Graafid, 1. kontrolltöö

17. oktoober 2002

Lahendused

1. ülesanne

Piisab, kui näitame, et graaf $G' = (V, E \backslash \{e_1, e_3\})$ on sidus. Tõepoolest, graafis G' on

$$\begin{aligned}
\deg_{G'}(v_1) &= \deg_G(v_1) - 1 \\
\deg_{G'}(v_2) &= \deg_G(v_2) - 2 \\
\deg_{G'}(v_3) &= \deg_G(v_3) - 1 \\
\deg_{G'}(v) &= \deg_G(v) && \text{kui } v \notin \{v_1, v_2, v_3\}.
\end{aligned}$$

Seega on G', juhul kui ta on sidus, pool-Euleri graaf. Kui G' on sidus, siis leidub temas kõiki servi täpselt ühel korral läbiv ahel P, mille otspunktideks on tema paarituarvuliste astmetega tipud — tipud v_1 ja v_3. Ahel $v_1 \overset{e_1}{—} v_2 \overset{e_3}{—} v_3 \overset{P}{\rightsquigarrow} v_1$ oleks siis Euleri ahel graafis G.

Veendume selles, et G' on sidus. Kui me graafist G eemaldame serva e_1, siis ei muutu graaf mittesidusaks, sest e_1 oli kordne serv ja tema otspunktid on endiselt ühendatud servaga e_2. Oletame, et kui me täiendavalt eemaldame serva e_3 (ja saame graafi G'), siis muutub graaf mittesidusaks. Sel juhul tekib kaks sidususkomponenti, tähistame neid G_1 ja G_2. Seejuures peavad tipud v_2 ja v_3 kuuluma erinevatesse sidususkomponentidesse, kuna eemaldatud serv oli nende kahe tipu vahel. Üldsust kitsendamata loeme, et v_2 kuulub komponenti G_1 ja v_3 kuulub komponenti G_2.

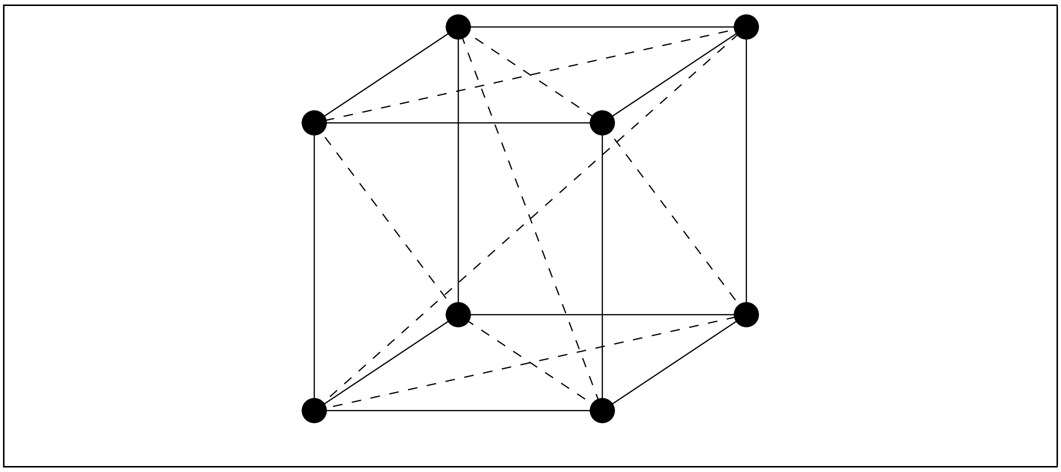
Graafis G' on kaks paarituarvulise astmega tippu — v_1 ja v_3. Kuna ka igas graafi G' sidususkomponendis peab leiduma paarisarv paarituarvulise astmega tippu, siis kuulub v_1 sidususkomponenti G_2 — samasse komponenti kui v_3.

Teisest küljest on tipud v_1 ja v_2 omavahel servaga seotud, järelikult peab v_1 kuuluma komponenti G_1 — samasse komponenti kui v_2. Oleme jõudnud vastuoluni. Seega on G' sidus.

2. ülesanne

Esimene lahendus. Induktsioon üle n.

Baas. $n = 3$. Joonisel 1 on kujutatud graaf Q_3 (pidevad jooned) ning



Joonis 1: Hamiltoni tsükkel graafis $\overline{Q_3}$

tsükkel, mis läbib kõik tema tipud täpselt üks kord, ning ei kasuta seejuures Q_3 servi (katkendjoon). See tsükkel on Hamiltoni tsükkel graafis $\overline{Q_3}$.

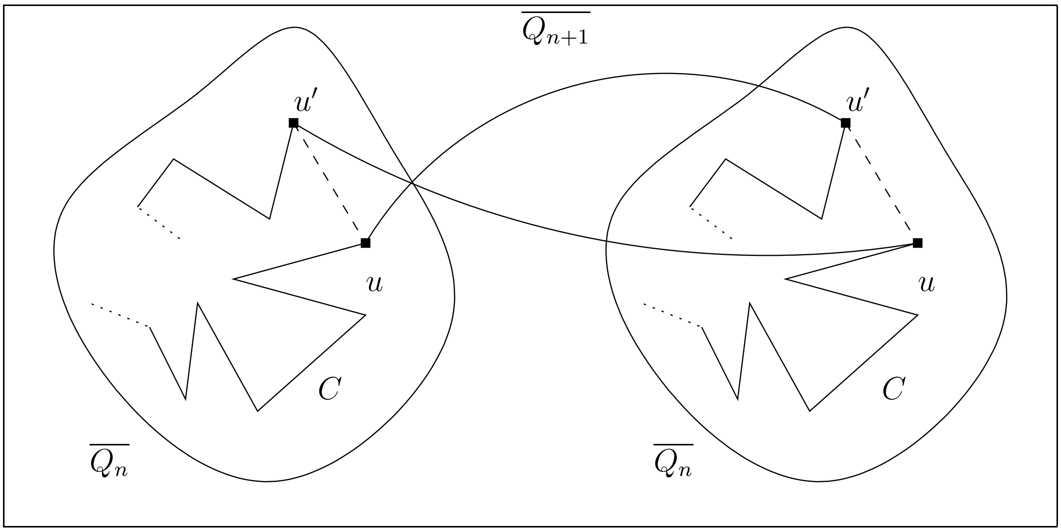
Samm. Oletame, et $\overline{Q_n}$ (kus $n \geq 3$) on Hamiltoni graaf. Näitame, et siis on ka $\overline{Q_{n+1}}$ Hamiltoni graaf.

Graaf $\overline{Q_{n+1}}$ koosneb järgmistest osadest:

- Kahest graafi $\overline{Q_n}$ eksemplarist. Tähistame neid eksemplare $Q^{(0)}$ ja $Q^{(1)}$.
- Täiendavatest servadest $Q^{(0)}$ ja $Q^{(1)}$ vahel. Tipud v_0 poolest $Q^{(0)}$ ja v_1 poolest $Q^{(1)}$ on omavahel servaga ühendatud parajasti siis, kui nad on erinevad tipud graafis $\overline{Q_n}$.

Olgu C Hamiltoni tsükkel graafis $\overline{Q_n}$. Olgu u, u' graafi $\overline{Q_n}$ mingid tipud, nii et tsüklis C järgneb tipule u tipp u'. Hamiltoni tsükli graafis $\overline{Q_{n+1}}$ saame järgmisel viisil (vaata joonist 2):

1. Läbime tsüklit C pooles $Q^{(0)}$, kuni jõuame tipuni u.
2. Läbime serva, mis ühendab tippu u pooles $Q^{(0)}$ ja tippu u' pooles $Q^{(1)}$.
3. Läbime tsükli C pooles $Q^{(1)}$, kuni jõuame tagasi tipuni u (s.t. läbime terve tsükli, välja arvatud tema viimase serva).
4. Läbime serva, mis ühendab tippu u pooles $Q^{(1)}$ ja tippu u' pooles $Q^{(0)}$.
5. Läbime ülejäänud osa tsüklist C pooles $Q^{(0)}$.



Joonis 2: Hamiltoni tsükkel graafis $\overline{Q_{n+1}}$

Teine lahendus. Graafis Q_n on 2^n tippu ja iga tipu aste on n. Graafis $\overline{Q_n}$ on seega iga tipu aste $2^n - n - 1$.

Dirac'i teoreem väidab, et kui lihtgraafis on iga tipu aste vähemalt pool tippude arvust selles graafis, siis on selles graafis Hamiltoni tsükkel. Kui $n \geq 3$, siis on $2^n - n - 1$ suurem või võrdne kui 2^{n-1} (pool tippude arvust graafis $\overline{Q_n}$). Tõepoolest, see väide on samaväärne väitega $n + 1 \leq 2^{n-1}$. Kui $n = 3$, siis kehtib võrdus, n-i kasvades kasvab vasak pool aeglasemalt kui parem pool. Seega on Dirac'i teoreemi eeldus täidetud ja $\overline{Q_n}$ on Hamiltoni.

3. ülesanne

Suund $\Rightarrow$. Olgu G puu ning olgu $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ tema mingid sidusad alamgraafid, nii et $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Olgu $u, v \in V_1 \cap V_2$, näitame, et graafis $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ leidub lihtahel tipust u tippu v.

Kuna G on puu, siis leidub graafis G täpselt üks lihtahel P tipust u tippu v. Kuna $u, v \in V_1$ ja G_1 on sidus, siis peab ka graafis G_1 leiduma mingi lihtahel tipust u tippu v. Selleks lihtahelaks peab olema seesama P. Samuti peab ka graaf G_2 sisaldama ahelat P, kuna $u, v \in V_2$ ja G_2 on sidus. Kuna ahelasse P kuuluvad servad kuuluvad kõik nii hulka E_1 kui ka hulka E_2, siis kuuluvad nad ka hulka $E_1 \cap E_2$. Seega kuulub ahel P ka graafi $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

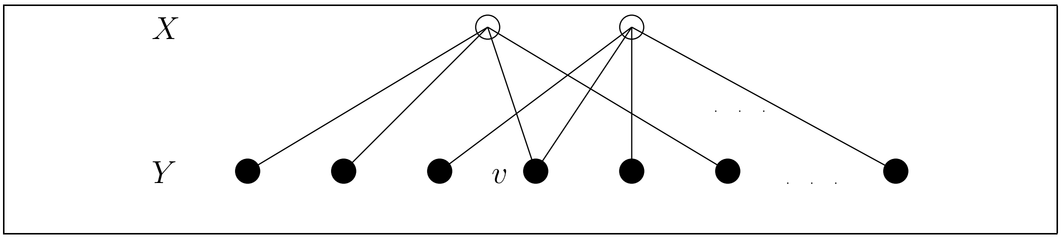
Suund $\Leftarrow$. Oletame vastuväiteliselt, et G ei ole puu, s.t. graafis G leidub mingi tsükkel C. Kuna G-s silmuseid ei ole, siis on C pikkus vähemalt kaks.

Olgu $u, v \in V$ kaks tsüklil C asuvat tippu. Olgu P_1 ja P_2 kaks lihtahelat tipust u tippu v, nii et tsükkel C on nende lihtahelate ühend.

Graafiks G_1 võtame ahela P_1 ja graafiks G_2 ahela P_2. Sel juhul on graafidel G_1 ja G_2 kaks ühist tippu — tipud u ja v, aga mitte ühtegi ühist serva. Järelikult on $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ võrdne 2-tipulise nullgraafiga, seega pole ta sidus.

4. ülesanne

Tähistagu X graafi $K_{2,n}$ seda alust, kus on 2 tippu, ning Y seda alust, kus on n tippu. Graafi $K_{2,n}$ suvalisel aluspuul on järgmine kuju (vaata joonist 3):



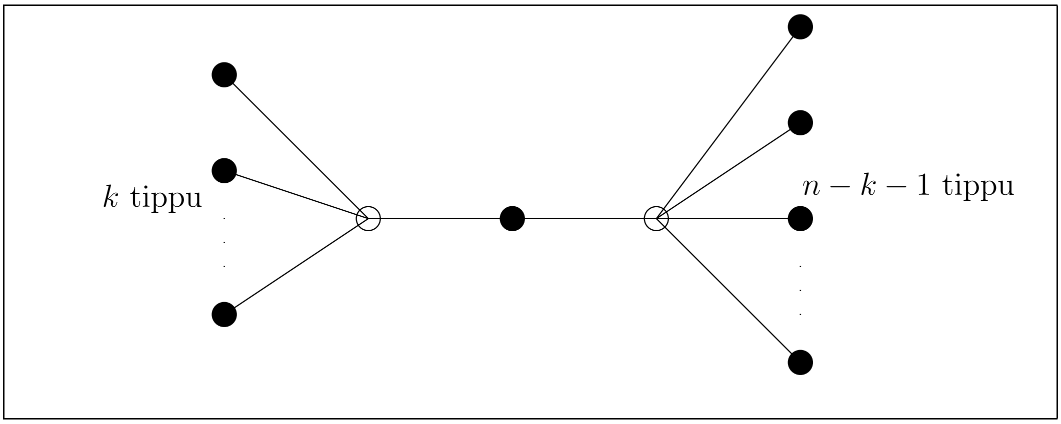
Joonis 3: $K_{2,n}$ aluspuu kuju

- Aluses Y leidub üks tipp v, mis on ühendatud aluse X mõlema tipuga.
- Aluse X ülejäänud tipud on igaüks ühendatud täpselt ühe tipuga alusest X.

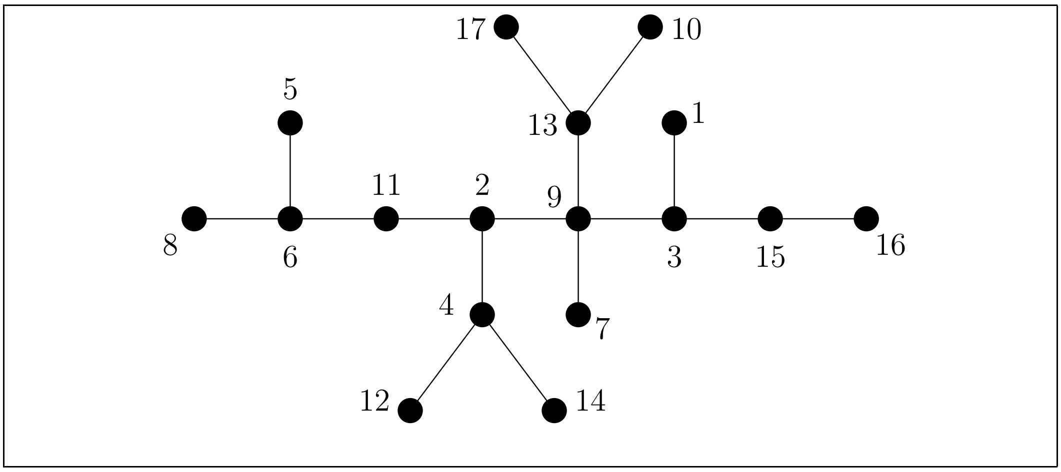
Siit saame, et graafi $K_{2,n}$ aluspuud esituvad kõik joonisel 4 toodud kujul. Suurus k võib seejuures võtta väärtusi 0-st $(n-1)$-ni, s.t. tal võib olla n erinevat väärtust. Kuna aga toodud puu vasak- ja parempoolne ots on samaväärsed, siis on k-d 0-st $(n-1)$-ni muutuda lastes saadud puud paarikaupa isomorfsed (välja arvatud siis, kui puu mõlemas otsas on sama palju tippe). Mitteisomorfseid puid on poole vähem, nimelt $\lceil n/2 \rceil$.

5. ülesanne

(a)-osa. $(8, 13, 8, 12, 14, 7, 1, 10, 1, 2, 10, 2, 16, 16)$.
(b)-osa. Vaata joonist 5.



Joonis 4: $K_{2,n}$ aluspuude kuju



Joonis 5: Märgendatud puu — ülesande 5(b) lahendus