Graafid

(MTAT.05.069, 3 AP)

Loengud:	N 10:15–12:00, ruum 111	Peeter Laud (peeter_l@ut.ee)
Praktikumid:	R 12:15–14:00, ruum 403	Peeter Laud
	E 8:15–10:00, ruum 402	Meelis Kull (meelisk@ut.ee)
	T 10:15–12:00, ruum 402	Jan Willemson (jan@ut.ee)
	neljas rühm, kui vaja	Meelis Kull

koduleht: `http://www.ut.ee/~peeter_l/graafid02s`
(sisaldab loengumaterjale)

Hinde saamiseks: 2 kontrolltööd **või** eksam.

(Mittesuunatud) graaf on objekt G, millel on järgmised osad:

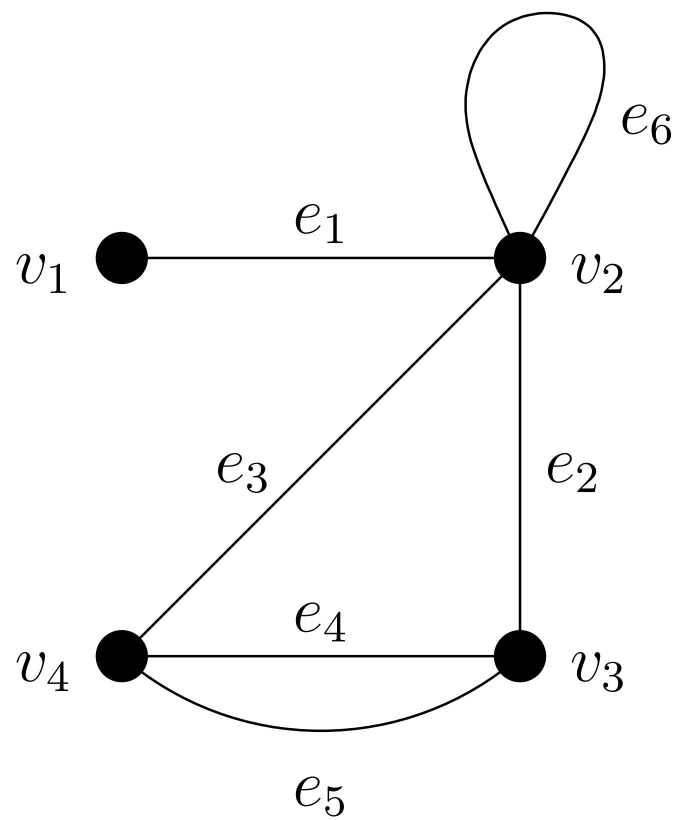
- Tippude hulk V (tähistame ka $V(G)$).
- Servade hulk E (tähistame ka $E(G)$).
- Intsidentsusfunktsioon $\mathcal{E} : E \longrightarrow \mathcal{P}(V)$, nii et iga $e \in E$ jaoks on $\mathcal{E}(e)$ kas 1- või 2-elemendiline.

Kui $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, siis tippe v_1 ja v_2 nimetatakse serva e *otstippudeks*. Tähistame ka $v_1 \overset{e}{\text{---}} v_2$.

Käesolevas kursuses vaatleme üldiselt graafe, kus V ja E on lõplikud hulgad.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ning

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$
e_5	$\{v_3, v_4\}$
e_6	$\{v_2\}$



Graafi võib esitada joonisena.

Joonised on (ainult) illustratsiooniks.

Käesolevas kursuse mõistame graafi all kombinatoorset objekti $(V, E, \mathcal{E})$.

• *Suunatud graaf* koosneb tipuhulgast V, servahulgast E ja intsidentsusfunktsioonist $\mathcal{E} : E \longrightarrow V \times V$.
Suunatud graafi servi nimetatakse ka *kaarteks*.

• *Lihtgraaf* on graaf ilma kordsete servade ja silmusteta.
$e \in E$ on *kordne serv*, kui leidub serv $e' \in E \setminus \{e\}$, nii et $\mathcal{E}(e) = \mathcal{E}(e')$.
$e \in E$ on *silmus*, kui $|\mathcal{E}(e)| = 1$.

• Suunatud lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$.
Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = (v_1, v_2)$, vastab $(v_1, v_2) \in V \times V$.

• Ka suunamata lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$.
Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, vastab $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq V \times V$.

• Kui V on mingi hulk ja ρ on mingi binaarne relatsioon sellel, nii et $\neg(x \ \rho \ x)$ iga $x \in V$ jaoks, siis defineerib ρ lihtgraafi tipuhulgaga V ja servahulgaga

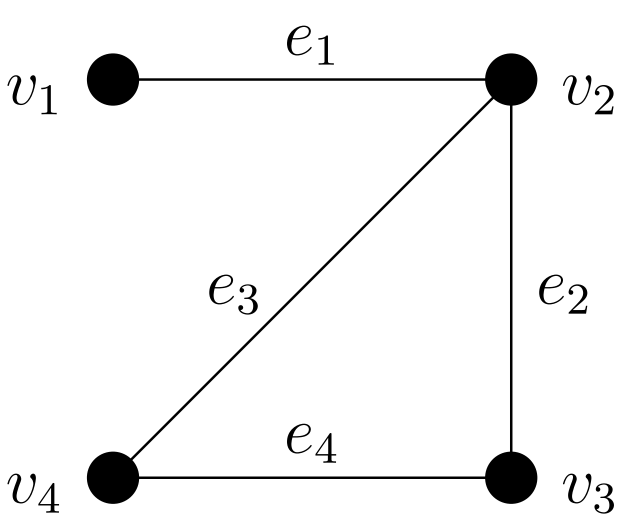
$$E = \{(x, y) \mid x, y \in V, x \ \rho \ y\} \ .$$

Olgu $G = (V, E)$ mittesuunatud lihtgraaf. Olgu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Graafi G *naabrusmaatriks* on $n \times n$ maatriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, kus

- Kui $(v_i, v_j) \in E$, siis $a_{ij} = 1$. Sel juhul on v_i ja v_j *naabrid*.
- Kui $(v_i, v_j) \notin E$, siis $a_{ij} = 0$.

Naabrusmaatriks on sümmeetriline ja tema peadiagonaalil on nullid.

Näide:



	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0

Tipu $v \in V$ naabrite arvu nimetatakse v *astmeks* ehk *valentsiks*. Tähistatakse $\deg(v)$.

Teoreem. Mittesuunatud lihtgraafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

Tõestus. Loeme, mitu ühte on $G = (V, E)$ naabrusmaatriksis.

- Neid on $2 \cdot |E|$.
- Neid on $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

Need kaks suurust on võrdsed. Järelikult on kõigi tippude astmete summa paarisarv. Täisarvude summa on paarisarv parajasti siis, kui paarisarv liidetavaid on paaritud. $\square$

- *Tee* ehk *ahel* graafis $G = (V, E)$ (tipust x tipuni y) on jada

$$P : x = x_0 \overset{e_1}{\text{---}} x_1 \overset{e_2}{\text{---}} x_2 \overset{e_3}{\text{---}} x_3 \overset{e_4}{\text{---}} \dots x_{k-1} \overset{e_k}{\text{---}} x_k = y \ .$$

- Arvu k nimetatakse tee P pikkuseks ja tähistatakse $|P|$.

- Seda, et P on tee tipust x tipuni y, tähistame $x \overset{P}{\rightsquigarrow} y$.

- Teed, kus tipud on kõik erinevad (erandina võivad x_0 ja x_k võrdsed olla), nimetame *lihtteeks*.

- Teed, kus $x_0 = x_k$, nimetame *kinniseks* teeks.

- Kinnist lihtteed nimetame *tsükliks*.

- Graaf on *sidus*, kui tema iga kahe tipu vahel leidub tee.

- *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude $u, v \in V$ vahel nimetatakse neid ühendava lühima lihtahela pikkust.

Teoreem. Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

Tõestus. Silmus on tsükkel. Kordsed servad annavad tsükli (pikkusega 2).

Eeldame, et $G = (V, E)$ on lihtgraaf. Olgu $v_1 \in V$. Leidub $v_2 \in V$ nii, et $v_1 — v_2$. Leidub $v_3 \in V$ nii, et $v_1 — v_2 — v_3$. See on lihtahel.

Olgu meil lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k$. Leidub $v_{k+1} \in V$ nii, et $v_{k+1} \neq v_{k-1}$ ja $v_k — v_{k+1}$.

Kui $v_{k+1} = v_i$ mõne $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ jaoks, siis on meil tsükkel.

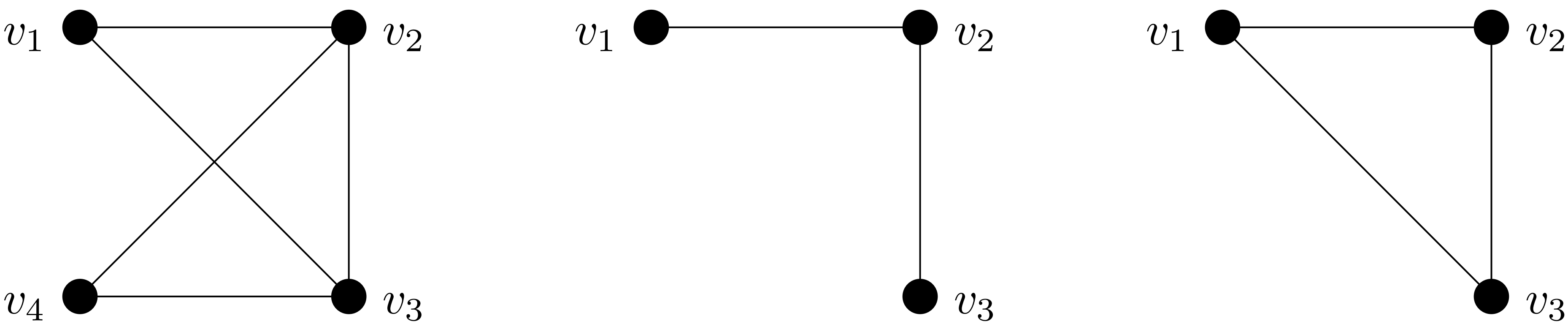
Vastasel juhul on meil pikem lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k — v_{k+1}$.

Lihtahela pikkus on piiratud hulga V võimsusega. $\square$

Graafi $G = (V, E)$ *alamgraafiks* nimetame graafi $G' = (V', E')$, kus $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ ja iga $e \in E'$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V'$.

Alamgraafi (V', E') nimetame *indutseerituks* (hulga V' poolt), kui hulk E' on suurim võimalik, s.t. iga $e \in E$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V' \Rightarrow e \in E'$.

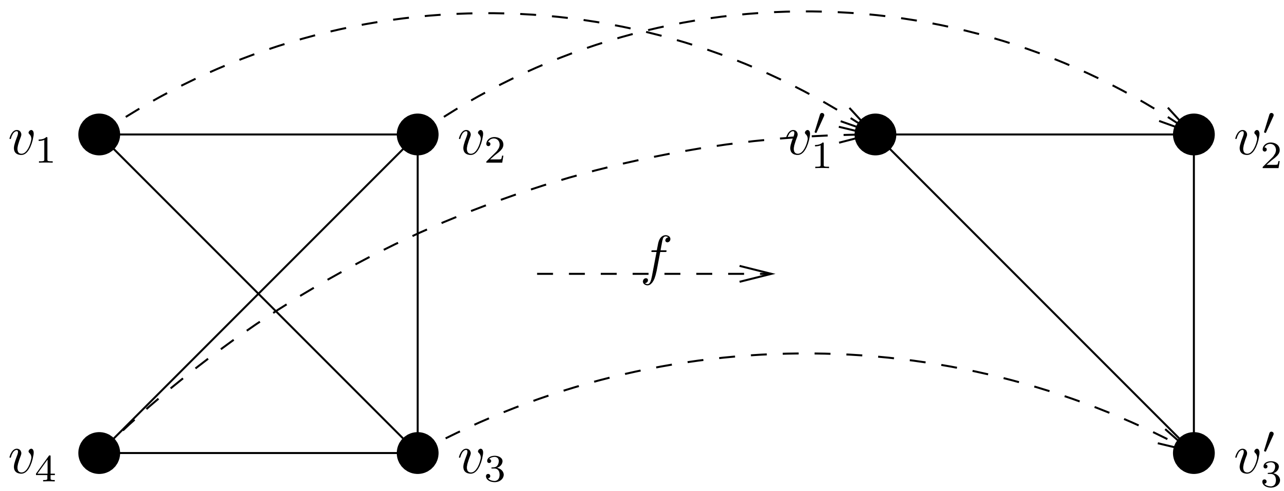
Näide:



Graafi G *sidususkomponentideks* nimetatakse tema maksimaalseid sidusaid alamgraafe.

Homomorfism graafist $G_1 = (V_1, E_1)$ graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ on kujutus $f : V_1 \longrightarrow V_2$, nii et tipud $x, y \in V_1$ on naabrid parajasti siis, kui tipud $f(x), f(y) \in V_2$ on naabrid.

Näide:



Lause. Homomorfismide kompositsioon on homomorfism.

Homomorfism f on *monomorfism*, kui ta on üksühene.

Homomorfism f on *isomorfism*, kui ta on bijektsioon.

Graafid G_1 ja G_2 on *isomorfsed* (tähist. $G_1 \cong G_2$), kui nende vahel leidub isomorfism.

- *Nullgraafiks* nimetatakse graafi, milles pole servi. n-tipulist nullgraafi tähistame O_n või N_n.

- *Täisgraafiks* nimetatakse graafi, kus iga kahe erineva tipu vahel on üks serv. n-tipulist täisgraafi tähistame K_n.

Lause. Graafis K_n on $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.

- Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline*, kui V on tükeldatav kaheks hulgaks (aluseks) V_1 ja V_2 (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nii, et ühegi serva mõlemad otstipud ei kuulu samasse alusesse.

Kui ρ on relatsioon hulkade X ja Y (kus $X \cap Y = \emptyset$) vahel, siis lihtgraaf tipuhulgaga $V = X \cup Y$ ja servahulgaga

$$E = \{(x, y), (y, x) \mid x \in X, y \in Y, x \; \rho \; y\}$$

on kahealuseline graaf alustega X ja Y.

• Kahealuseline lihtgraaf alustega V_1 ja V_2 on *täielik kahealuseline*, kui iga $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ vahel leidub serv. Täielikku kahealuselist graafi, kus $|V_1| = m$ ja $|V_2| = n$, tähistame $K_{m,n}$.

Lause. Graafis $K_{m,n}$ on mn serva.

Teoreem. Graaf on kahealuseline $\Leftrightarrow$ kõik tema tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Tõestus $\Rightarrow$. Tsüklis on mingi arv samme esimesest alusest teise ja samapalju samme teisest alusest esimesse.

Tõestus $\Leftarrow$. Eeldame, et graaf $G = (V, E)$ on sidus. Vastasel korral viime järgneva operatsiooni läbi iga sidususkomponendiga.

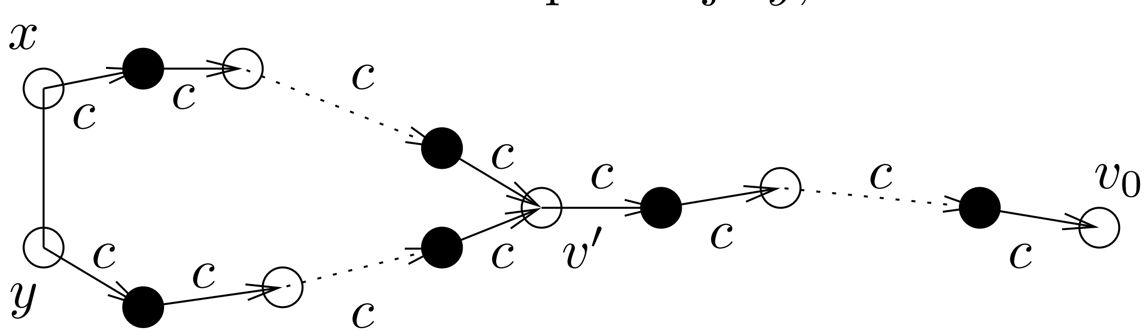
Järgnevas värvime me graafi G tippe mustaks ja valgeks.

Valime mingi tipu $v_0 \in V$ ja värvime ta valgeks.

Olgu u mingi värvitud tipp, millel on värvimata naabreid. Olgu v üks tema värvimata naabertippudest. Värvime v teist värvi, kui u. Jätame meelde, et v-d värvides lähtusime u värvist. Tähistame $v \xrightarrow{c} u$.

Kordame eelmist lõiku, kuni tekivad naabertipud x ja y, mis on värvitud sama värviga, või kuni tipud otsa saavad.

Kui tekivad sellised tipud x ja y, siis



on meil paarituarvulise pikkusega tsükkel $x - \cdots - v' - \cdots - y - x$.

Vastasel juhul moodustavad mustad tipud ühe aluse ja valged teise. $\square$

Tartu Akadeemiline Meeskoor võtab vastu uusi lauljaid.

Proovid toimuvad E 18:30 ja K 18:30 Marksu majas (Ülikooli 16), teisel korrusel.

Eriti oodatud on tenorid.