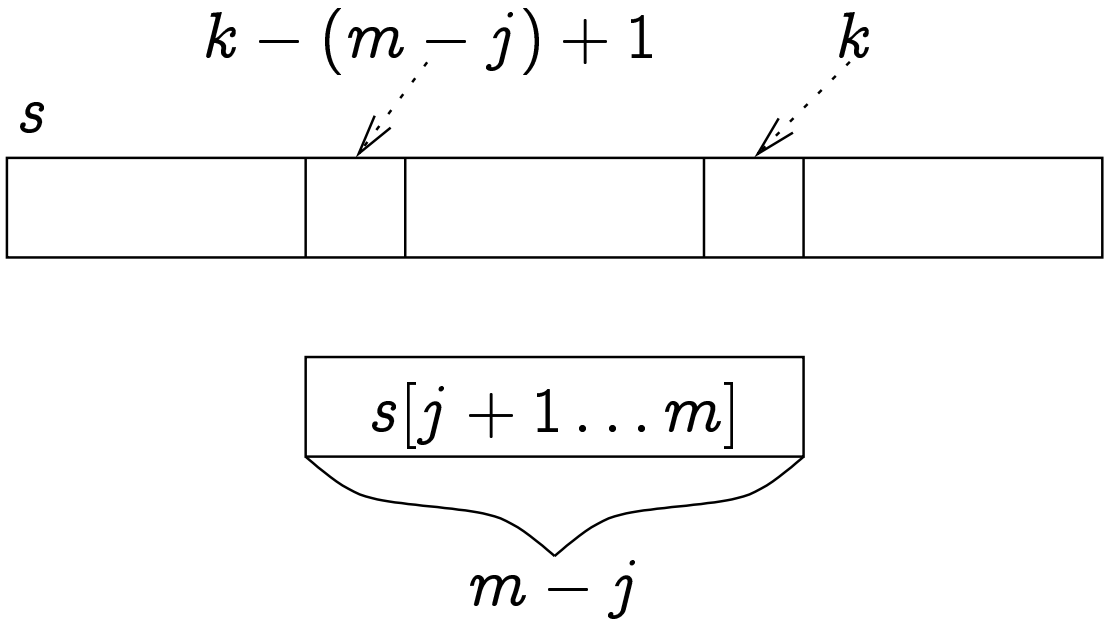
$$\gamma_j = \max\{k \,:\, \pi_m \leqslant k < m \text{ ja } s[1 \ldots k] \sim s[j+1 \ldots m]\}$$

Kui $s[1 \ldots k] \sqsupset s[j+1 \ldots m]$, siis $s[1 \ldots k] \sqsupset s$ ja vastavalt π_m definitsioonile $k \leqslant \pi_m$. Seega

$$\gamma_j = \max\big(\{\pi_m\} \cup \{k \,:\, \pi_m < k < m \text{ ja } s[j+1 \ldots m] \sqsupset s[1 \ldots k]\}\big).$$

Väide $s[j+1 \ldots m] \sqsupset s[1 \ldots k]$ on samaväärne väitega $s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1 \ldots m]$.

$$\gamma_j = \max\big(\{\pi_m\} \cup \{k \,:\, \pi_m < k < m \text{ ja } s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1 \ldots m]\}\big)$$



Olgu π' s-i „sufiksfunktsioon“ (analoogiline prefiksfunktsioonile). S.t. iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ jaoks

- $\pi'_i \in \{i+1, i+2, \ldots, m+1\}$;
- $s[\pi'_i \ldots m] \sqsubset s[i \ldots m]$;
- π'_i on vähim arv, mis eelmisi tingimusi rahuldab.

Näiteks kui $s =$ „aabcaabca“, siis π' on:

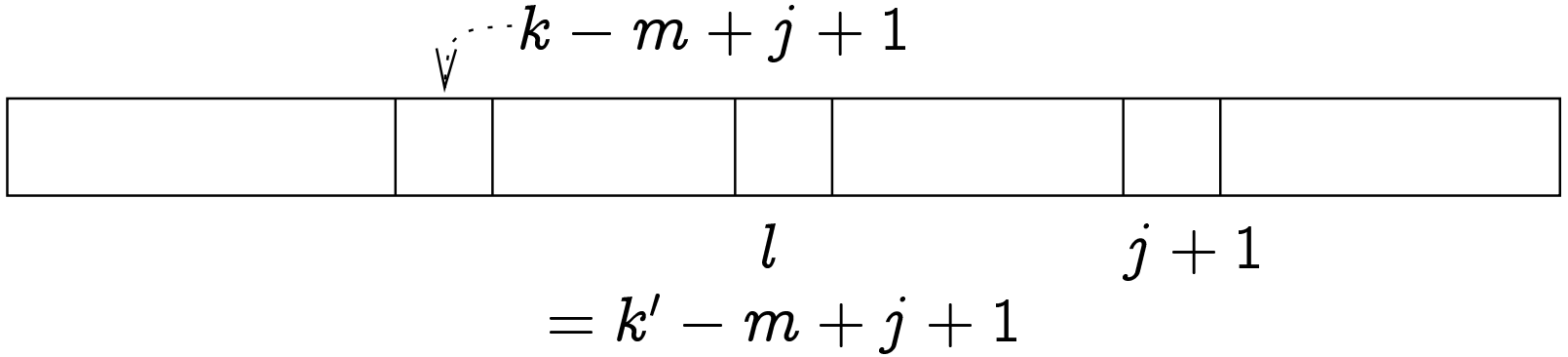
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π'_i	5	6	7	8	9	9	10	10	10

Kui $\bar{s}$ on s „paremalt vasakule“ ja $\bar{\pi}$ on tema prefiksfunktsioon, siis kehtib $i + \bar{i} = m + 1 \Rightarrow \pi'_i + \bar{\pi}_{\bar{i}} = m + 1$. Seega $\pi'_i = m + 1 - \bar{\pi}_{m+1-i}$.

$$\gamma_j = \max\big(\{\pi_m\} \cup \{k \,:\, \pi_m < k < m \text{ ja } s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1 \ldots m]\}\big)$$

Olgu $\pi_m < k < m$. Vaatame tingimust $s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[k-m+j+1 \ldots m]$. Olgu $l = \pi'_{k-m+j+1}$.

- ○ Kui $l > j+1$, siis vaadeldav tingimus ei kehti.
- ● Kui $l = j+1$, siis vaadeldav tingimus kehtib.
- ○ Kui $l < j+1$, siis võib tingimus kehtida või mitte kehtida. Kui ta aga kehtib, siis ka $s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[l \ldots m]$.



Viimasel juhul olgu $k' = l - 1 - j + m$. Siis $k' > k$ ja $s[j+1 \ldots m] \sqsubset s[k'-m+j+1 \ldots m]$. S.t. k polnud maksimaalne selline, mille korral antud tingimus kehtib.

$$\gamma_j = \max\big(\{\pi_m\} \cup \{k \,:\, \pi_m < k < m \text{ ja } \pi'_{k-m+j+1} = j+1\}\big)$$

Massiivi γ täitmine:

- Initsialiseeri: $\forall j : \gamma_j = \pi_m$.
- Iga $k - m + j + 1 \in \{1, \ldots, m\}$ jaoks:
  - $j + 1 = \pi'_{k-m+j+1}$. π' on välja arvutatud. Leiame j-i.
  - Me teame suurusi $k - m + j + 1$, j, m. Leiame k.
  - $\gamma_j := \max(\gamma_j, k)$.

arvuta_sobiva_sufiksi_pikkus(s) on

1 $m := |s|$; $\bar{s} :=$ pööra_ümber(s)
2 $\pi :=$ leia_pi(s); $\bar{\pi} :=$ leia_pi($\bar{s}$)
3 **for** $i := 1$ **to** m **do** $\pi'_i := m + 1 - \bar{\pi}_{m+1-i}$
4 **for** $j := 1$ **to** m **do** $\gamma_j := \pi_m$
5 **for** $h := 1$ **to** m **do**
6 $\quad j := \pi'_h - 1$
7 $\quad k := h - 1 - j + m$
8 $\quad$ **if** $\gamma_j < k$ **then** $\gamma_j := k$
9 **return** γ

initsialiseeri_BM on

```
1   λ := leia_viimased_kohad(s)
2   γ := arvuta_sobiva_sufiksi_pikkus(s)
```

leia_nihe(j, x) on

```
1   if j > 0 then
2       nl := j − λ_x
3   else
4       nl := 0
5   ng := m − γ_j
6   return max(nl, ng)
```