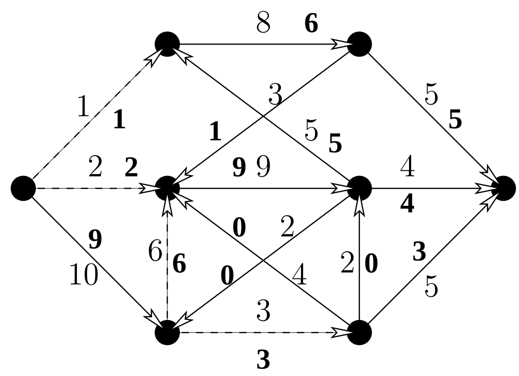
Graafid, 2. kontrolltöö

19. detsember 2002

Lahendused

1. ülesanne

Allpool on kujutatud selle võrgu üht voogu (rasvase kirjaga), mille väärtus on 12. Kui ma hakkame selle voo järgi suurendavat teed leidma, tehes seda vastavalt Ford-Fulkersoni teoreemi loengus esitatud tõestusele, s.t. leides hulgad V_s ja V_t, siis saame, et hulka V_s kuuluvad ainult lähtetipp ja vasak alumine tipp. Lõike, mille moodustavad kõik kaared, mille algtipp on hulgas V_s ja lõpptipp ei ole (need kaared on joonistatud katkendjoonega), on samuti 12. Seega on toodud voog maksimaalne ja lõige minimaalne.



2. ülesanne

Esimene mustkunstnik, andes teisele üksteise järel neli kaarti, realiseerib meil mingi funktsiooni φ,

- mille argumentideks on teatava 52-elemendilise hulga viieelemendilised alamhulgad;
- mille väärtusteks on sellesama hulga elementide nelikud, kus sama element ei esine kaks korda;
- mis rahuldab järgmist tingimust: kui $\varphi(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, siis $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Teine mustkunstnik, arvates ära viienda kaardi, arvab tegelikult ära kogu viieelemendilise kaartide hulga, sest ülejäänud nelja kaarti ta juba näeb. Seega peab selleks, et äraarvamine alati õnnestuks, funktsioon φ olema üksühene. Meil tuleb näidata, et selline φ leidub.

Vaatame kahealuselist graafi $G = (X \cup Y, E)$, mille alused X ja Y on defineeritud järgmisel viisil:

- hulga X elementideks on kõik 5-elemendilised kaartide hulgad;
- hulga Y elementideks on kõik kaartide nelikud, kus sama kaart kaks korda ei esine.

Peale selle olgu $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \in X$ ja $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y$ ühendatud servaga parajasti siis, kui $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

Soovitud omadustega φ leidub parajasti siis, kui graafis G leidub vastavus M, nii et iga $x \in X$ jaoks kehtib $\deg_M(x) = 1$.

Vastavalt Halli abieluteoreemile leidub selline vastavus parajasti siis, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|S| \leqslant |N(S)|$. Veendumaks, et viimane võrratus kehtib, uurime kõigepealt, milline on tippude aste aluses X ja aluses Y.

- Kui $x \in X$, siis $\deg(x) = 120$. Tõepoolest, 5-elemendilisest hulgast on üksteise järel neli kaarti välja valimiseks $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ erinevat võimalust.
- Kui $y \in Y$, siis $\deg(y) = 48$. Tõepoolest, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ on ühendatud kõigi hulkadega kujul $\{y_1, y_2, y_3, y_4, z\}$. Kuna meil on 52 kaarti, siis on z-i valimiseks 48 erinevat võimalust.

Igas graafis kehtib võrratus

$$\sum_{v \in S} \deg(v) \leqslant \sum_{w \in N(S)} \deg(w),$$

kus S on tipuhulga mingi alamhulk. Tõepoolest, vasakpoolne summa loeb ära kõik servad, mis on intsidentsed mõne hulka S kuuluvad tipuga. Kõik sellised servad on ka intsidentsed mõne hulka $N(S)$ kuuluva tipuga (vastavalt $N(S)$ definitsioonile). Parempoolne summa loeb ära kõik tipud, mis on intsidentsed mõne hulka $N(S)$ kuuluva tipuga.

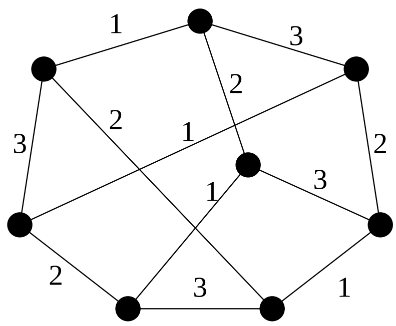
Meid siin ülesandes huvitavate hulkade S korral on kõigi hulka S kuuluvate tippude astmed võrdsed 120-ga ja kõigi hulka $N(S)$ kuuluvate tippude astmed võrdsed 48-ga. Seega annab see võrratus meile

$$120 \cdot |S| \leqslant 48 \cdot |N(S)| \quad \Longrightarrow \quad |S| \leqslant \frac{48}{120}|N(S)| \leqslant |N(S)| \ .$$

Järelikult leidub soovitud omadusega vastavus M ja funktsioon φ.

3. ülesanne

Vastus: 3. Graafi G servade üks värvimisviis kolme värviga on toodud allpool ning väiksem ei saa $\chi'(G)$ olla, sest $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$.



4. ülesanne

Ülesande tingimused annavad meile

1. $n + f - m = k + 1 \geqslant 2$ (siin k on G sidususkomponentide arv);
2. $f \leqslant 11$;
3. $m \geqslant \frac{3}{2}n$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub neid tingimusi rahuldav graaf, mille kõigil tahkudel on vähemalt viis serva. Siis kehtib veel

4. $m \geqslant \frac{5}{2}f$.

Ülesande lahendamiseks piisab, kui näitame, et need neli võrratust on vastuolulised. Toome järgnevalt kaks võimalikku viisi nendest võrratustest vastuolu tuletamiseks.

1. viis. Esimesest, kolmandast ja neljandast võrratusest saame

$$2 \leqslant n + f - m \leqslant \frac{2}{3}m + \frac{2}{5}m - m = \frac{1}{15}m$$

ja seega $m \geqslant 30$.

Esimene ja teine võrratus annavad meile

$$n \geqslant m - f + 2 \geqslant m - 11 + 2 = m - 9$$

ning see koos kolmanda võrratusega annab

$$m \geqslant \frac{3}{2}n \geqslant \frac{3}{2} \cdot (m - 9) = \frac{3}{2}m - \frac{27}{2} \ .$$

Siit järeldub $m \leqslant 27$. Vastuolu.

2. viis. Esimene ja kolmas võrratus annavad meile

$$\frac{2}{3}m \geqslant n \geqslant m - f + 2,$$

millest saame

$$m \leqslant 3f - 6 \ .$$

Kombineerides seda neljanda võrratusega, saame

$$\frac{5}{2}f \leqslant m \leqslant 3f - 6 \quad \Longrightarrow \quad f \geqslant 12,$$

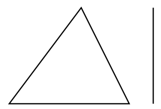
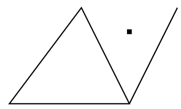
mis on vastuolus teise võrratusega.

5. ülesanne

Graafil G, millel on selline kromaatiline polünoom, peab olema

- 5 tippu (sest meil on 5. astme polünoom);
- 4 serva (sest k^{n-1} (kus n on polünoomi aste) kordaja on -4);
- 2 sidususkomponenti (sest k^2 on viimane liige, mille kordaja erineb nullist.

Uurime veel, kas G on värvitav kahe värviga. Kuna $2^5 - 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 = 0$, siis pole G-l ühtegi värvimisviisi kahe värviga, seega pole G kahealuseline ja seega leidub G-s paarituarvulise pikkusega tsükleid. Kuna G-s on kõigest 5 tippu ja kõik tipud ei ole samas sidususkomponendis, siis peab G-s leiduma tsükkel pikkusega 3. Lihtgraafe, mis kõiki eeltoodud tingimusi rahuldavad, on kõigest kaks tükki:

 ja 

Leiame nende graafide kromaatilised polünoomid.

Vasakpoolse graafi kromaatiline polünoom on

$$\mathrm{P}_{K_3}(k) \cdot \mathrm{P}_{K_2}(k) = k(k-1)(k-2) \cdot k(k-1) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - 2k^2,$$

seega ta sobib.

Parempoolse graafi kromaatiline polünoom on (valime siin ärajäetavaks / kokkutõmmatavaks servaks joonisel kõige parempoolsema serva)

$$\mathrm{P}_{\triangle:}(k) - \mathrm{P}_{\triangle.}(k) = k \cdot k \cdot k(k-1)(k-2) - k \cdot k(k-1)(k-2) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - 2k^2,$$

seega sobib ka tema.