Ramsey teooria

28. november 2002

Olgu $G = (V, E)$ graaf. Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *klikiks*, kui suvalised kaks (erinevat) tippu $u, v \in S$ on G-s servaga ühendatud.

Teisisõnu, S on klikk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on täisgraaf.

Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks*, kui ühegi kahe S-i kuuluva tipu vahel serva ei ole.

Teisisõnu, S on sõltumatu hulk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on tühigraaf.

Meenutame, et n-tipulist tühigraafi tähistasime sümboliga O_n.

Lause. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, nii et $|V| \geq 6$. Siis leidub G-s kolmeelemendiline klikk või kolmeelemendiline sõltumatu hulk.

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi tipp. Olgu

- $X = N(v)$ (tipu v naabertippude hulk);
- $Y = \overline{N}(v) = V \backslash (X \cup \{v\})$ (tipu v mitte-naabrid).

Kuna $|X| + |Y| = |X \cup Y| = |V| - 1 \geq 5$, siis $|X| \geq 3$ või $|Y| \geq 3$. Oletame, et $|X| \geq 3$. On kaks võimalust:

- X on sõltumatu hulk.
- Leiduvad $u, w \in X$, nii et $(u, w) \in E$. Siis $\{u, v, w\}$ on klikk.

Juht $|Y| \geq 3$ on analoogiline (G asemel $\overline{G}$). $\square$

Olgu $r(k, l)$ (kui ta leidub) vähim selline täisarv, et iga lihtgraafi $G = (V, E)$ jaoks, kus $|V| \geq r(k, l)$, kehtib

$$K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_l \hookrightarrow G \quad .$$

Siin $\hookrightarrow$ tähistab indutseeritud alamgraafiks olemist.

Tänases loengus me näitame, et $r(k, l)$ leidub kõigi $k, l \in \mathbb{N}$ jaoks, ning anname mõned alam- ja ülemtõkked.

Eelmine lause näitas, et $r(3, 3)$ leidub ja on ülimalt 6.

Kuna $K_3 \not\hookrightarrow C_5$ ja $O_3 \not\hookrightarrow C_5$, siis $r(3, 3) = 6$.

Lemma. Kui $r(k, l)$ leidub, siis leidub ka $r(l, k)$ ja $r(l, k) = r(k, l)$.

Tõestus. Ilmne. Vahetame ära servade olemise ja mitteolemise. $\square$

Lemma. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$. Suurused $r(k,1)$ ja $r(k,2)$ leiduvad ning $r(k,1) = 1$ ja $r(k,2) = k$.
Analoogiliselt $r(1,l) = 1$ ja $r(2,l) = l$.

Tõestus. O_1 on lihtsalt ühetipuline graaf. See sisaldub igas graafis. Seega $r(k,1) = 1$.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu $|V| = k$. Kui $G = K_k$, siis $K_k \hookrightarrow G$. Kui $G \neq K_k$, siis olgu $u, v \in V$ sellised, et $(u,v) \notin E$. Siis $G[\{u,v\}] = O_2$.

Oleme näidanud, et $r(k,2) \leq k$. Samas $K_k \not\hookrightarrow K_{k-1}$ ja $O_2 \not\hookrightarrow K_{k-1}$. Seega $r(k,2) = k$. $\square$

Teoreem. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$, nii et $k \geq 2$ ja $l \geq 2$. Siis $r(k, l)$ leidub. Peale selle kehtib $r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1)$.

Tõestus. Induktsioon üle $k + l$.

Baas. $k + l = 4$. Siis $k = l = 2$. Eelmine lemma annab

$$r(2,2) = 2 = 1 + 1 = r(1,2) + r(2,1) \quad .$$

Samm. Induktsiooni eeldusest saame, et $r(k-1, l)$ ja $r(k, l-1)$ leiduvad.

Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, nii et $|V| = r(k-1, l) + r(k, l-1)$.

Olgu $v \in V$ ja vaatame hulki $N(v)$ ja $\overline{N}(v)$.

Kuna $|N(v)| + |\overline{N}(v)| = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1,l)$.
2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k,l-1)$.

Esimesel juhul vaatame graafi $G[N(v)]$. On kaks võimalust:

- $K_{k-1} \hookrightarrow G[N(v)]$. Olgu $S \subseteq N(v)$ $(k-1)$-tipuline klikk. Siis $S \cup \{v\}$ on k-tipuline klikk.
- $O_l \hookrightarrow G[N(v)]$. Siis ka $O_l \hookrightarrow G$.

Teisel juhul vaatame graafi $G[\overline{N}(v)]$. On kaks võimalust:

- $O_{kl-1} \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Olgu $S \subseteq \overline{N}(v)$ $(l-1)$-tipuline sõltumatu hulk. Siis $S \cup \{v\}$ on l-tipuline sõltumatu hulk.
- $K_k \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Siis ka $K_k \hookrightarrow G$.

Oleme näidanud, et suvaline $(r(k-1,l)+r(k,l-1))$-tipuline graaf sisaldab k-elemendilist klikki või l-elemendilist sõltumatut hulka. Seega on $r(k,l)$ ülimalt $r(k-1,l)+r(k,l-1)$.
$\square$

Järeldus. Kui $r(k-1,l)$ ja $r(k,l-1)$ on paarisarvud, siis $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$.

Tõestus. Olgu $G = (V,E)$ lihtgraaf, kus $|V| = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$. Olgu $v \in V$ selline, et $|N(v)|$ on paarisarv. Selline v leidub, sest $|V|$ on paaritu.

Kuna nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1,l)$.
2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k,l-1)$.

Tõestus jätkub identselt eelmise teoreemi tõestusega. $\square$

Lause. $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Tõestus. $r(1,1) = r(1,2) = r(2,1) = 1 = \binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1}$.

k ja l-i ülejäänud väärtuste jaoks tõestame selle väite induktsiooniga üle $k+l$. Me oleme juba ära teinud baasi $k+l \leq 3$.

Samm. Olgu $k+l \geq 4$. Siis

$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$.

$\square$

Teoreem. Kui $k \geq 2$, siis $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Tõestus. Olgu $n < 2^{k/2}$ ja olgu $\mathcal{G}$ kõigi n-tipuliste lihtgraafide hulk. Meil tuleb näidata, et leidub $G \in \mathcal{G}$, nii et $K_k \not\hookrightarrow G$ ja $O_k \not\hookrightarrow G$.

Olgu meil antud mingi hulk $\mathcal{X}$ ja selle hulga elementide mingi omadus P. S.t. P on funktsioon hulgast $\mathcal{X}$ hulka $\{\text{tõene}, \text{väär}\}$. Olgu meil tarvis näidata, et leidub $x \in \mathcal{X}$, mille korral $P(x)$ kehtib.

Selleks piisab, kui näitame, et kui x on mingi *juhuslikult* valitud element hulgast $\mathcal{X}$, siis $\mathrm{Prob}[P(x)] > 0$.

Defineerimaks, mida kujutab endast hulgast $\mathcal{G}$ juhusliku graafi valimine, tuleb meil fikseerida mingi tõenäosusjaotus hulgal $\mathcal{G}$.

Olgu $\mathcal{G}$ hoopis kõigi *märgendatud* n-tipuliste lihtgraafide hulk (märgenditega hulgast $\{1, \ldots, n\}$). Siis $|\mathcal{G}| = 2^{\binom{n}{2}}$.

Olgu G juhuslik märgendatud graaf hulgast $\mathcal{G}$, kusjuures kõigil $2^{\binom{n}{2}}$ graafil olgu sama suur tõenäosus valituks saada.

Leiame ülemise tõkke suurustele $\mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G]$ ja $\mathrm{Prob}[O_k \hookrightarrow G]$.

$$\mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G] =$$

$$\frac{k\text{-elemendilist klikki sisaldavate graafide arv } \mathcal{G}\text{-s}}{|\mathcal{G}|} \leq$$

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \cdot \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k \leq n} \Big| \{ G \,|\, G = (V, E, \mu) \in \mathcal{G},$$

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} : (\mu^{-1}(m_i), \mu^{-1}(m_j)) \in E \} \Big| =$$

$$\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq$$

$$\frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \frac{(2^{k/2})^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k^2/2 - k(k-1)/2}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!}$$

Kui k kasvab, siis $\frac{2^{k/2}}{k!}$ kahaneb. Kui $k \geq 3$, siis $\frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$.

Variant $k = 2$ tuleb pärast eraldi läbi vaadata.

Analoogiliselt, kui $k \geq 3$, siis $\mathrm{Prob}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$.

Meil oli $P(G) \equiv$ „$K_k \not\hookrightarrow G$ ja $O_k \not\hookrightarrow G$“. Kui $k \geq 3$, siis

$$\mathrm{Prob}[K_k \not\hookrightarrow G \text{ ja } O_k \not\hookrightarrow G] = 1 - \mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \geq$$
$$1 - \mathrm{Prob}[K_k \hookrightarrow G] - \mathrm{Prob}[O_k \hookrightarrow G] > 1 - 1/2 - 1/2 = 0 \ .$$

Seega, kui $k \geq 3$, siis $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Kui $k = 2$, siis $r(k,k) = 2 = 2^{k/2}$. $\square$

$r(k,l)$ täpsed väärtused on teada ainult väheste paaride (k,l) jaoks. Ülevaate leiab aadressilt

`http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1.ps`

Arvusid $r(k, l)$ saab üldistada.

$r(k, l)$ on vähim selline arv n, et kui me värvime K_n servad kahe värviga (värvimisviis ei pruugi olla korrektne), siis leidub seal alamgraafina esimest värvi K_k või teist värvi K_l.

Olgu $r(a_1, \ldots, a_k)$ vähim selline arv n, et kui me värvime K_n servad k värviga, siis leidub $i \in \{1, \ldots, k\}$ nii, et leidub alamgraaf K_{a_i}, mille kõik servad on värvi a_i.

Kehtib võrratus

$$r(a_1,\ldots,a_k) \leq \\ r(a_1-1,a_2,\ldots,a_k)+r(a_1,a_2-1,a_3,\ldots,a_k)+\cdots+ \\ r(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k-1)-(k-2)$$

ning $r(\ldots,1,\ldots)=1$.

Tõestus: samasugune kui juhul $k=2$.