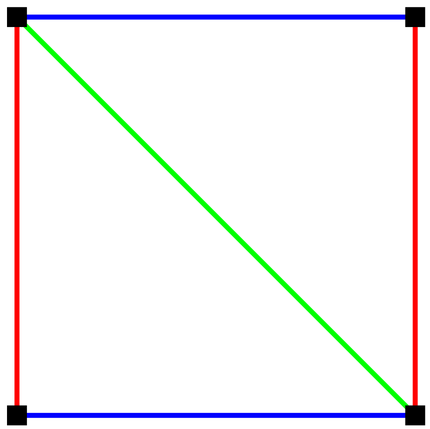
Servade värvimine

14. november 2002

Silmusteta graafi $G = (V, E)$ *servade (korrektne) värvimisviis k värviga* on mingi funktsioon $c : E \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, nii et

- suvalise kahe erineva serva $e_1, e_2 \in E$ jaoks, millel on ühine otspunkt, kehtib $c(e_1) \neq c(e_2)$.

Teisisõnu, suvalise tipu jaoks on selle tipuga intsidentsed servad kõik erinevat värvi.



Näide: olgu antud (kooli)klassidе hulk X ja õpetajate hulk Y.

Iga klassi ja iga õpetaja jaoks olgu antud, mitu tundi nädalas see õpetaja sellele klassile andma peab.

Ülesanne: koostada tunniplaan.

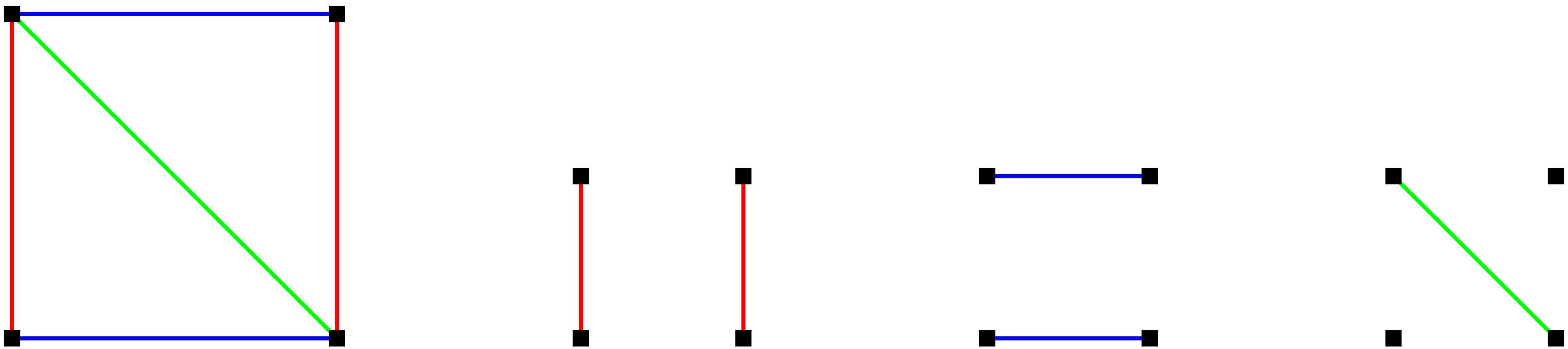
Vaatame graafi, mille tipuhulk on $X \cup Y$ ning kus $x \in X$ ja $y \in Y$ on ühendatud nii mitme servaga, kui mitu tundi nädalas õpetaja y klassile x annab.

Tunniplaan on selle graafi servade värvimisviis (ja vastupidi). Värvideks on tundide toimumise ajad.

Olgu $G = (V, E)$ graaf, c tema servade mingi värvimisviis ning i üks värvidest.

Servade hulk $\{e \mid e \in E, c(e) = i\}$ on vastavus.

Graafi servade värvimisviis kujutab endast servade hulga tükeldust vastavusteks.



Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Oletame, et tal leidub servade värvimisviis k värviga, aga ei leidu servade värvimisviisi $k-1$ värviga.

Arvu k nimetame G *kromaatiliseks arvuks servade järgi* ja tähistame $\chi'(G)$.

Tähistagu $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$ graafi G tippude max. astet.

On ilmne, et $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Näide, kus $\chi'(G) > \Delta(G)$: paarituarvulise pikkusega tsüklid.

Teoreem. Kahealuselises graafis G kehtib $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Tõestus. Kõigepealt täiendame G $\Delta(G)$-regulaarseks.

1. Kui ühes aluses on vähem tippe kui teises, siis lisame sinna tippe juurde.

2. Kui mõne tipu aste on väiksem kui $\Delta(G)$, siis leidub ka teises aluses mingi tipp, mille aste on väiksem kui $\Delta(G)$. Ühendame need kaks tippu servaga.

Kui muudetud graafi servad on värvitavad $\Delta(G)$ värviga, siis on seda ka esialgse graafi G servad.

Nüüd võime lugeda, et meil on mingi k-regulaarne kahealuseline graaf G.

1. k-regulaarses kahealuselises graafis G leidub mingi kooskõla M_1.
2. Eemaldame M_1-e kuuluvad servad. Järgi jääb mingi $(k-1)$-regulaarne kahealuseline graaf.
3. Selles graafis leidub mingi kooskõla M_2.
4. Eemaldame M_2-e kuuluvad servad. Järgi jääb mingi $(k-2)$-regulaarne kahealuseline graaf.
5. jne.

Sel viisil tükeldub G servade hulk k-ks vastavuseks (kooskõlaks) $M_1, \ldots, M_k$. Need defineerivadki G servade värvimisviisi. $\square$

Teoreem (Vizing). Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Siis $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

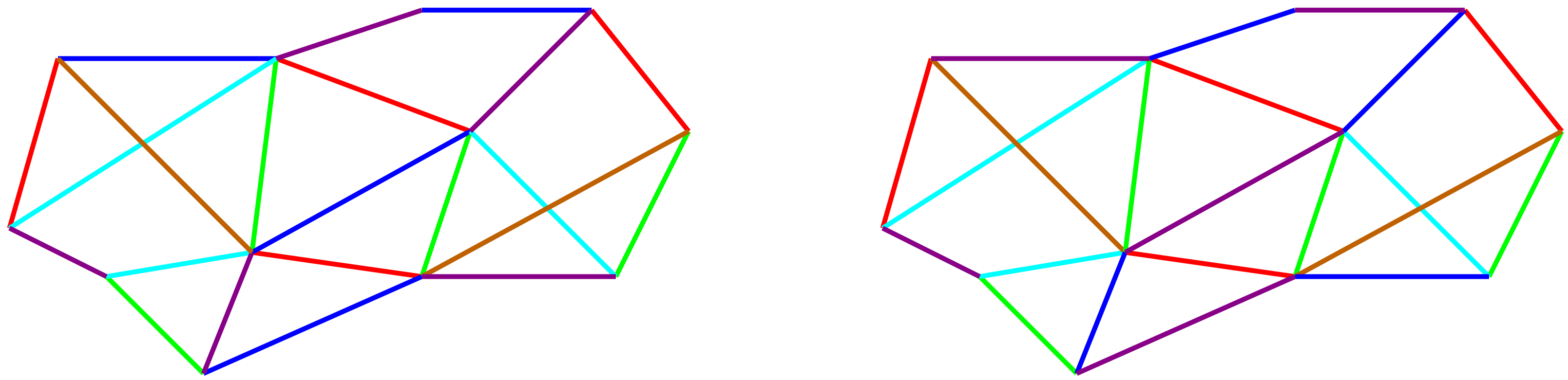
Tõestus käib induktsiooniga üle tippude arvu. Väide on ilmne, kui $|V| = 1$.

Meil tuleks näidata, et kehtib:

> Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja olgu $k = \Delta(G) + 1$. Olgu $v \in V$ graafi G mingi tipp ja olgu graafi $G \backslash v$ servad värvitavad k värviga. Siis on graafi G servad värvitavad k värviga.

Selle väite tõestame induktsiooniga üle värvide arvu k. Me näitame pisut tugevama väite kehtivust.

Lemma. Olgu $G = (V, E)$ graaf ja c tema servade mingi värvimisviis. Olgu $E' \subseteq E$ servade hulk, mis on värvitud mingi teatava kahe värviga. Vaatame graafi $G' = (V, E')$.

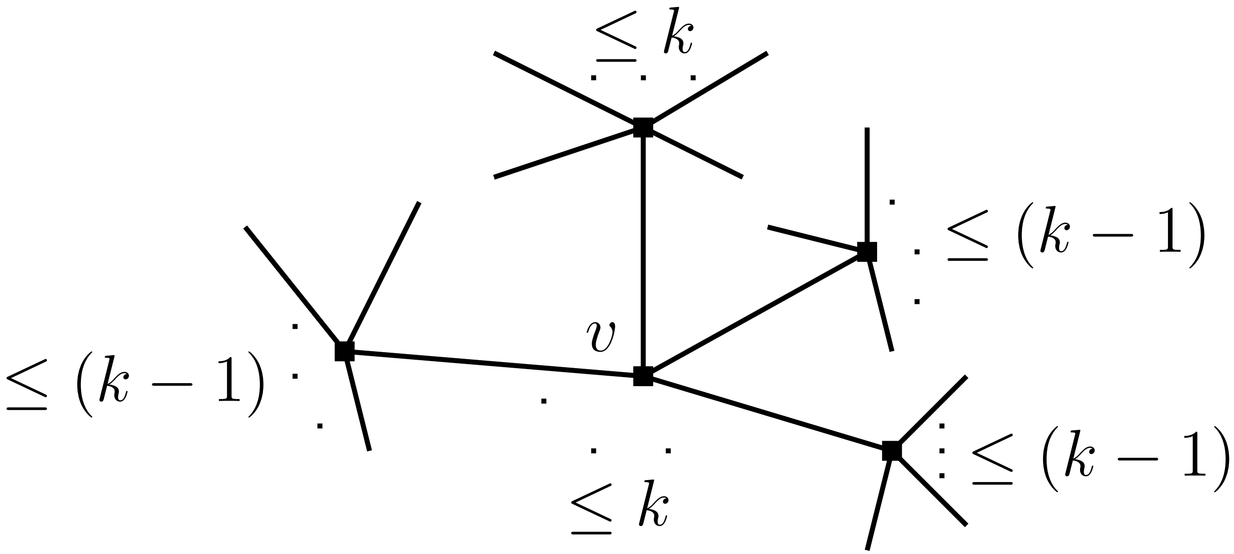


Olgu H graafi G' üks sidususkomponentidest. Kui me H-i servade värvid ära vahetame, siis on saadav värvimisviis ikkagi G servade korrektne värvimisviis.

Tõestus. Peaks vist ilmne olema.

Lemma. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja $k \in \mathbb{N}$. Olgu $v \in V$ selline, et

- $\deg(v) \leq k$. Kui $w \in V$ on v naaber, siis $\deg(w) \leq k$.
- Tipul v on ülimalt üks naabertipp, mille aste on täpselt k.



Olgu $G \backslash v$ servad värvitavad k värviga. Siis G servad on värvitavad k värviga.

Tõestus. *Baas.* $k = 1$.

Sel juhul $\deg(v) = 0$ või $\deg(v) = 1$.

Kui $\deg(v) = 0$, siis on graafis G samad servad, mis graafis $G \backslash v$.

Kui $\deg(v) = 1$, siis olgu u tipu v naaber. Vastavalt lemma eeldustele $\deg(u) \leq 1$, seega on u — v graafi G üks sidususkomponentidest.

G servade värvimisviisi saame $G \backslash v$ servade värvimisviisist nii, et värvime täiendavalt serva u ja v vahel ainsa värviga.

Samm. $k > 1$.

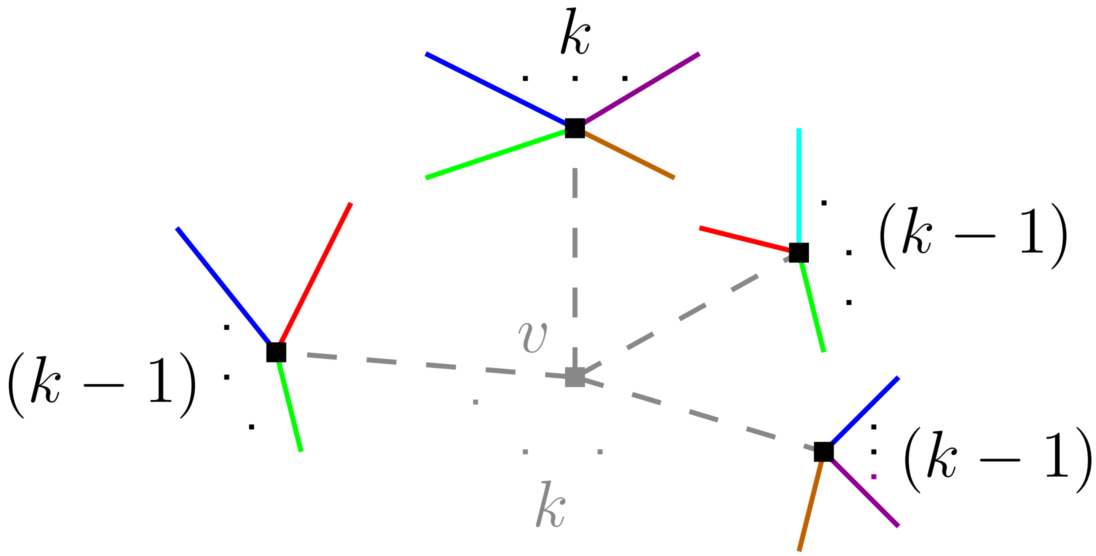
Seni kuni $\deg(v) < k$ lisame graafile G uue tipu u ning serva $u — v$.

Seni kuni v mõne naabri v' aste on väiksem kui k või $k-1$, lisame graafile G uue tipu u ja serva $u — v'$.

G-st saab seega graaf, kus lemma sõnastuses on võrratuste asemel võrdused.

Muudetud graaf on k värviga värvitav parajasti siis, kui esialgne graaf oli.

Olgu c graafi $G \backslash v$ servade värvimisviis k värviga.



Vaatame (endise) tipu v naabertippe. Iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ jaoks olgu X_i nende naabertippude hulk, millega ei ole intsidentseid servi, mis on värvitud i-ga.

Üks tippudest kuulub täpselt ühte hulkadest X_i, ülejäänud kuuluvad täpselt kahte. Seega $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2k - 1$.

Tahame, et c oleks selline, et leiduks i, nii et $|X_i| = 1$.

S.t. i-ga värvitud servad on iga v naabertipuga, v.a. ühega, intsidentsed.

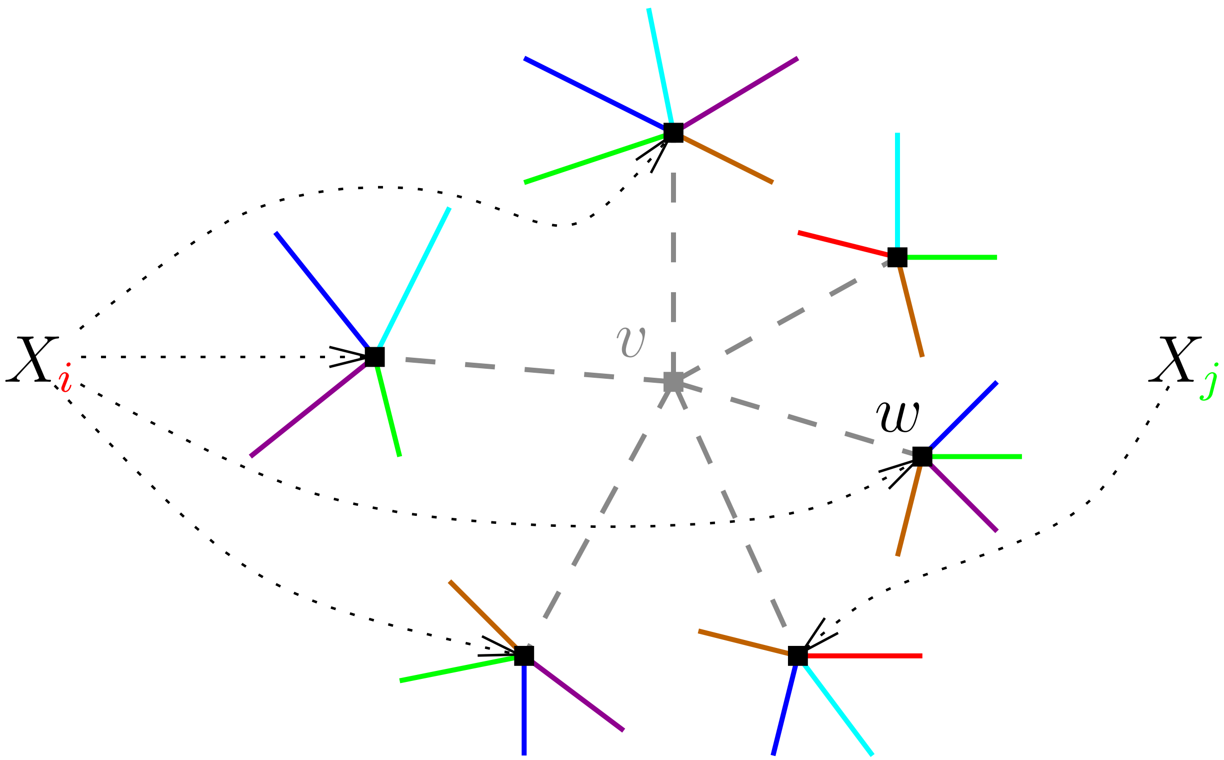
Näitame, et c on valitav nii, et iga $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ jaoks $\big||X_i| - |X_j|\big| \leq 2$.

Selleks näitame, et kui mõne i, j jaoks $|X_i| - |X_j| \geq 3$, siis leidub värvimisviis c', kus $|X_i|$ on ühe või kahe võrra väiksem ning $|X_j|$ samavõrra suurem.

Samuti näitame, et lõpliku arvu selliste sammude (c-st c'-ks) pärast selliseid i-d ja j-i enam ei leidu.

Olgu i ja j sellised, et $|X_i| - |X_j| \geq 3$. Olgu $w \in X_i \backslash X_j$.

S.t. tippe, millega on intsidentne serv värvi j, on vähemalt kolme võrra rohkem kui tippe, millega on intsidentne serv värvi i.

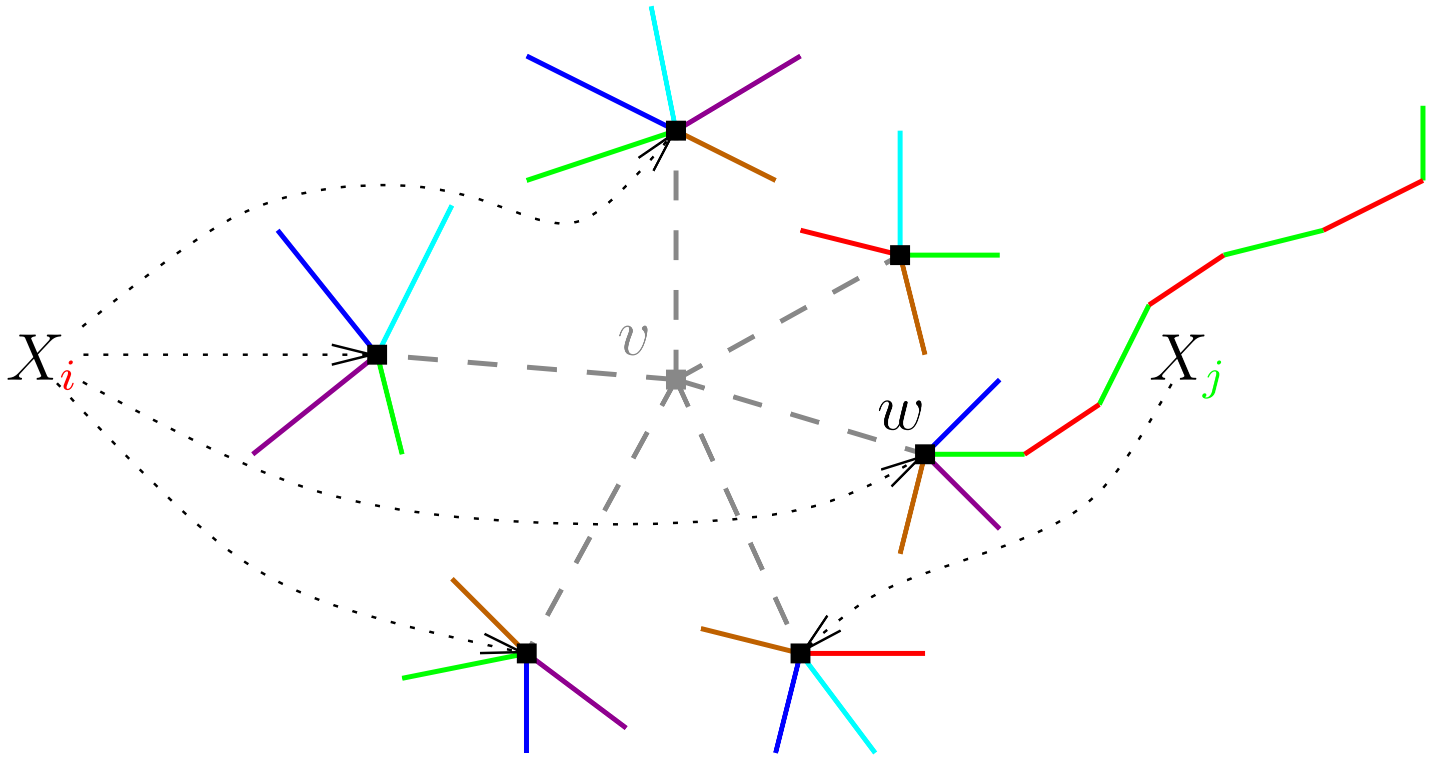


Olgu $E' \in E$ kõigi servade e hulk, kus $c(e) = i$ või $c(e) = j$. Vaatame graafi $G' = (V, E')$.

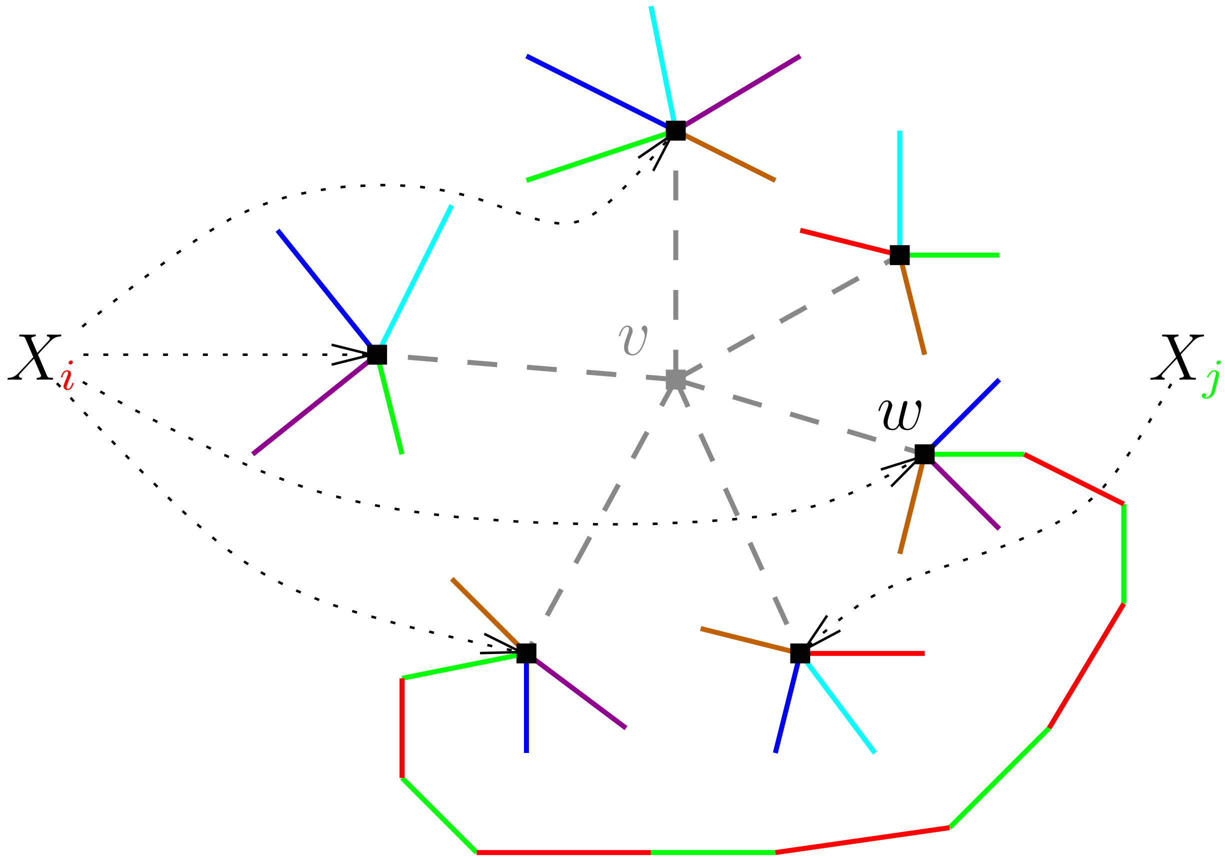
Graafis G' on kõigi tippude aste ≤ 2. Seega on G' sidusus-komponentideks isoleeritud tipud, ahelad ja tsüklid.

Tipp $w \in X_i \setminus X_j$ on mõne sellise ahela otstipuks.

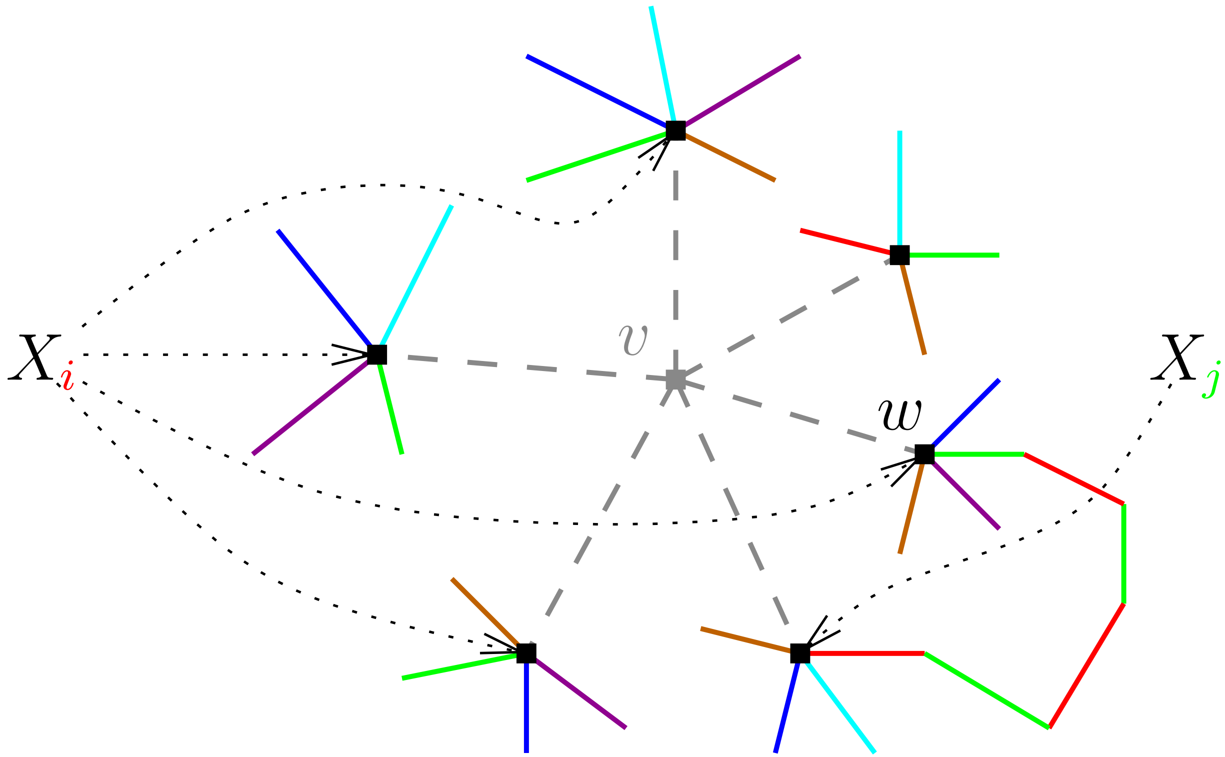
Kus võib selle ahela teine otstipp olla?



Kuskil mujal graafis G



Mõnes tipus hulgast $X_i \backslash X_j$

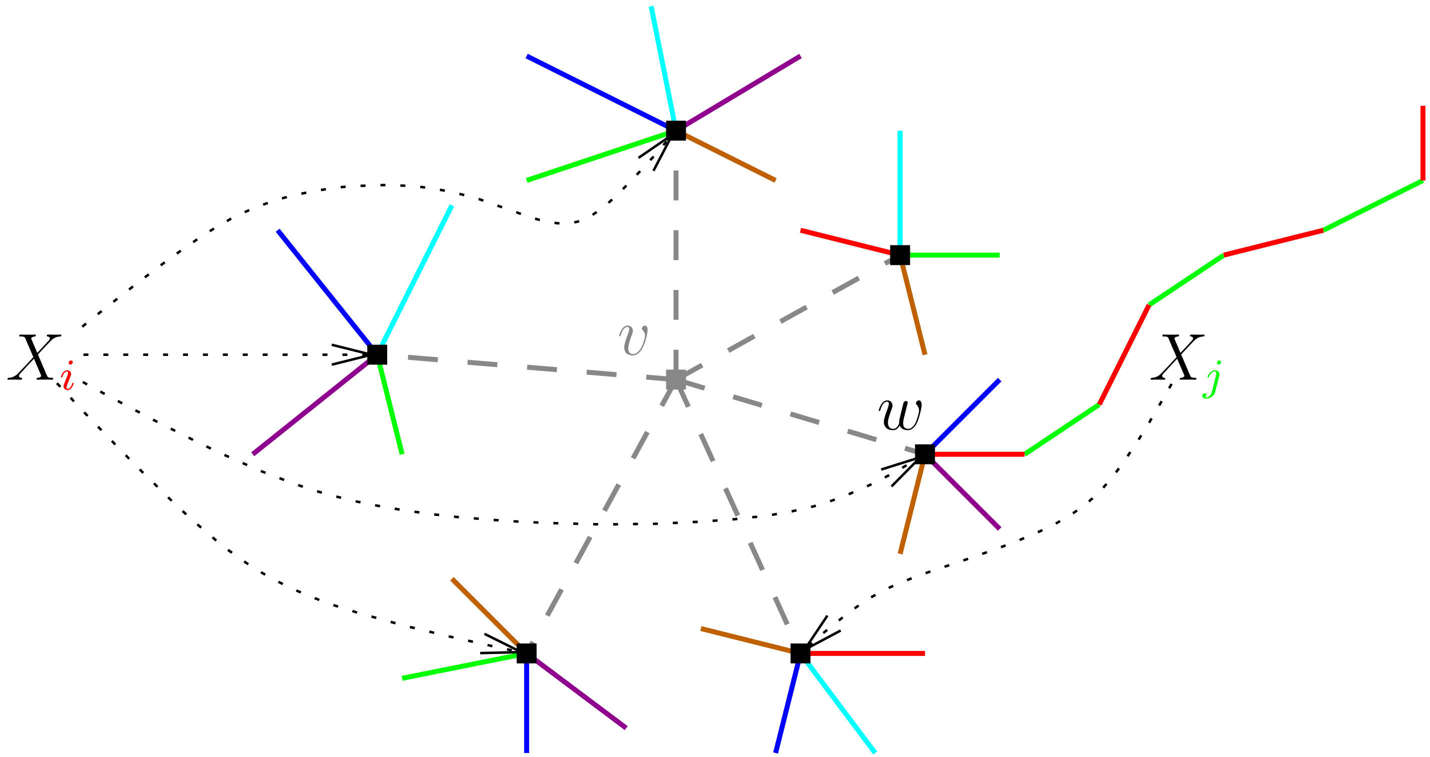


Mõnes tipus hulgast $X_j \backslash X_i$

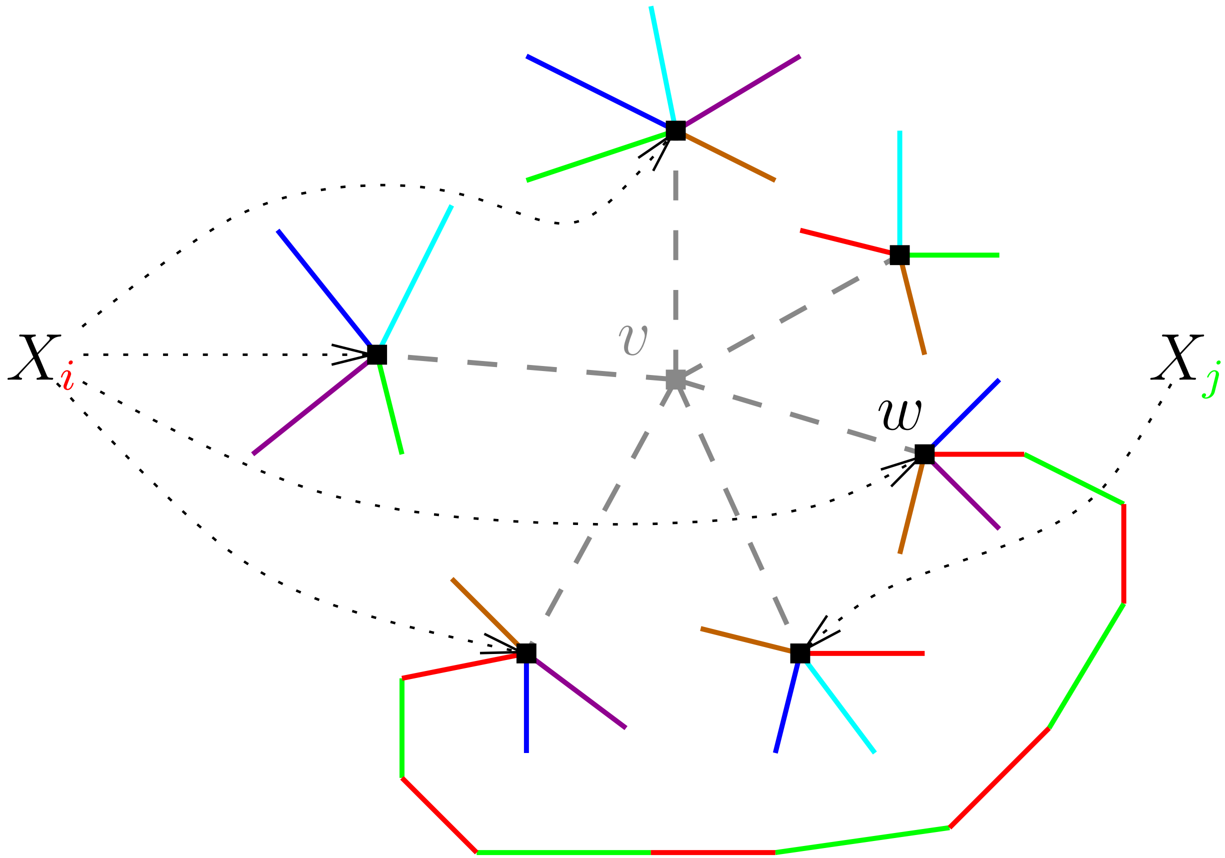
Kuna $|X_i| > |X_j|$, siis leidub selline $w \in X_i \backslash X_j$, et temast algav ahel — graafi G' sidususkomponent — lõppeb kuskil mujal kui mõnes tipus hulgast $X_j \backslash X_i$.

Sellises ahelas vahetame värvid i ja j. See defineerib meile värvimisviisi c'.

$|X_i|$ ja $|X_j|$ muutuvad järgmiselt:



$|X_i|$ väheneb ühe võrra, $|X_j|$ suureneb ühe võrra



$|X_i|$ väheneb kahe võrra, $|X_j|$ suureneb kahe võrra

Tarvis oleks leida iga $G \backslash v$ värvimisviisi c jaoks mingi suurus, mis

- Igal sammul (c-st c'-ks) muutub ühes kindlas suunas (näiteks väheneks).
- Omaks mingit alumist tõket.
- Poleks vähendatav kuitahes vähesel määral.

Selliseks suuruseks sobib näiteks $\sum_{i=1}^{k} |X_i|^2$.

Tõepoolest, olgu $n_i, n_j \in \mathbb{N}$, nii et $n_i - n_j \geq 3$. Siis

$$(n_i - 1)^2 + (n_j + 1)^2 = {n_i}^2 + {n_j}^2 - 2(n_i - n_j) + 2 \leq {n_i}^2 + {n_j}^2 - 4$$
$$(n_i - 2)^2 + (n_j + 2)^2 = {n_i}^2 + {n_j}^2 - 4(n_i - n_j) + 8 \leq {n_i}^2 + {n_j}^2 - 4$$

Oleme näidanud, et leidub värvimisviis c, mille puhul hulkade X_i võimsused erinevad üksteisest ülimalt kahe võrra.

Kuna hulkade X_i keskmine võimsus on natuke alla kahe ($\frac{2k-1}{k}$), siis on X_i-de võimalikud võimsused kas $\{0, 1, 2\}$ või $\{1, 2, 3\}$.

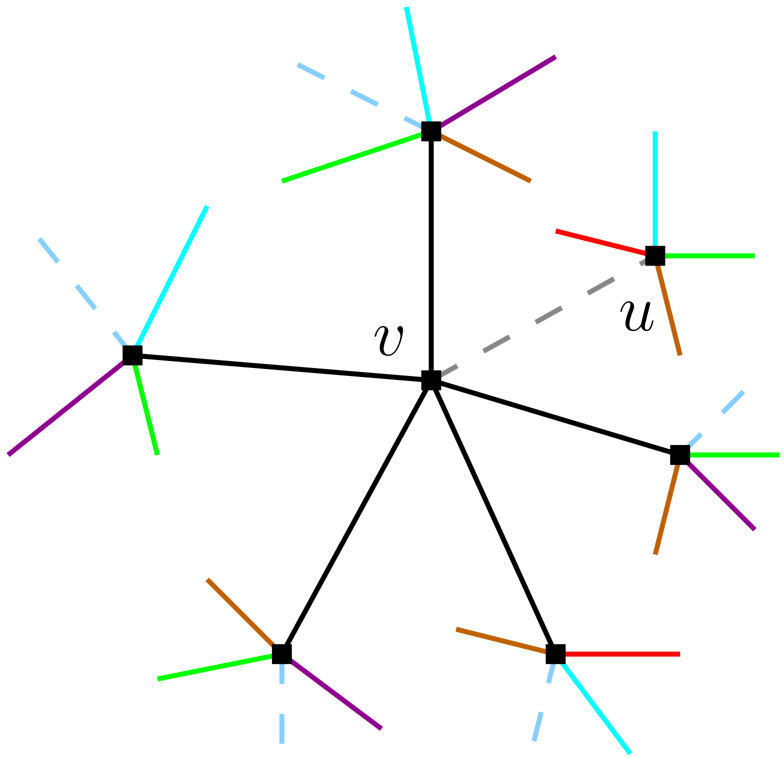
Kui on $\{1, 2, 3\}$, siis peab leiduma selline i, et $|X_i| = 1$, muidu oleks keskmine võimsus liiga suur.

Kui on $\{0, 1, 2\}$, siis peab leiduma selline i, et $|X_i| = 1$, sest kõigi X_i-de võimsuste summa on paaritu $(2k - 1)$.

Üldsust kitsendamata loeme, et selleks i-ks on k. Olgu $\{u\} = X_k$.

Olgu H saadud graafist G, kustutades seal

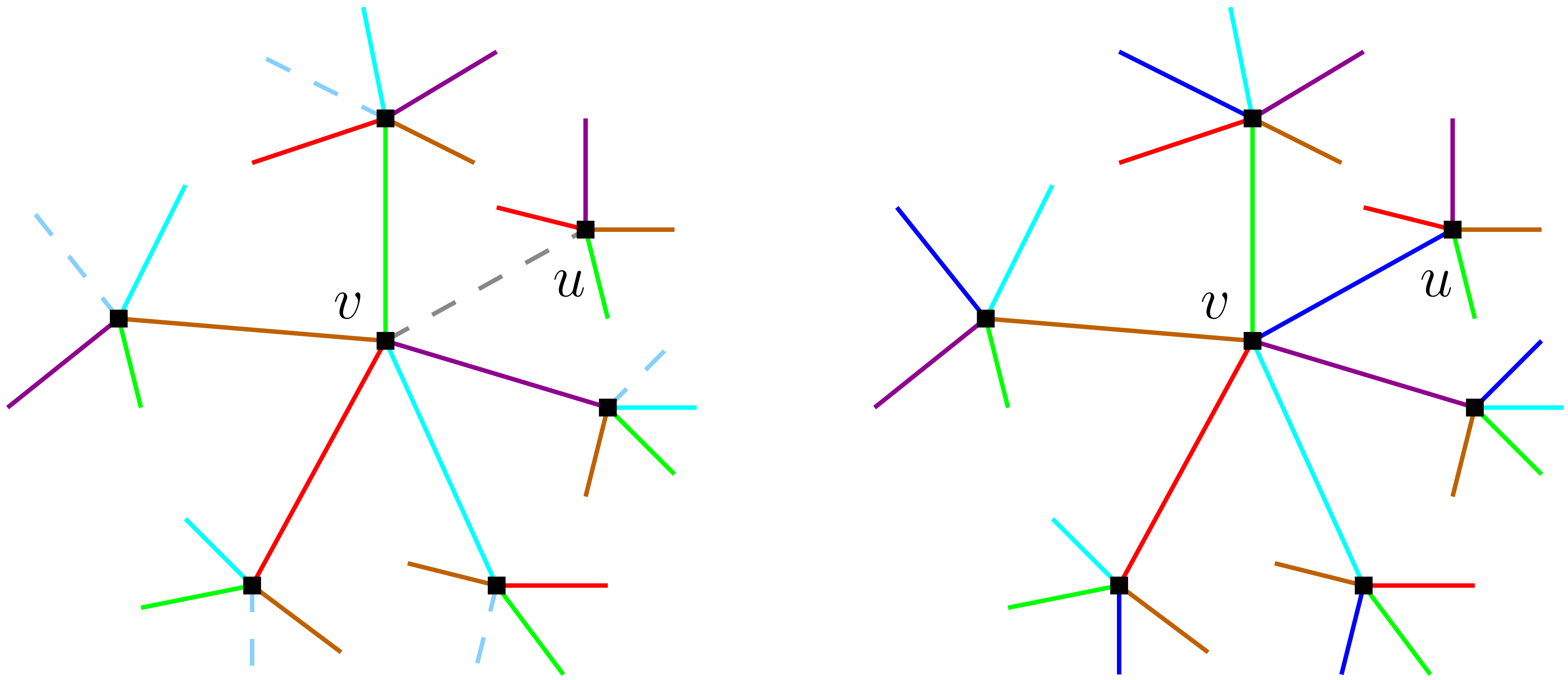
- kõik servad, mis c värvib värviga k;
- serva tippude v ja u vahel.



Värvimisviis c ilma värvita k on $H \backslash v$ servade värvimisviis $(k-1)$ värviga.

Tipu v ja iga tema naabertipu (graafis H) aste väheneb ühe võrra.

Graafile H ja tipule v saame rakendada induktsiooni eeldust. Seega on graafi H servad värvitavad $k-1$ värviga. Olgu c' mingi H servade värvimisviis $k-1$ värviga.



Graafi G servade värvimisviisi k värviga saame, värvides täiendavalt kõik eelnevalt kustutatud servad värviga k. $\square$