

# Täielikud kooskõlad

(üks tarvilik ja piisav tingimus nende leidumiseks)

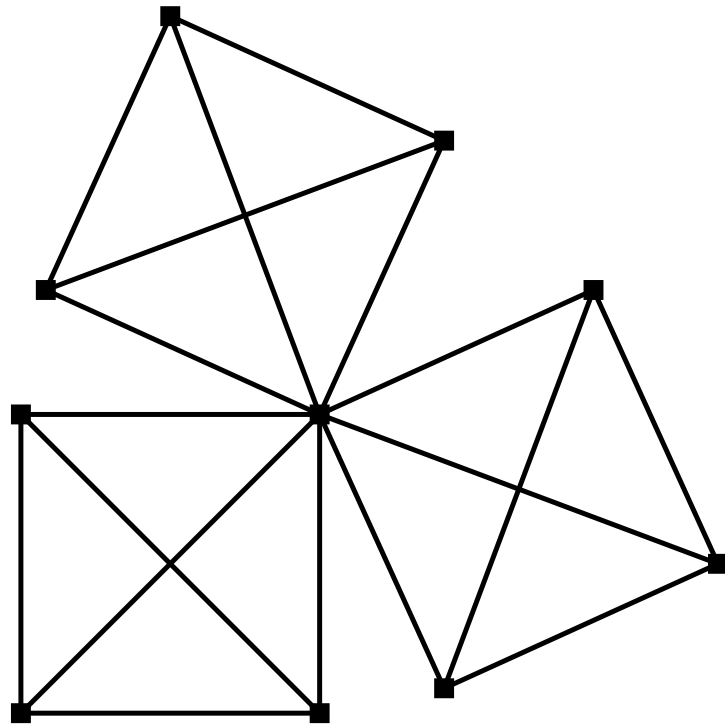
Olgu  $G = (V, E)$  lihtgraaf. *Kooskõla* graafis  $G$  on selline servade hulk  $M \subseteq E$ , et iga  $v \in V$  jaoks  $\deg_M(v) \leq 1$ .

Kooskõla  $M$  on *täielik*, kui  $\deg_M(v) = 1$  iga  $v \in V$  jaoks.

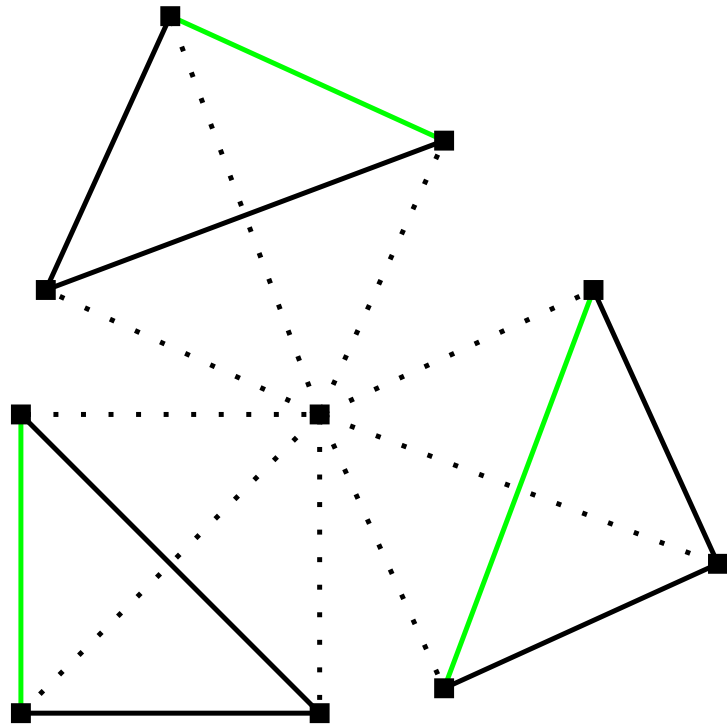
Tänases loengus anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse täieliku kooskõla leidumiseks graafis.

Ilmne on, et graafis on täielik kooskõla parajasti siis, kui tema igas sidususkomponendis on täielik kooskõla. Seepärast vaatame selles loengus ainult sidusaid graafe.

Hästi lihtne tarvilik tingimus — graafis peab olema paarisarv tippe.



Selles graafis ei ole täielikku kooskõla

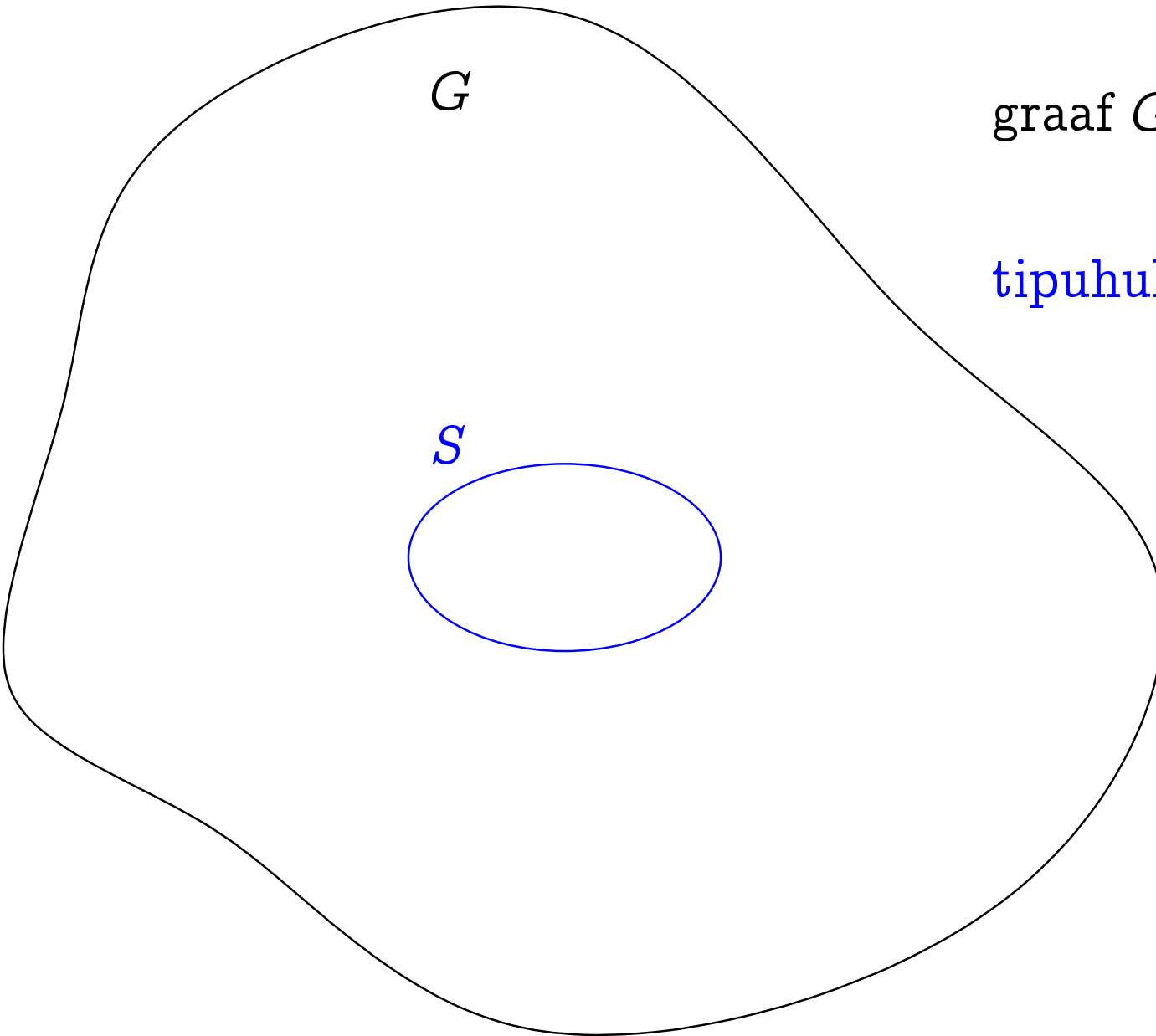




$G$

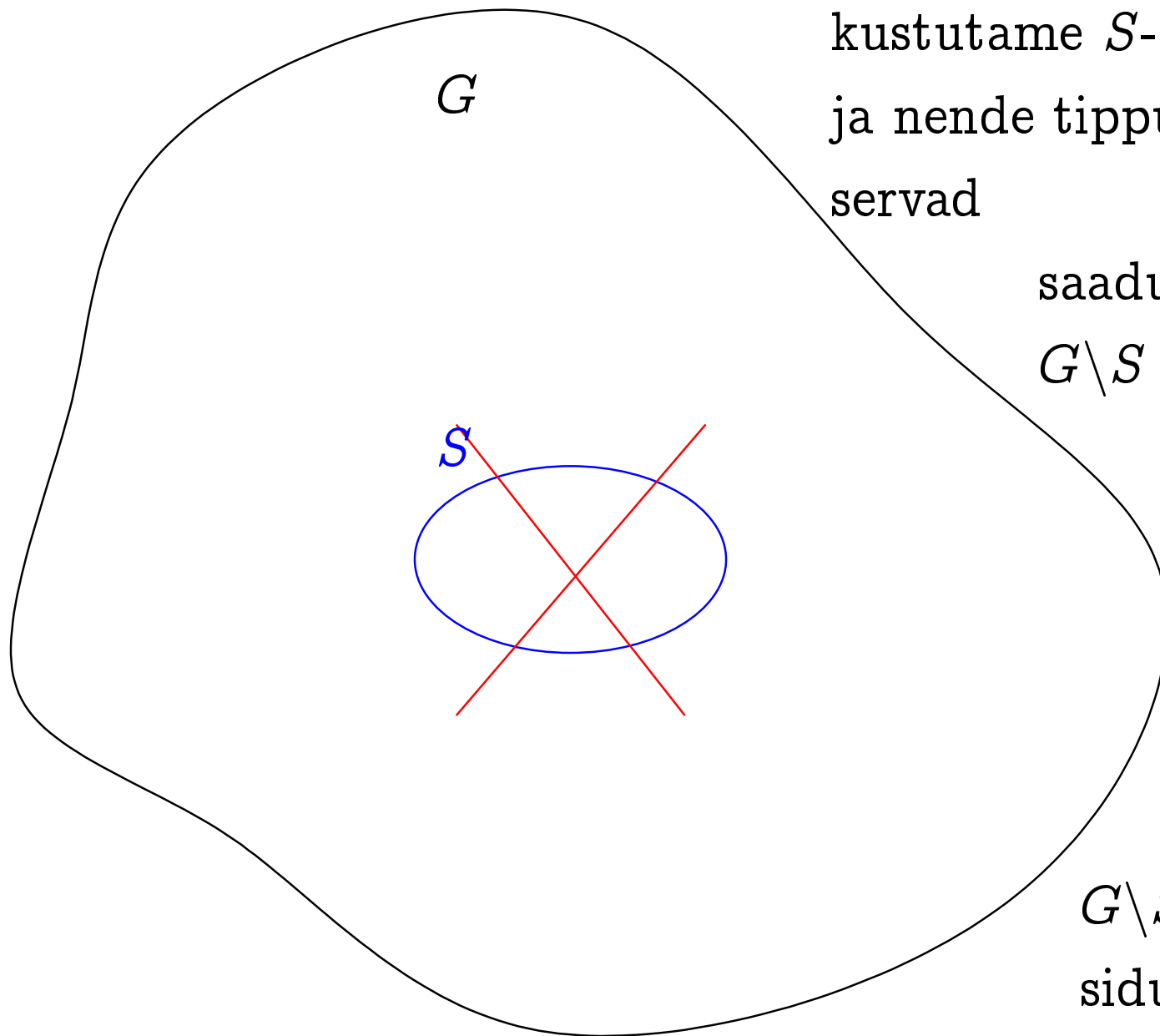
graaf  $G = (V, E)$

olgu  $G$  sidus



graaf  $G = (V, E)$

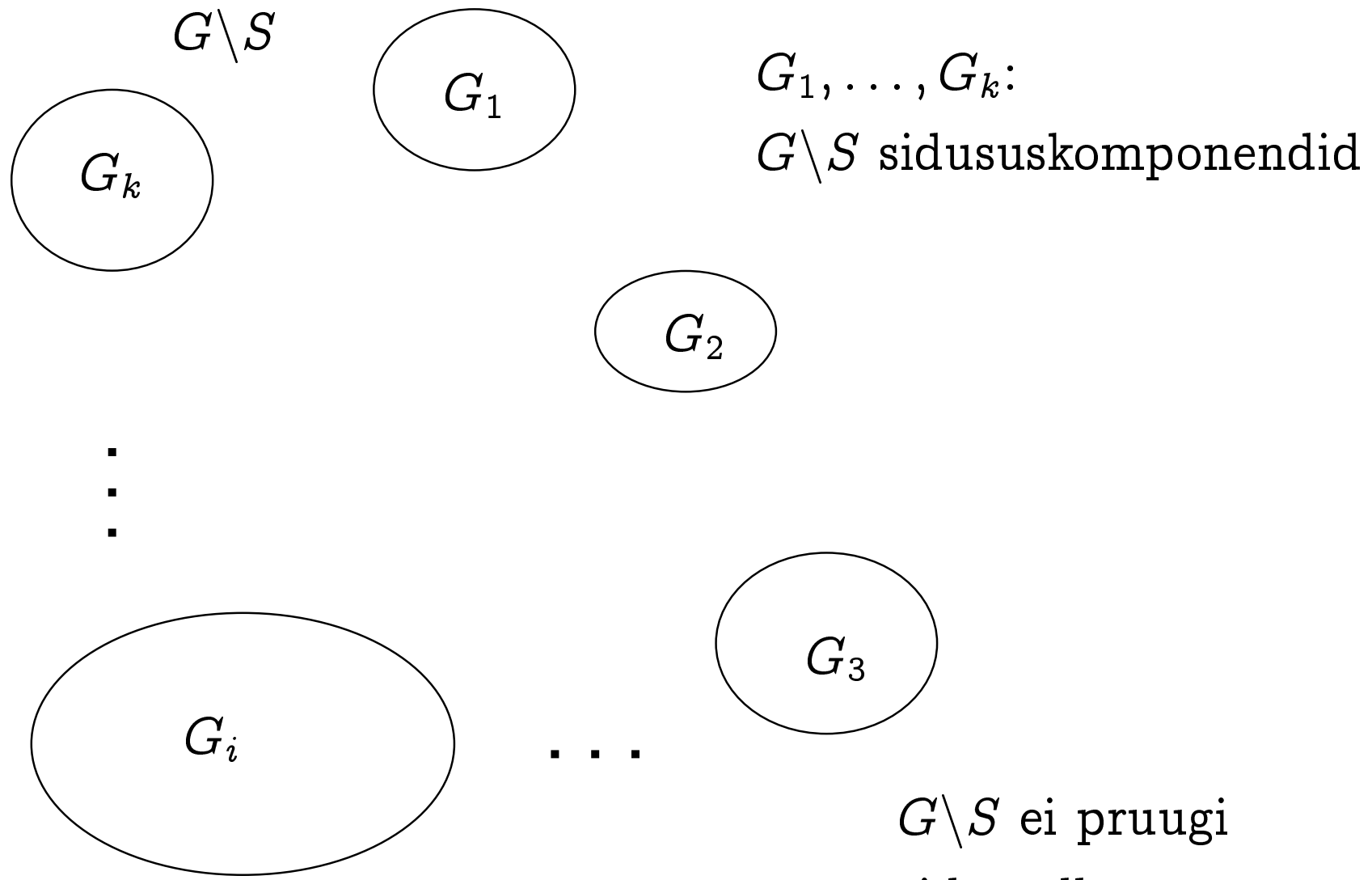
tipuhulk  $S \subseteq V$



kustutame  $S$ -i kuuluvad tipud  
ja nende tippudega intsidentsed  
servad

saadud graafi tähistame  
 $G \setminus S$

$G \setminus S$  ei pruugi  
sidus olla

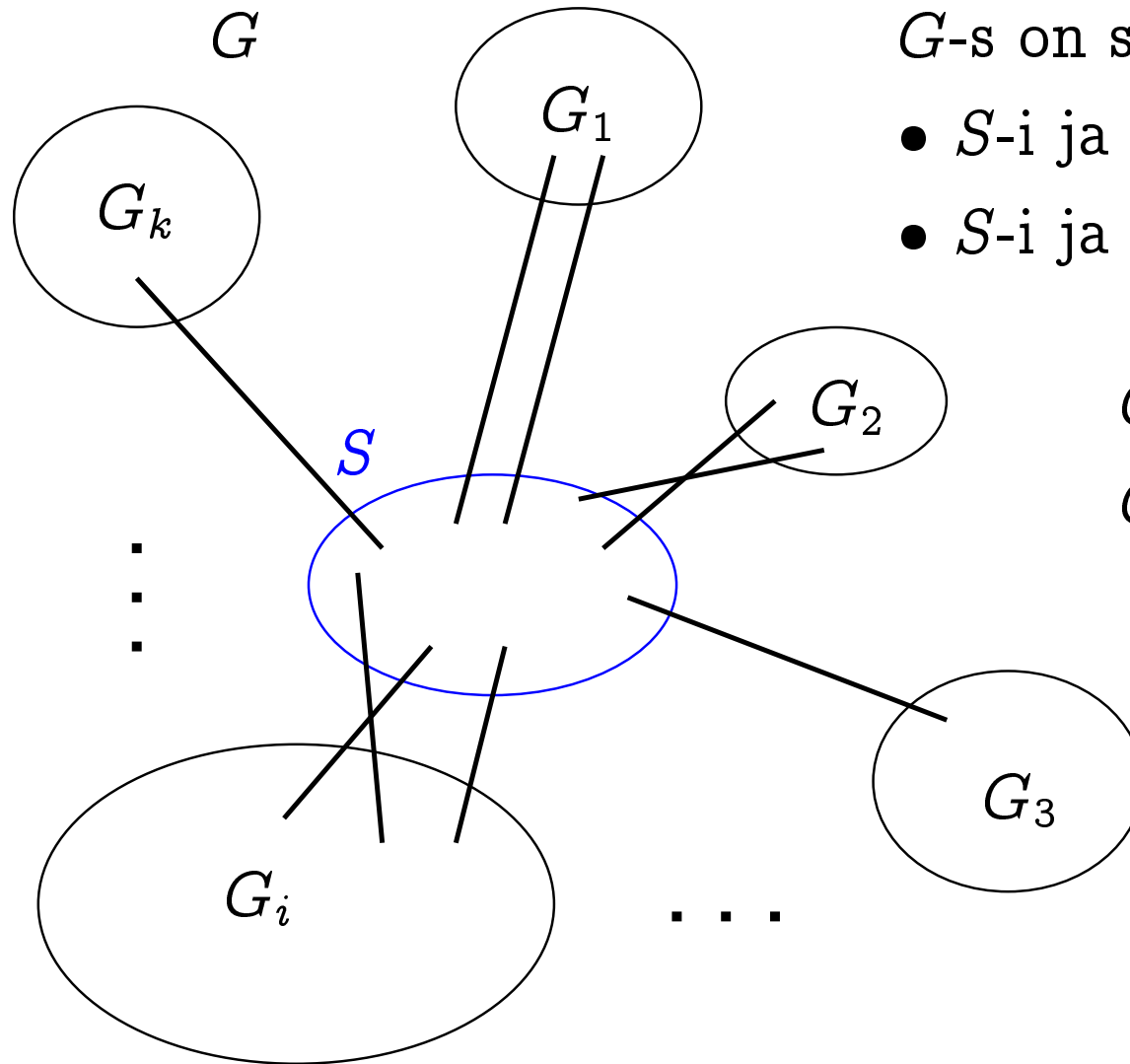


$G_1, \dots, G_k:$

$G \setminus S$  sidususkomponendid

$G \setminus S$  ei pruugi sidus olla

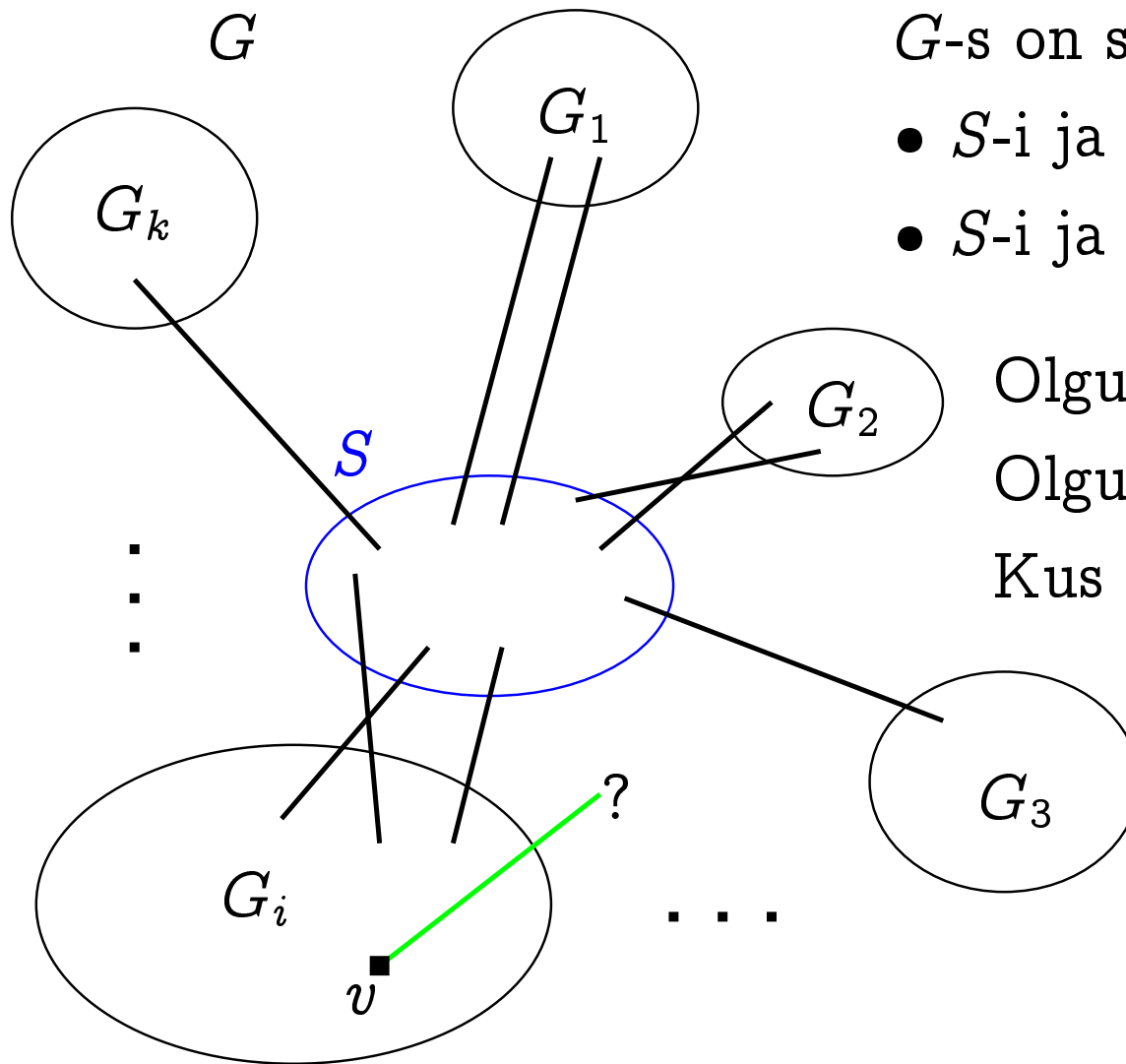




$G$ -s on servad:

- $S$ -i ja  $G_i$ -de sees
- $S$ -i ja  $G_i$ -de vahel

$G$ -s pole servi  
 $G_i$ -de vahel



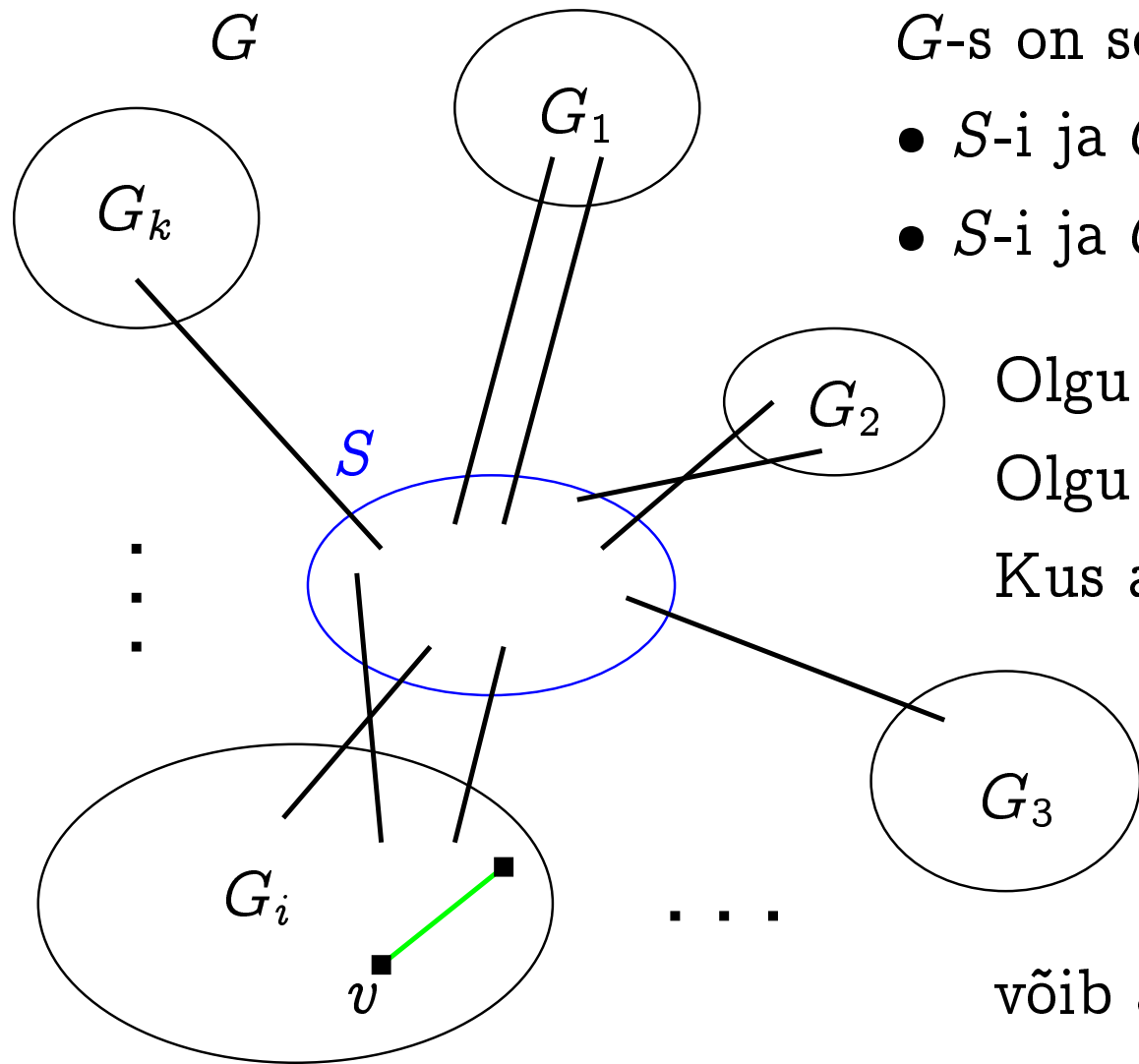
$G$ -s on servad:

- $S$ -i ja  $G_i$ -de sees
- $S$ -i ja  $G_i$ -de vahel

Olgu  $M$  täielik kooskõla  $G$ -s

Olgu  $v$  tipp  $G_i$ -s

Kus asub tipp, millega  $v$  paaris on?



$G$ -s on servad:

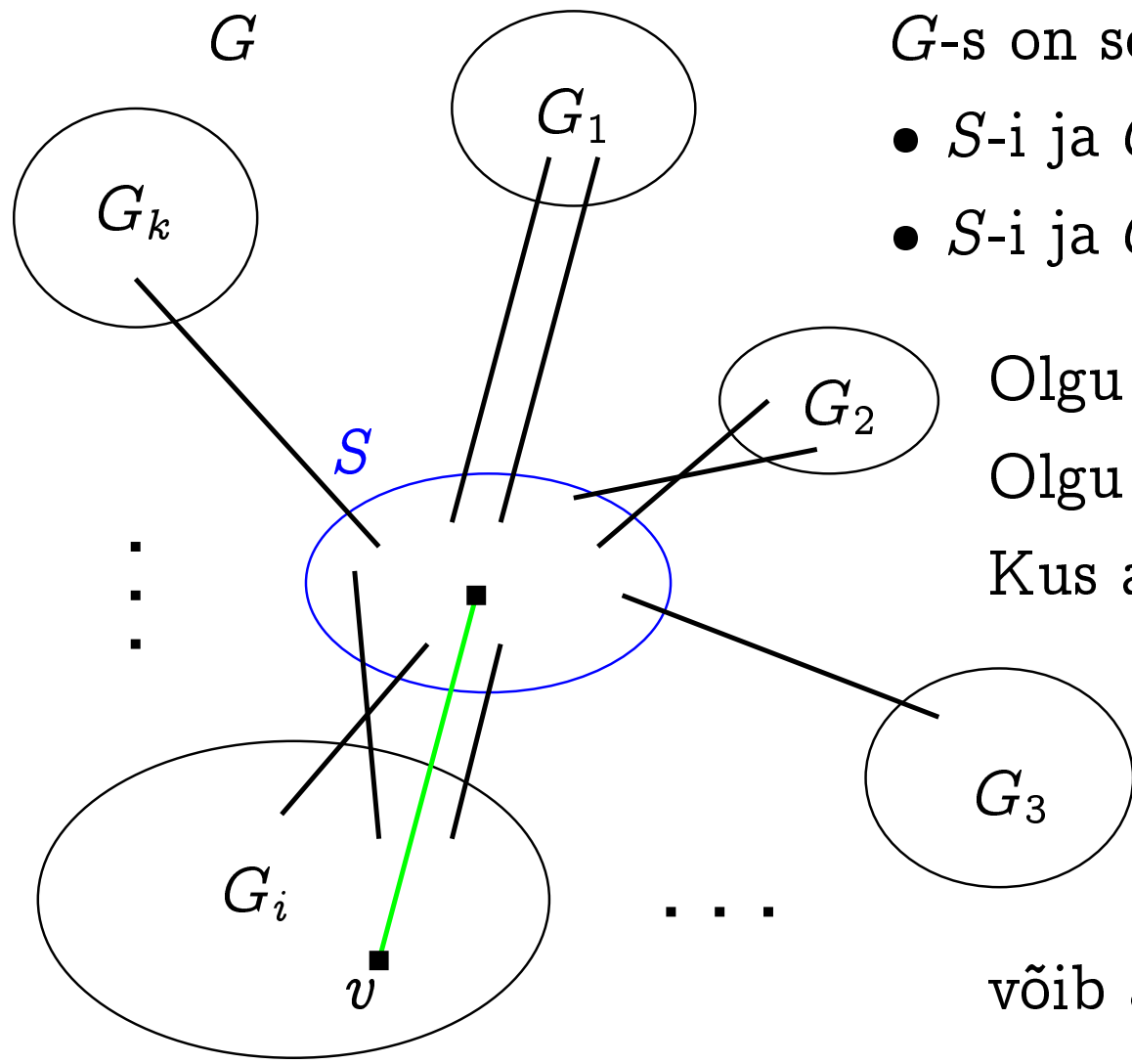
- $S$ -i ja  $G_i$ -de sees
- $S$ -i ja  $G_i$ -de vahel

Olgu  $M$  täielik kooskõla  $G$ -s

Olgu  $v$  tipp  $G_i$ -s

Kus asub tipp, millega  $v$  paaris on?

võib asuda  $G_i$ -s



$G$ -s on servad:

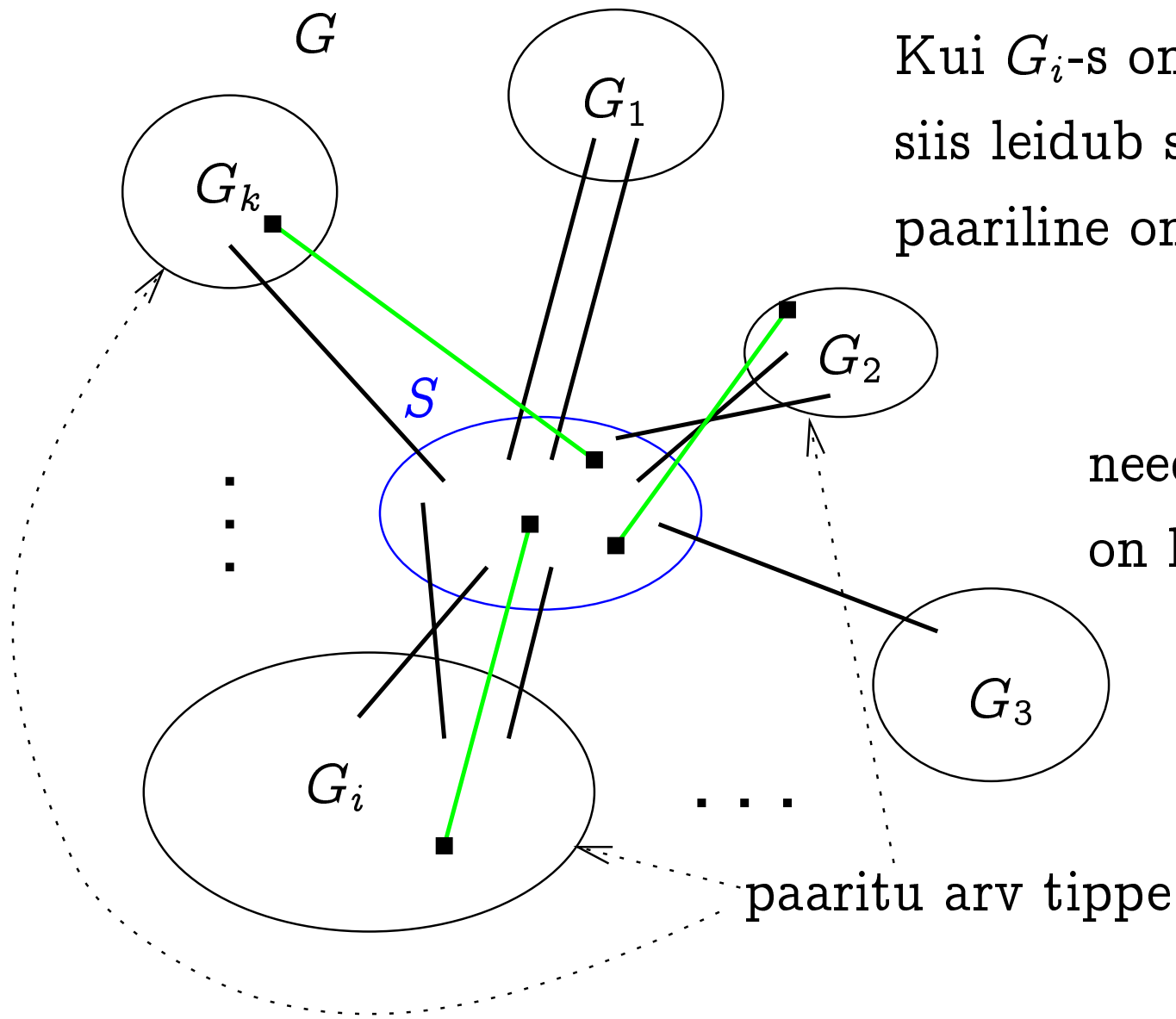
- $S$ -i ja  $G_i$ -de sees
- $S$ -i ja  $G_i$ -de vahel

Olgu  $M$  täielik kooskõla  $G$ -s

Olgu  $v$  tipp  $G_i$ -s

Kus asub tipp, millega  $v$  paaris on?

võib asuda  $S$ -is



Kui  $G_i$ -s on paaritu arv tippe, siis leidub seal tipp, mille paariline on  $S$ -is.

need paarilised  $S$ -is on kõik erinevad

paaritu arv tippe

Tähistagu  $odd(G)$  sidususkomponentide arvu  $G$ -s, millel on paaritu arv tippe.

Näitasime, et kui graafis  $G = (V, E)$  leidub täielik kooskõla, siis  $odd(G \setminus S) \leq |S|$ . Seda iga  $S \subseteq V$  jaoks.

**Teoreem (Tutte).** Graafis  $G = (V, E)$  leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga  $S \subseteq V$  jaoks kehtib  $odd(G \setminus S) \leq |S|$ .

**Tõestus.** Tarvilikkust juba näitasime. Näitame piisavust ka.

Vastuväiteliselt oletame, et leidub graaf  $G$ , kus iga  $S \subseteq V$  jaoks  $odd(G \setminus S) \leq |S|$ , aga  $G$ -s ei leidu täielikku kooskõla.

Muuhulgas siis  $odd(G) = odd(G \setminus \emptyset) \leq 0$ , seega on  $G$ -s paarisarv tippe.

Lisame  $G$ -le mingil viisil servi senikaua, kuni jõuame mingi graafini  $G^*$ , kus ei ole täielikku kooskõla, aga millele ükskõik millise serva lisamisel saaksime graafi, kus on täielik kooskõla.

Kuna  $K_{2n}$ -s on täielik kooskõla, siis me jõuame sellise  $G^*$ -ni.

Näitame, et iga  $S \subseteq V$  jaoks kehtib ka  $odd(G^* \setminus S) \leq |S|$ .

Piisab, kui näitame  $odd(G^* \setminus S) \leq odd(G \setminus S)$ .

Graaf  $G^* \setminus S$  on saadud graafile  $G \setminus S$  mingeid servi lisades. Uurime, kuidas muutub  $odd(\cdot)$  graafile servi lisades.

Kui lisame graafile mingi serva, siis võib ta ühendada 2 tippu

- samast sidususkomponendist. Sel juhul  $odd(\cdot)$  ei muutu.
- kahest erinevast sidususkomponendist. Sel juhul saab neist kahest komponendist üks.



- Kui mõlemis komponendis oli paarisarv tippe, siis on uues komponendis ka paarisarv tippe. Seega siis  $odd(\cdot)$  ei muutu.
- Kui ühes komponendis oli paaris- ja teises paaritu arv tippe, siis on uues komponendis ka paaritu arv tippe. Seega siis  $odd(\cdot)$  ei muutu.
- Kui mõlemis komponendis oli paaritu arv tippe, siis on uues komponendis paarisarv tippe. Seega siis  $odd(\cdot)$  väheneb 2 võrra.

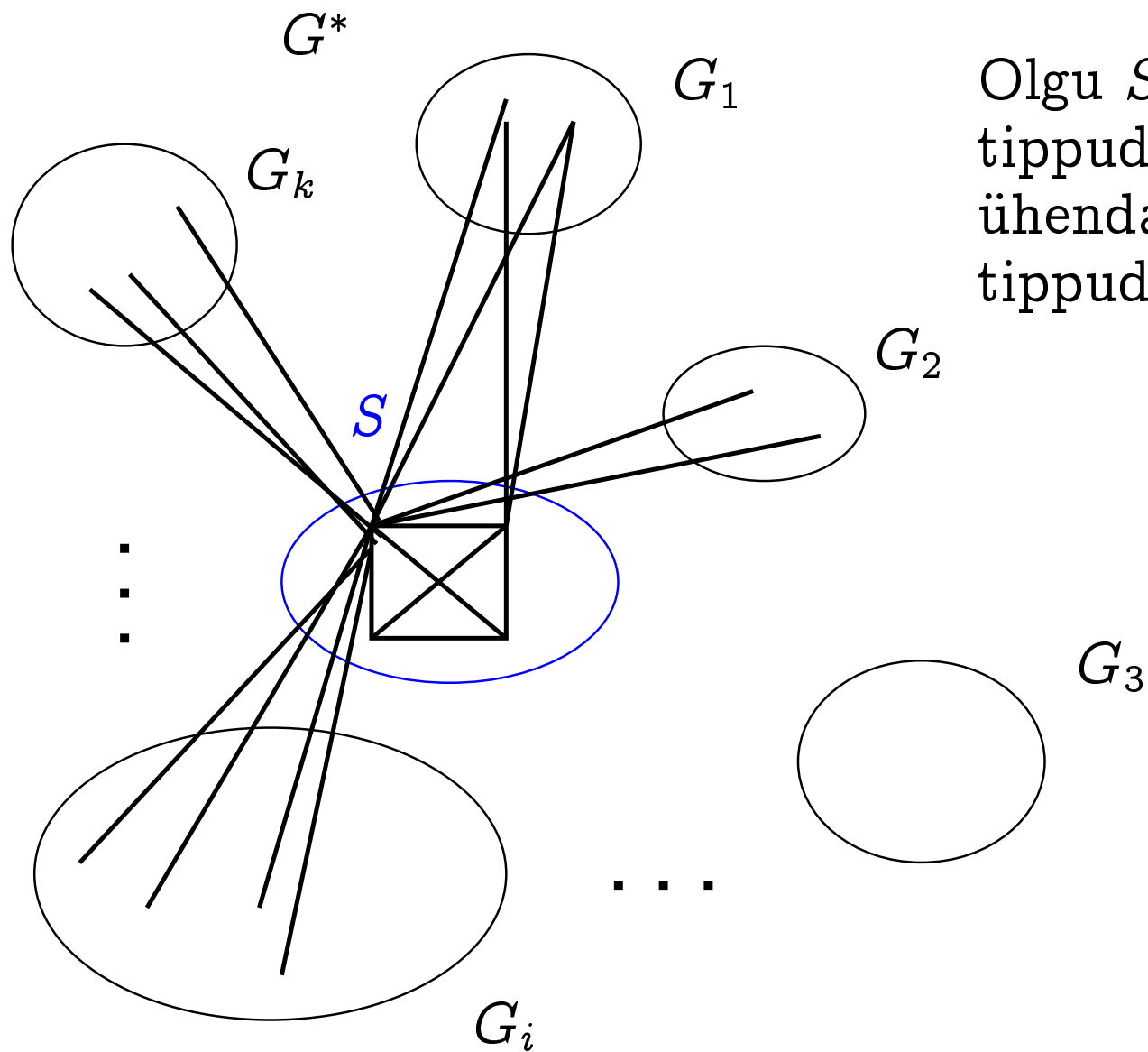
Seega saab graafile servi lisades  $odd(\cdot)$  ainult väheneda.

Järelikult  $odd(G^* \setminus S) \leq odd(G \setminus S) \leq |S|$ .

Oleme näidanud, et teoreemi tõestamiseks piisab, kui tule-  
tada vastuolu järgmisest väitest:

Leidub graaf  $G^* = (V, E^*)$ , kus

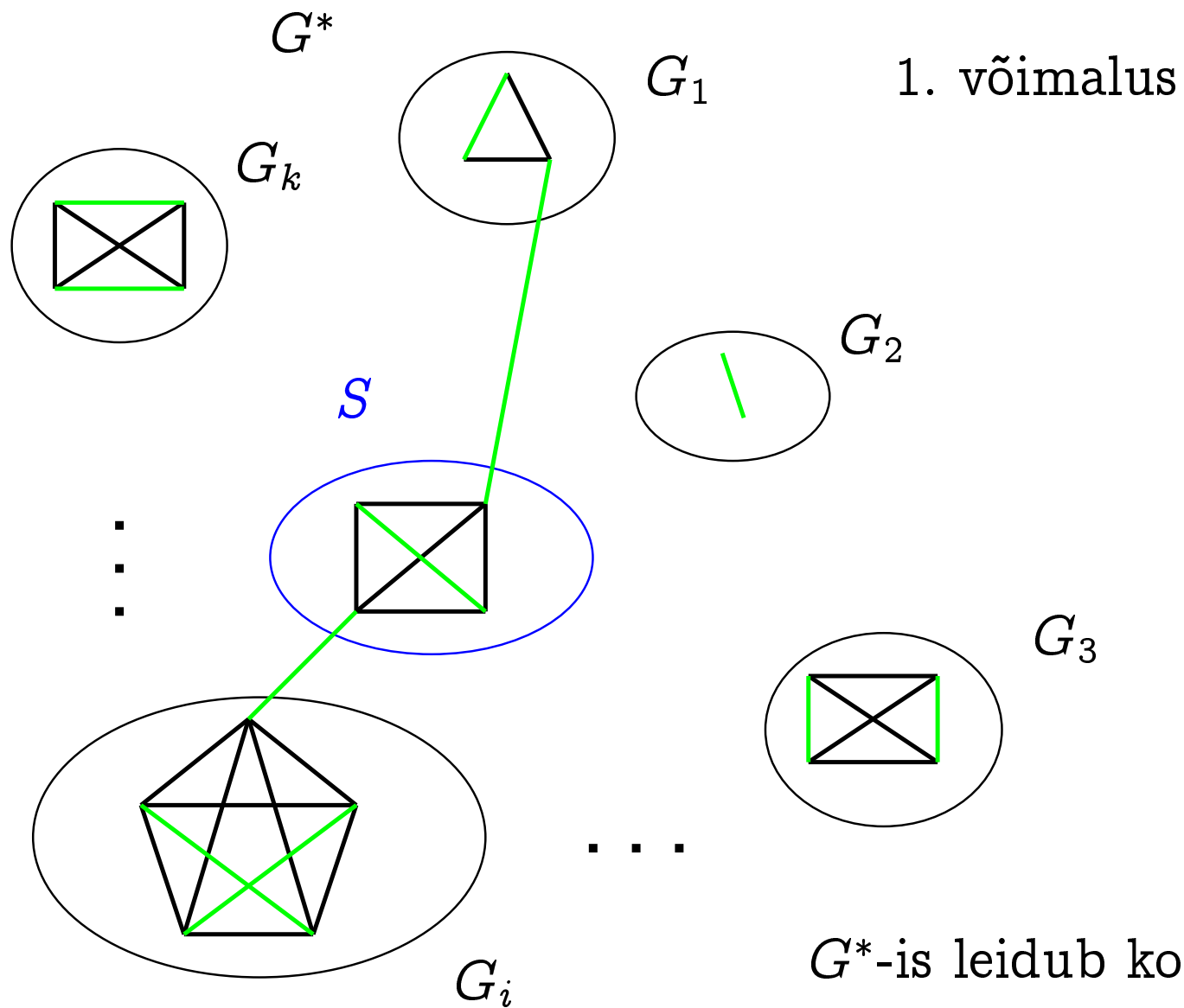
- ei leidu täielikku kooskõla;
- suvalise serva lisamisel tekib täielik kooskõla;
- iga  $S \subseteq V$  jaoks kehtib  $odd(G^* \setminus S) \leq |S|$ .



Olgu  $S$  kõigi selliste tippude hulk, mis on ühendatud kõigi teiste tippudega

On kaks võimalust:

1. Graafi  $G^* \setminus S$  kõik sidususkomponendid on täisgraafid.
2. Leidub  $G^* \setminus S$  sidususkomponent, mis ei ole täisgraaf.



Konstrueerime täieliku kooskõla  $G^*$ -s:

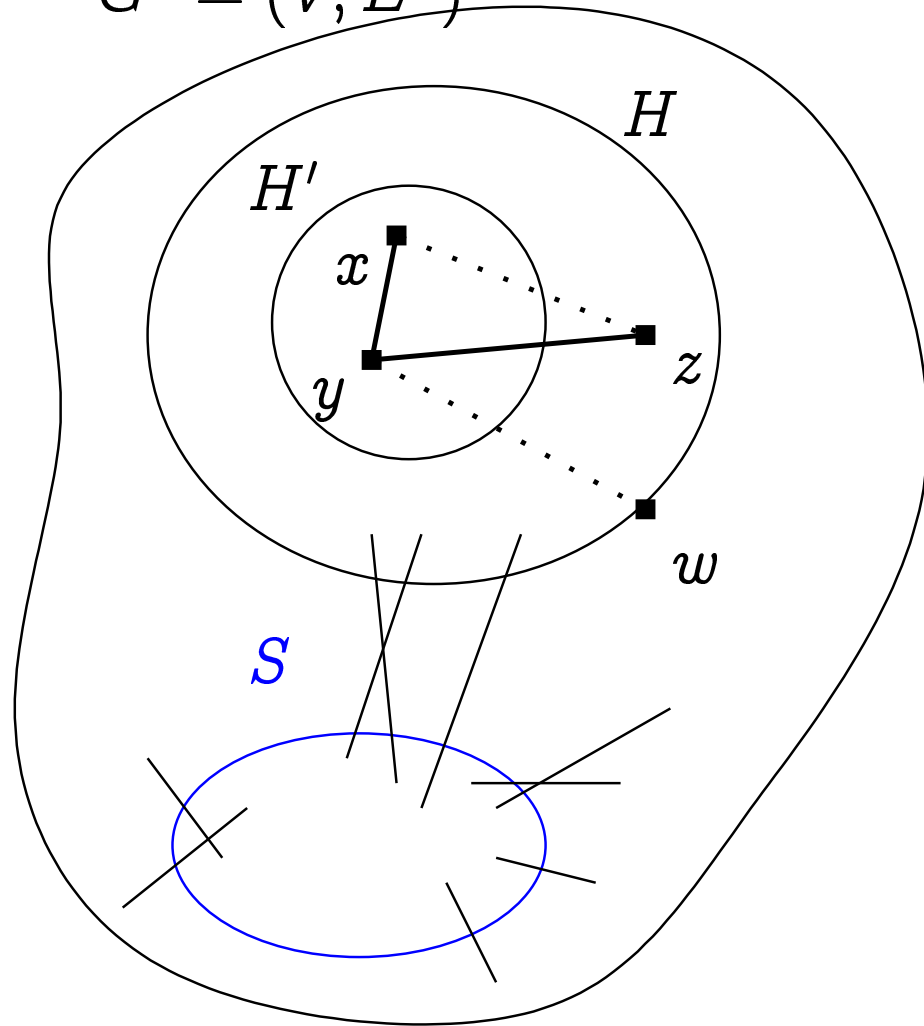
- $G^* \setminus S$  sidususkomponentides  $K_{2n}$  nende komponentide piires.
- $G^* \setminus S$  sidususkomponentides  $K_{2n+1}$  nende komponentide piires, nii et üks tipp üle jääks.
- $G^* \setminus S$  sidususkomponentides  $K_{2n+1}$  üksikud ülejäänud tipud seame igäühe vastavusse mõne  $S$ -i tipuga.

Komponente  $K_{2n+1}$  pole rohkem kui  $|S|$ .

- $S$ -i ülejäänud tipud seame omavahel vastavusse.

Üle jääb paarisarv, sest  $G^*$ -s on paarisarv tippe.

$$G^* = (V, E^*)$$



———— serv  
 ..... serva pole

2. võimalus

$H$  —  $G^* \setminus S$  sidususkomponent  
 $H$  pole täisgraaf

$H'$  —  $H$  max. täisalamgraaf

$y \in V(H')$  ja  $z \in V(H) \setminus V(H')$

$x \in V(H')$

$w \in V \setminus S$

$$G_1 = (V, E^* \cup \{(x, z)\})$$

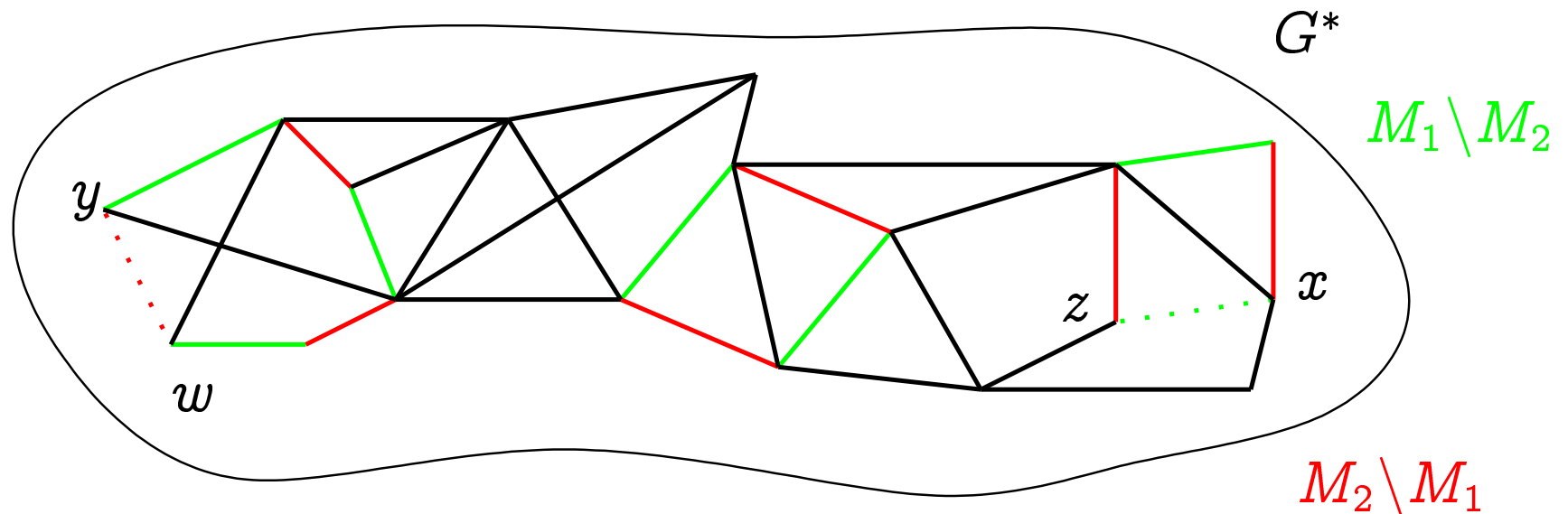
$$G_2 = (V, E^* \cup \{(y, w)\})$$

Graafides  $G_1$  ja  $G_2$  leiduvad  
 kooskõlad.

Olgu  $M_1$  graafi  $G_1$  täielik kooskõla. Siis  $(x, z) \in M_1$ , muidu oleks  $M_1$  graafi  $G^*$  täielik kooskõla.

Olgu  $M_2$  graafi  $G_2$  täielik kooskõla. Siis  $(y, w) \in M_2$ .

Olgu  $G' = (V, (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1))$ .





Olgu  $v \in V$ . Mis on  $\deg_{G'}(v)$  võimalikud väärtused?

Leidub täpselt üks  $e_1 \in M_1$  ja  $e_2 \in M_2$ , nii et  $e_1$  ja  $e_2$  on  $v$ -ga intsidentsed.

- Kui  $e_1 = e_2$ , siis  $\deg_{G'}(v) = 0$ .
- Kui  $e_1 \neq e_2$ , siis  $\deg_{G'}(v) = 2$ .

Seega on  $G'$  sidususkomponentideks isoleeritud tipud ja tsüklid.

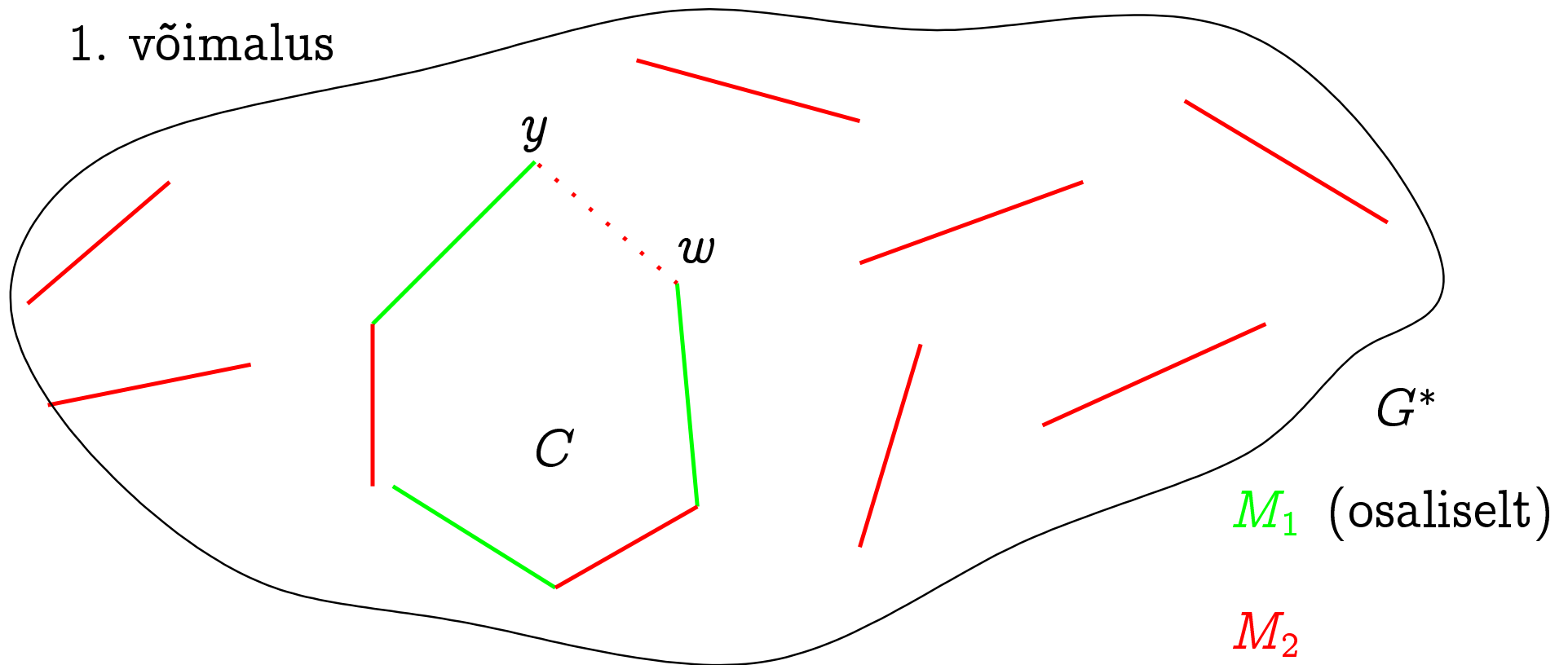
Tsüklid on paarisarvulise pikkusega — vaheldumisi serv  $M_1$ -st ja serv  $M_2$ -st.

On kaks võimalust:

1. Servad  $(x, z)$  ja  $(y, w)$  kuuluvad  $G'$  erinevatesse sidususkomponentidesse.
2. Servad  $(x, z)$  ja  $y, w)$  kuuluvad  $G'$  samasse sidususkomponenti.

Mõlemal juhul näitame, et  $G^*$ -s ikkagi leidub täielik kooskõla.

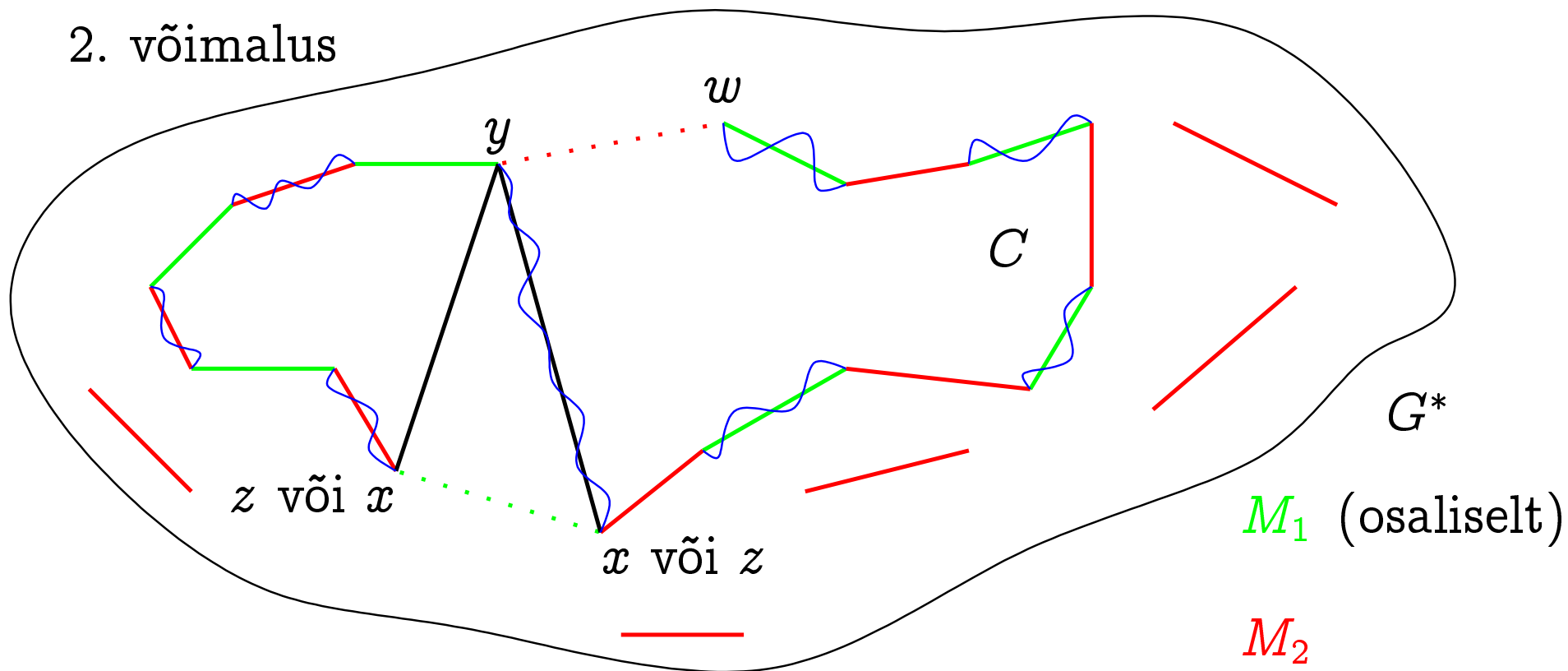
1. võimalus



Kooskõla  $G^*$ -il:

- $M_1$  tsüklis  $C$
- $M_2$  väljaspool tsüklit  $C$

## 2. võimalus



Kooskõla  $G^*$ -il:

- sinised servad tsüklis  $C$
- $M_2$  väljaspool tsüklit  $C$



**Teoreem (Tutte-Berge valem).** Olgu  $G = (V, E)$  graaf. Olgu  $\nu(G)$  graafi  $G$  maksimaalsete kooskõlade võimsus. Siis

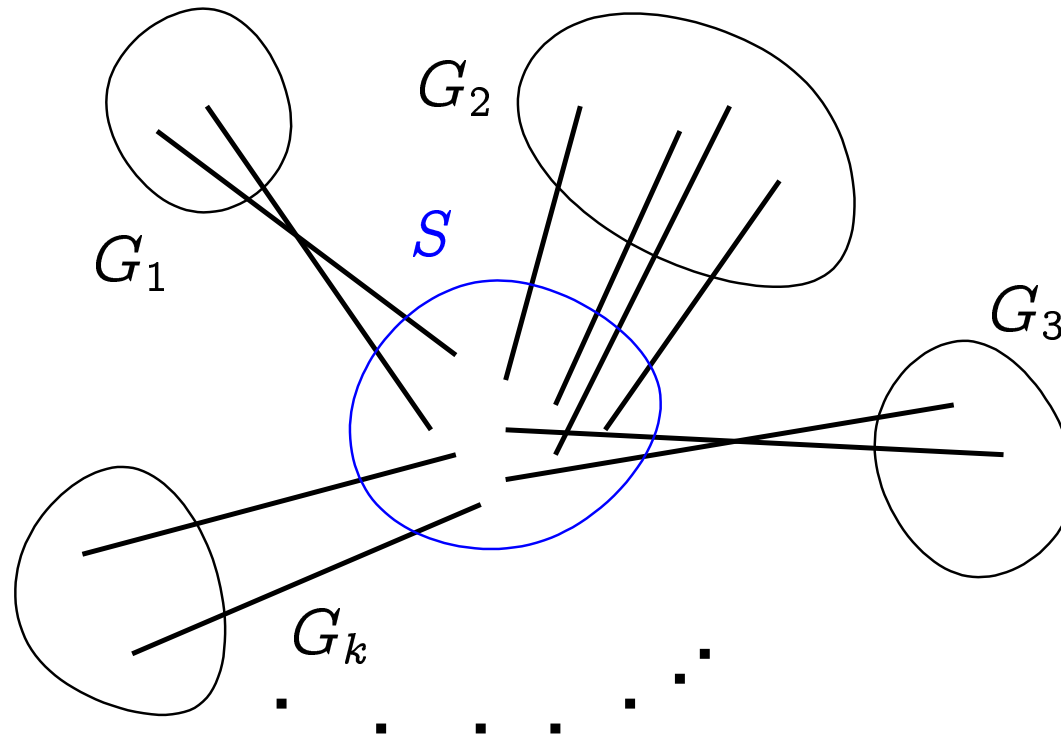
$$\nu(G) = \min_{S \subseteq V} \frac{1}{2} (|V| + |S| - \text{odd}(G \setminus S)) .$$

Teisisõnu, tippude arv, mis maksimaalsetel kooskõladel katmata jääb, on

$$\max_{S \subseteq V} \text{odd}(G \setminus S) - |S| .$$

Ütleme, et kooskõla  $M$  *katab* tippu  $v$ , kui  $\deg_M(v) = 1$ .

Tõestus. „ $\leq$ “.



Olgu  $G_1, \dots, G_k$  graafi  $G \setminus S$  sidususkomponendid. Siis igas paaritu arvu tippudega komponendis kõigi tippude ära katmiseks on vaja vähemalt ühte tippu  $S$ -st. Neis komponentides, millele  $S$ -i tippu ei jätku, jääb vähemalt üks tipp katmata.

„ $\geq$ “ tõestame induktsiooniga üle  $|V|$ . Meil tuleb näidata, et leidub selline  $S \subseteq V$ , et

$$\nu(G) \geq \frac{1}{2}(|V| + |S| - \text{odd}(G \setminus S)) .$$

*Baas.*  $|V| = 1$ . Siis  $\nu(G) = 0$  ning hulgaks  $S$  võime võtta  $\emptyset$ . Siis  $|V| + |S| - \text{odd}(G \setminus S) = 1 + 0 - 1 = 0$ .

*Samm.* Olgu  $|V| > 1$ . On kaks võimalust.

1.  $G$  ei ole sidus.
2.  $G$  on sidus.

**Võimalus 1.** Olgu  $G_1, \dots, G_k$  graafi  $G$  sidususkomponendid. Neile võime rakendada induktsiooni eeldust.

Olgu  $G_i = (V_i, E_i)$ .

Ind. eelduse järgi leiduvad  $S_1 \subseteq V_1, \dots, S_k \subseteq V_k$  nii, et

$$\nu(G_i) \geq \frac{1}{2}(|V_i| + |S_i| - \text{odd}(G_i \setminus S_i)) \quad (1 \leq i \leq k) .$$

Võtame  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ . Siis

$$\nu(G) = \nu(G_1) + \dots + \nu(G_k)$$

$$\text{odd}(G \setminus S) = \text{odd}(G_1 \setminus S_1) + \dots + \text{odd}(G_k \setminus S_k)$$

$$|V| = |V_1| + \dots + |V_k| \quad |S| = |S_1| + \dots + |S_k| .$$

ja seega  $\nu(G) \geq \frac{1}{2}(|V| + |S| - \text{odd}(G \setminus S))$ .



Võimalus 2. Ütleme, et mingi tipp  $v \in V$  on *kriitiline*, kui kõik maksimaalsed kooskõlad teda katavad.

Kui  $G$ -s leidub täielik kooskõla, siis on kõik tema tipud kriitilised.

On kaks võimalust.

2.1.  $G$  on sidus ja temas leidub kriitiline tipp  $v$ .

2.2.  $G$  on sidus ja temas ei leidu kriitilisi tippe.

**Võimalus 2.1.** Antud juhul  $\nu(G \setminus v) = \nu(G) - 1$ . Rakendame induktsiooni eeldust graafile  $G \setminus v$ .

Leidub  $S' \subseteq V \setminus \{v\}$  nii, et

$$\nu(G \setminus v) \geq \frac{1}{2}(|V \setminus \{v\}| + |S'| + \text{odd}(G \setminus v \setminus S')) .$$

Olgu  $S = S' \cup \{v\}$ . Siis  $|S| = |S'| + 1$  ja

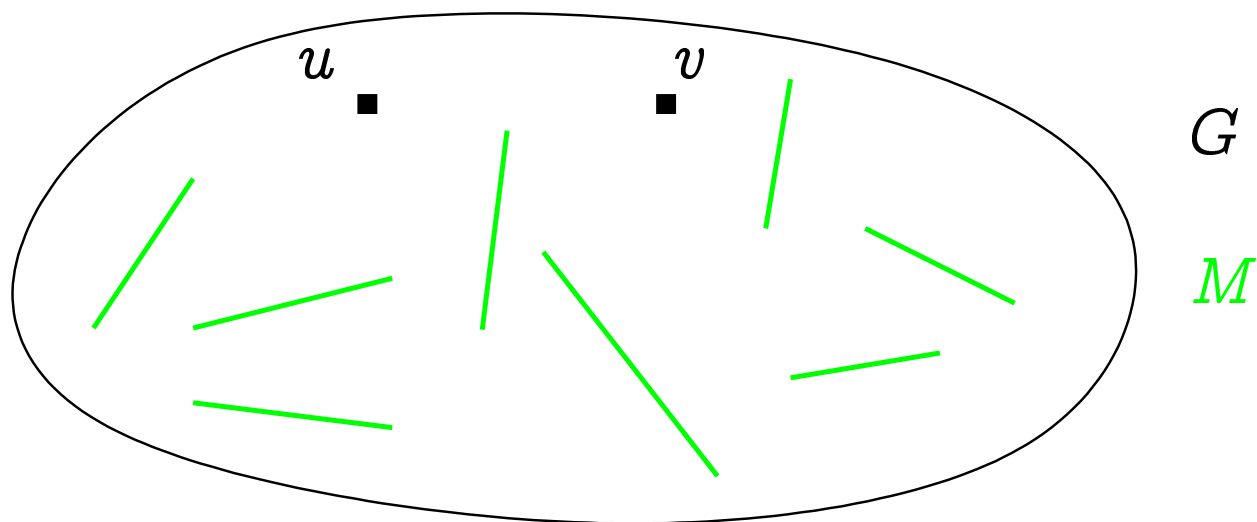
$$\begin{aligned} \nu(G) = \nu(G \setminus v) + 1 &\geq \\ \frac{1}{2}(|V \setminus \{v\}| + |S'| + \text{odd}(G \setminus v \setminus S')) + 1 &= \\ \frac{1}{2}(|V| - 1 + |S| - 1 + \text{odd}(G \setminus S)) + 1 &= \\ \frac{1}{2}(|V| + |S| + \text{odd}(G \setminus S)) &. \end{aligned}$$

**Võimalus 2.2.** Antud juhul  $G$ -s täielikku kooskõla ei leidu, s.t.  $\nu(G) < |V|/2$ .

Näitame, et  $\nu(G) = (|V| - 1)/2$ . S.t. maksimaalne kooskõla ei kata täpselt ühte tippu.

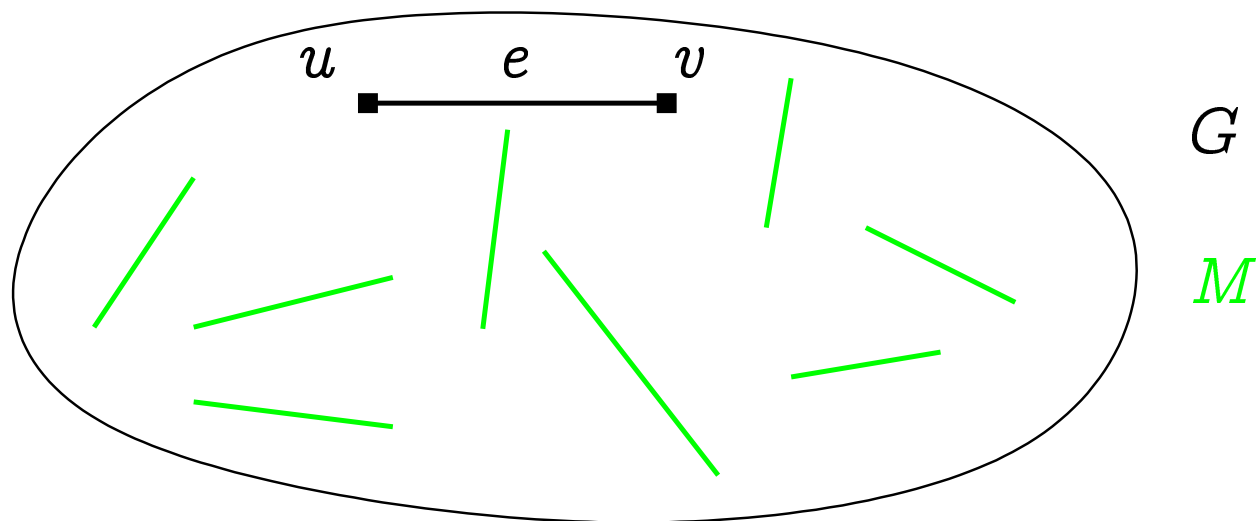
Oletame vastuväiteliselt, et  $\nu(G) < (|V| - 1)/2$ , s.t. maksimaalne kooskõla ei kata vähemalt kahte tippu.

Olgu  $M$  mingi maksimaalne kooskõla ning  $u, v \in V$  mingid kaks tippu ( $u \neq v$ ), mida ta ei kata. Olgu  $M, u, v$  valitud nii, et  $d(u, v)$  on minimaalne võimalik.

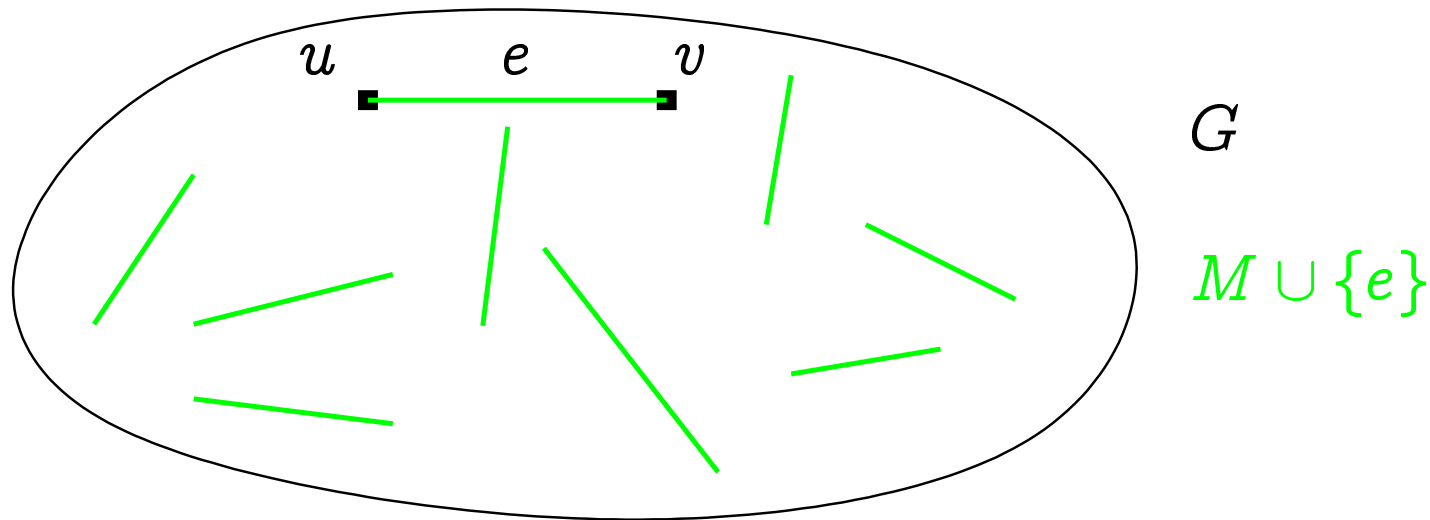


Kaks võimalust: a.  $d(u, v) = 1$ . b.  $d(u, v) > 1$ .

Võimalus a. Leidub  $e \in E$  nii, et  $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$ .

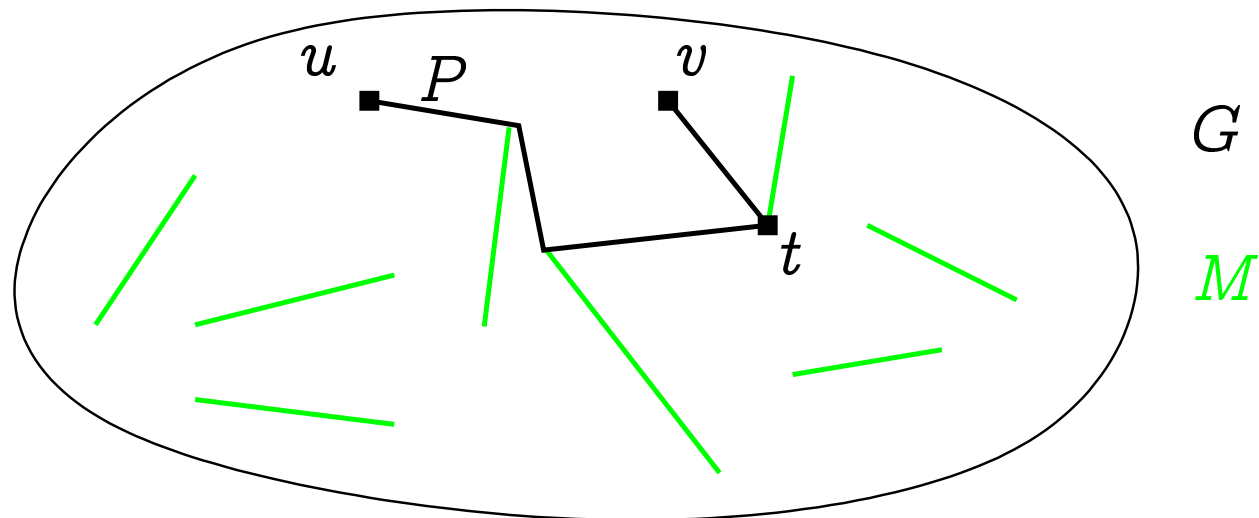


Võimalus a. Leidub  $e \in E$  nii, et  $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$ .



Siis  $M \cup \{e\}$  on kooskõla ja  $|M \cup \{e\}| = |M| + 1$ . Vastuolu  $M$ -i (kui maksimaalse kooskõla) valikuga.

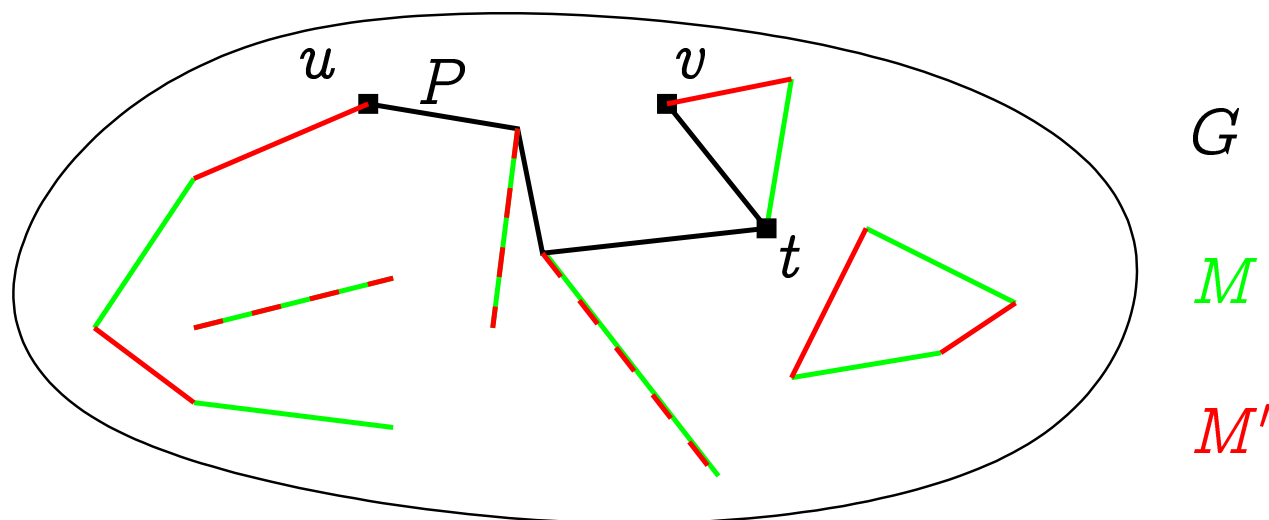
Võimalus b. Olgu  $P$  minimaalse pikkusega ahel  $u$ -st  $v$ -sse.



$M$  katab ahela  $P$  kõik sisemised tipud, muidu oleks meil vastuolu  $u$  ja  $v$  valikuga ( $d(u, v)$  on minimaalne võimalik).

Olgu  $t$  mõni ahela  $P$  sisemistest tippudest.

Olgu  $M'$  maksimaalne kooskõla, mis ei kata tippu  $t$ . Valime  $M'$  nii, et  $|M \cap M'|$  oleks maksimaalne võimalik.



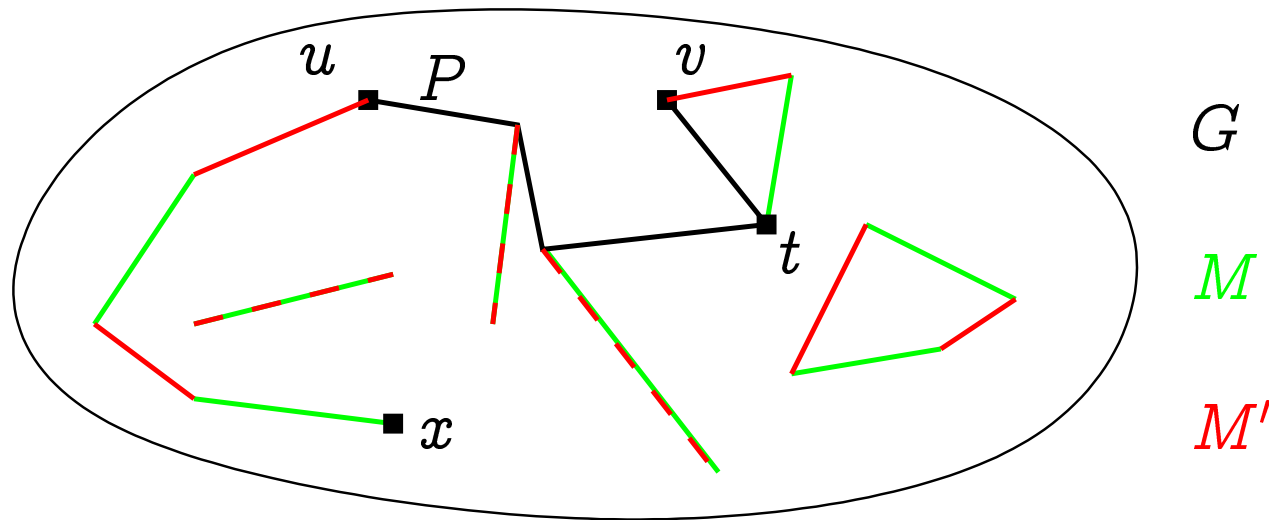
Siis  $M'$  katab ära nii  $u$  kui ka  $v$ . Muidu oleks meil vastuolu  $M$ ,  $u$ ,  $v$  valikuga ( $d(u, v)$  on minimaalne võimalik).



$M$  ja  $M'$  katavad ära sama palju tippe.

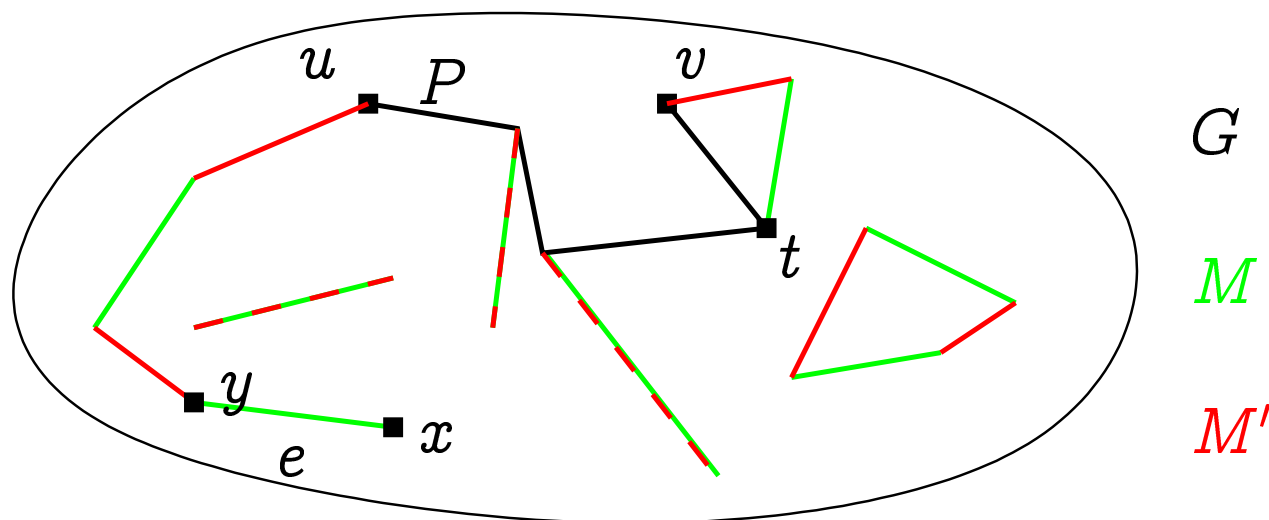
- $M$  ei kata  $u$ -d ega  $v$ -d, katab  $t$ .
- $M'$  ei kata  $t$ -d, katab  $u$  ja  $v$ .

Peab leiduma veel mingi tipp  $x$ , mille  $M$  katab, aga  $M'$  ei kata.



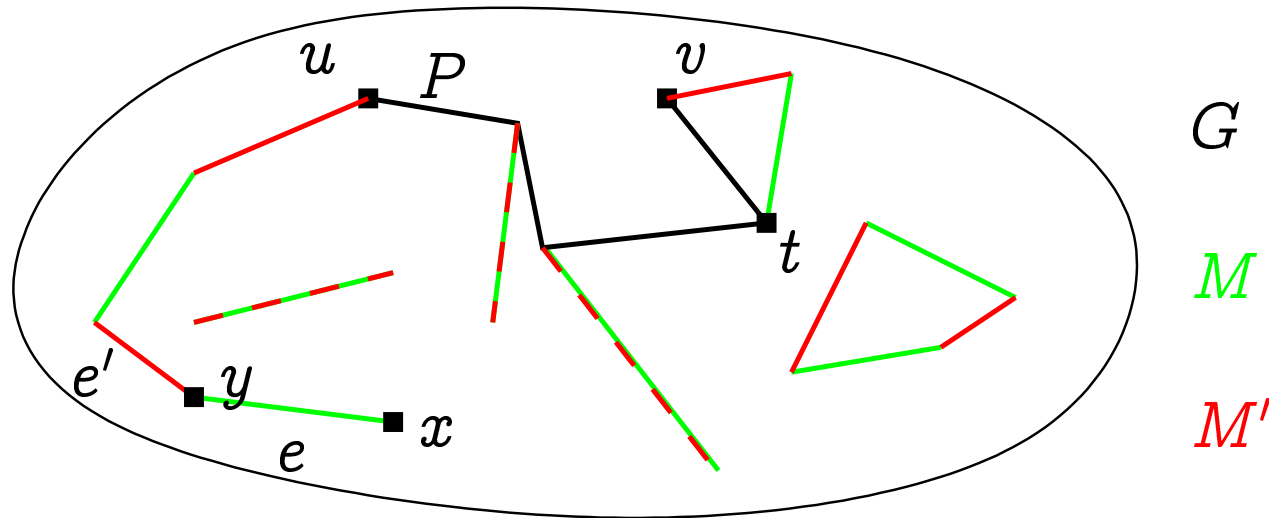
Olgu  $e \in M$  tipuga  $x$  intsidentne.

Olgu  $y$  serva  $e$  teine otstipp.



Siis  $M'$  katab  $y$ - $t$ , muidu oleks meil vastuolu  $M$ ,  $u$ ,  $v$  valikuga ( $d(u, v)$  minimaalne võimalik; oleks pidanud võtma hoopis  $M'$ ,  $x$ ,  $y$ ).

Olgu  $e' \in M'$  tipuga  $y$  intsidentne.



$M'' = M' \setminus \{e'\} \cup \{e\}$  on ka maksimaalne kooskõla, mis ei kata  $t$ -d.

$|M \cap M''| = |M \cap M'| + 1$ . Vastuolu  $M'$  valikuga.

Oletus  $\nu(G) < (|V| - 1)/2$  viis vastuoluni.

Oleme näidanud, et  $\nu(G) = (|V| - 1)/2$ . Seega on  $|V|$  paaritu ja  $odd(G) = 1$ .

Otsitavaks hulgaks  $S$  võime võtta  $\emptyset$ . Siis

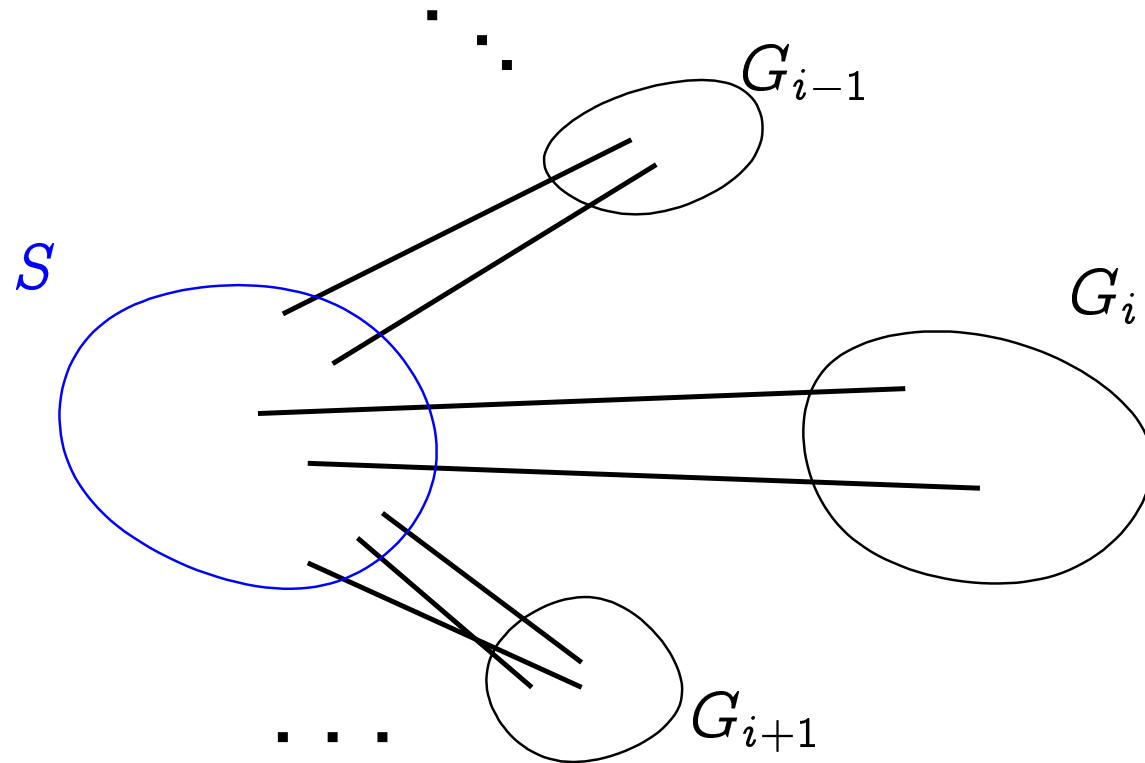
$$\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - 1) = \frac{1}{2}(|V| + |S| - odd(G \setminus S)) .$$

□

**Järeldus.** Suvalises sildadeta 3-regulaarses graafis leidub täielik kooskõla.

**Tõestus.** Näitame, et kui  $G = (V, E)$  on sildadeta 3-regulaarne graaf, siis iga  $S \subseteq V$  jaoks  $odd(G \setminus S) \leq |S|$ .

Olgu  $G_1, \dots, G_k$  graafi  $G \setminus S$  sidususkomponendid.



Iga  $G_i$  on  $S$ -ga ühendatud vähemalt kahe servaga, sest sildu ei ole.

Kui  $|V(G_i)|$  on paaritu, siis on servi, mille üks otstipp on  $G_i$ -s ja teine väljaspool, paaritu arv.

See järeldeb teoreemist, et graafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

$G_i$  kõigi tippude aste on paaritu. Seega peab  $G_i$ -st välja jäävate servaotste arv samuti paaritu olema.

Järelikult on paaritu arvu tippudega  $G_i$  ühendatud  $S$ -ga vähemalt kolme servaga.

Olgu  $d_i$  selliste servade arv, mille üks otstipp on  $S$ -s ja teine on  $G_i$ -s.

Olgu  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$  selliste indeksite hulk, et  $i \in I$  parajasti siis, kui  $|V(G_i)|$  on paaritu. Siis  $|I| = \text{odd}(G \setminus S)$ .

Siis

$$3 \cdot |S| = \sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{i=1}^k d_i \geq \sum_{i \in I} d_i \geq \sum_{i \in I} 3 = 3 \cdot \text{odd}(G \setminus S)$$

Seega  $|S| \geq \text{odd}(G \setminus S)$ , seda suvalise  $S \subseteq V$  jaoks. Tutte'i teoreemi järgi leidub graafis täielik kooskõla.  $\square$