# Tasandilised graafid

5. detsember 2002

Graaf on *tasandiline* (*planaarne*), kui teda saab tasandile joonistada nii, et tema servad väljaspool tippe ei lõikuks.

Näide: $K_4$ on tasandiline, $Q_3$ on tasandliline, $K_{3,3}$ ei ole.

Eelpool antud definitsioon ei ole täpne, kuna „ joonistamine“ ei ole täpne mõiste.

Järgnevas anname ühe täpse definitsiooni. Samas edaspidi kasutame ikkagi ebatäpset.

*Kõver* Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^n$ on mingi funktsioon $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, kus $a, b \in \mathbb{R}$.

Kõver $\gamma$ on *pidev*, kui iga $y \in \mathbb{R}$ jaoks $\lim_{x \to y} \gamma(x) = \gamma(y)$.

Kõvera $\gamma$ *pikkus* on

$$\sup\{\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\} \ .$$

Kõverat, millel on pikkus, nimetame *sirgestuvaks*.

*Jordani kõver* on pidev sirgestuv iseennast mittelõikav kõver. Olgu $J_n$ kõigi Jordani kõverate hulk ruumis $\mathbb{R}^n$.

Graafi $G = (V, E)$ *joonis* ruumi $\mathbb{R}^n$ on kujutiste paar

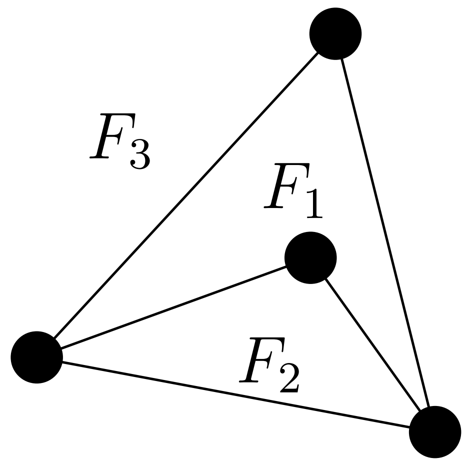
$$\iota_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\iota_E : E \longrightarrow J_n,$$

nii et

- $\iota_V$ ja $\iota_E$ on injektiivsed.
- Kui $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$, siis kõvera $\iota_E(e)$ otspunktideks on $\iota_V(u)$ ja $\iota_V(v)$.
- Kõverad $\iota_E(e_i)$ lõikavad üksteist vaid nende ühistes otspunktides.

Graaf on *tasandiline*, kui tal leidub joonis ruumis $\mathbb{R}^2$.

Graafi joonis tükeldab tasandi selle osa, mis joonise alla ei jää.




Neid tükke nimetatakse *tahkudeks*.

Tahk $F_3$ on *lõpmatu tahk*.

Graafi võib joonistada nii, et ükskõik milline tahk oleks lõpmatu.

$\Rightarrow$ graafi võib joonistada nii, et ükskõik milline serv oleks „välimine“.

**Teoreem (Euler).** Olgu $G$ sidusa tasandiline graaf. Olgu

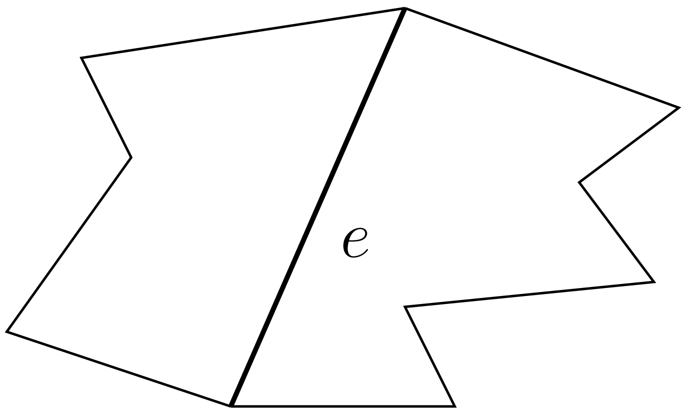
- $n$ — graafi $G$ tippude arv,
- $m$ — graafi $G$ servade arv,
- $f$ — graafi $G$ joonise tahkude arv.

Siis $n + f - m = 2$.

Tõestus. Induktsioon üle servade arvu.

*Baas.* $G$ on puu. Siis $n = m + 1$ ja $f = 1$. Seega $n + f - m = m + 1 + 1 - m = 2$.

*Samm.* Olgu $G$ graaf, millel on $m$ serva ja mis ei ole puu. Leidub mingi serv $e$, mille eemaldamisel $G$-st jääb $G$ sidusaks.




Graafis $G-e$ on ühe võrra vähem tahke (ja servi) kui graafis $G$. Vastavalt induktsiooni eeldusele $n+(f-1)-(m-1)=2$. Siit järeldubki kohe $n+f-m=2$. $\square$

**Järeldus.** Olgu $G$ tasandilne graaf. Olgu

- $n$ — graafi $G$ tippude arv,
- $m$ — graafi $G$ servade arv,
- $f$ — graafi $G$ joonise tahkude arv.
- $k$ — graafi $G$ sidususkomponentide arv.

Siis $n + f - m = k + 1$.

Tõestus. Rakendame eelmist teoreemi graafi $G$ igale sidususkomponendile. Seejuures loeme lõpmatut tahku ainult ühe korra. $\square$

**Järeldus.** Kui $G$ on sidus tasandiline vähemalt kolme tipuga lihtgraaf, siis $m \leq 3n - 6$ (siin $m$ — servade arv, $n$ — tippude arv).

Tõestus. Sellise lihtgraafi joonisel on igal tahul vähemalt 3 serva (kui üks ja sama tahk asub mingi serva „mõlemal pool“, siis loeme seda serva selle tahu juures kaks korda).

Iga serv kuulub kahele tahule, seega

$$2m = \sum_{F \text{ on tahk}} \langle F\text{-i servade arv} \rangle \geq 3f \quad .$$

Euleri valem annab

$$2 = n + f - m \leq n + \frac{2}{3}m - m = \frac{3n - m}{3}$$

ehk $3n - m \geq 6$. $\square$

**Järeldus.** $K_5$ ei ole tasandiline.

Tõestus. Graafis $K_5$ on $n = 5$ ja $m = 10$. Kui $K_5$ oleks tasandiline, siis annaks eelmine järeldus $m \leq 3n - 6$ ehk $10 \leq 9$. $\square$

**Järeldus.** Kui $G$ on sidus tasandiline vähemalt kolme tipuga lihtgraaf, milles pole tsükleid pikkusega 3, siis $m \leq 2n-4$.

Tõestus. Graafi $G$ joonisel on igal tahul vähemalt 4 serva.

Iga serv kuulub kahele tahule, seega $2m \geq 4f$. Euleri valem annab

$$2 = n + f - m \leq n + \frac{1}{2}m - m = \frac{2n - m}{2}$$

ehk $2n - m \geq 4$. $\square$

**Järeldus.** $K_{3,3}$ ei ole tasandiline.

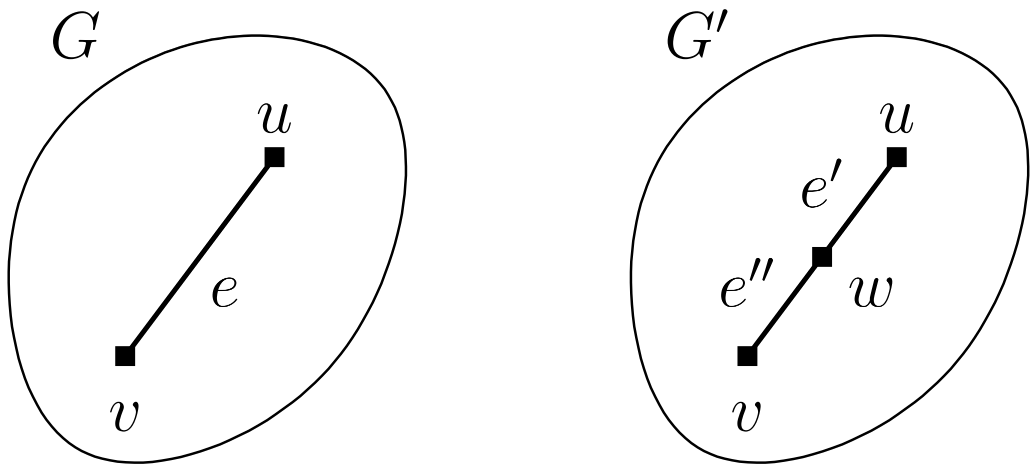
Tõestus. Graafis $K_{3,3}$ on $n = 6$ ja $m = 9$. Samuti pole $K_{3,3}$-s tsükleid pikkusega 3. Kui $K_{3,3}$ oleks tasandiline, siis annaks eelmine järeldus $m \leq 2n - 4$ ehk $9 \leq 8$. $\square$

**Järeldus.** Igas tasandilises lihtgraafis leidub tipp astmega ülimalt 5.

Tõestus. Olgu $G$ vaadeldava tasandilise lihtgraafi mingi sidususkomponent. Oletame vastuväiteliselt, et $G$ kõigi tippude astmed on $\geq 6$.

Kuna iga serv on intsidentne kahe tipuga, siis $6n \leq 2m$ ehk $m \geq 3n$. Samas andis üks varasemaid järeldusi meile $m \leq 3n - 6$. Vastuolu. $\square$

Serva *poolitamise* operatsioon ($G \Longrightarrow G'$):




Serv $e$ asendatakse tipuga $w$ ja servadega $e'$, $e''$.

Graafid $G_1$ ja $G_2$ on *homöomorfsed*, kui leidub graaf $G$, nii et $G_1$ ja $G_2$ on saadavad graafist $G$ servasid poolitades.

**Teoreem (Kuratowski).** Graaf on tasandiline parajasti siis, kui tal ei ole alamgraafi, mis on homöomorfne $K_5$-ga või $K_{3,3}$-ga.

Teisisõnu, graaf $G$ ei ole tasandiline parajasti siis, kui temas „sisaldub" $K_5$ või $K_{3,3}$ järgmisel viisil:

- $K_5$-e või $K_{3,3}$-e tippudeks on $G$ tipud.
- $K_5$-e või $K_{3,3}$-e servadeks on lihtahelad $G$-s.
- Need lihtahelad ei lõiku omavahel (v.a. otstippudes).

**Tõestus.** Vastuväiteliselt oletame, et leidub mittetasandilisi graafe, mis ei sisalda ei $K_5$-t ega ka $K_{3,3}$-e. Olgu $G$ selline graaf ning olgu ta servade arv minimaalne võimalik.

$G$ jaoks kehtivad järgmised väited:

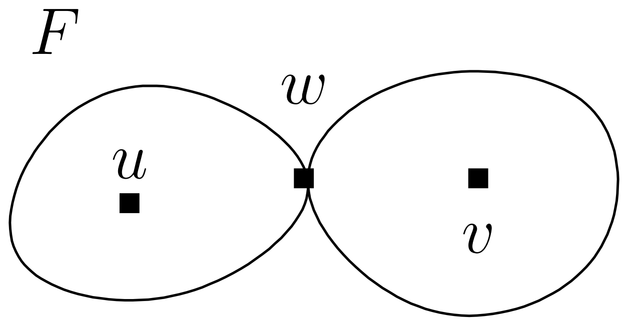
- $G$ on lihtgraaf.
- $G$ on sidus.
- $G$-s ei ole sildu.
- $G$-s pole *lõiketippe* — tippe $v$, nii et $G \backslash v$ pole sidus.

Olgu $e$ üks graafi $G$ servadest, olgu $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Olgu $F = G - \{e\}$. Siis $F$ on tasandiline, sest ta ei sisalda $K_5$-t ega $K_{3,3}$-e.

**Väide 1.** Graafis $F$ leidub tsükkel, mis läbib tippe $u$ ja $v$.

Teisisõnu, $F$-s leidub kaks lihtahelat $u$-st $v$-sse, mis teineteist ei lõika.

**Väide 1'.** Graafis $F$ ei leidu tippu $w$, nii et $F$ on kujul



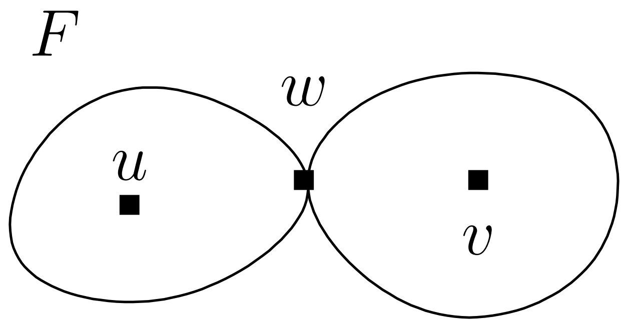

s.t. graafis $F\backslash w$ on $u$ ja $v$ erinevates sidususkomponentides.

Ford-Fulkersoni teoreemist järeldub **Väide 1**$\Longleftrightarrow$**Väide 1'**.

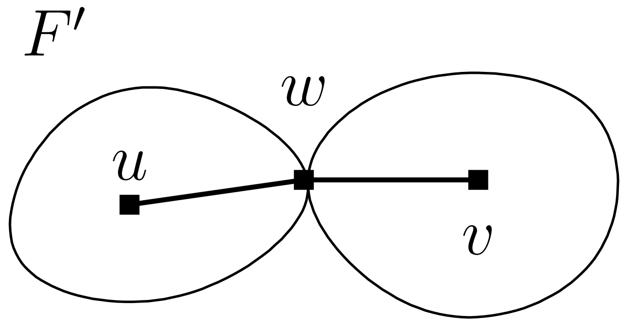
$\Rightarrow$ on ilmne, $\Leftarrow$ jääb koduseks ülesandeks (Mengeri teoreem).

Tõestame väidet 1'.

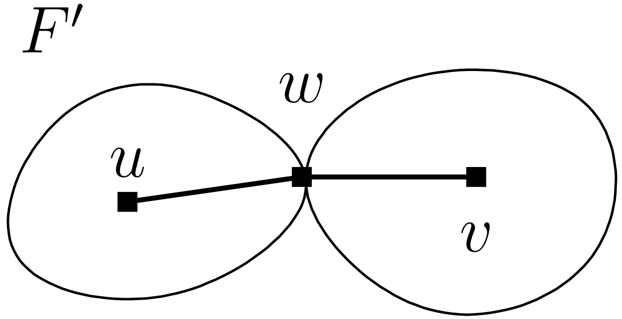
Vastuväiteliselt oletame, et $F$ on kujul

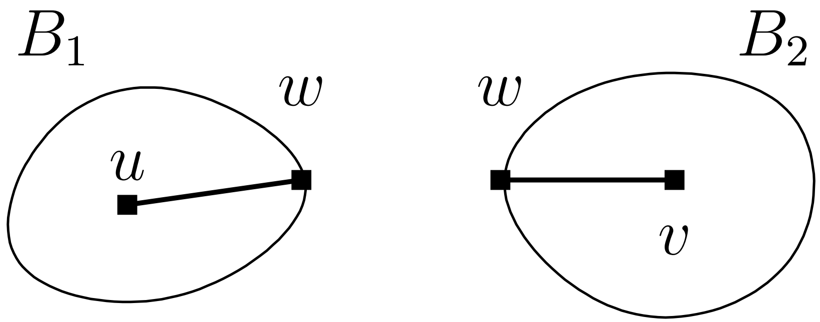



Olgu $F'$ saadud $F$-st kahe serva lisamise teel:



Olgu $B_1$ ja $B_2$ järgmised graafid:



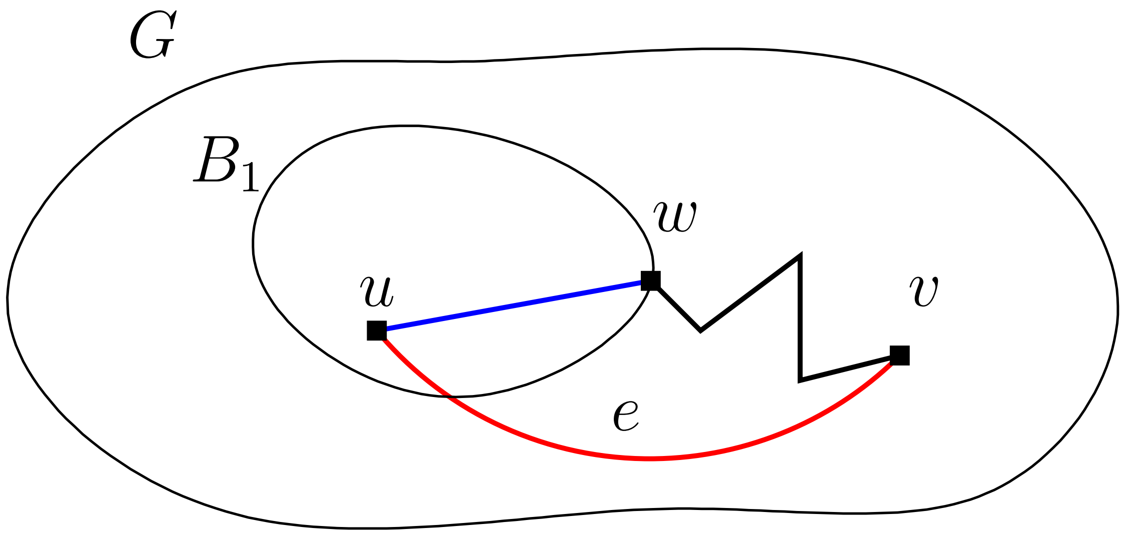

Graafides $B_1$ ja $B_2$ on vähem servi kui $G$-s, seega rahuldavad nad teoreemi väidet.

On kaks võimalust:

1. võimalus. $B_1$ (või $B_2$) sisaldab $K_5$-t või $K_{3,3}$-e.

See sisaldumine peab kasutama uut serva $u$ ja $w$ vahel.

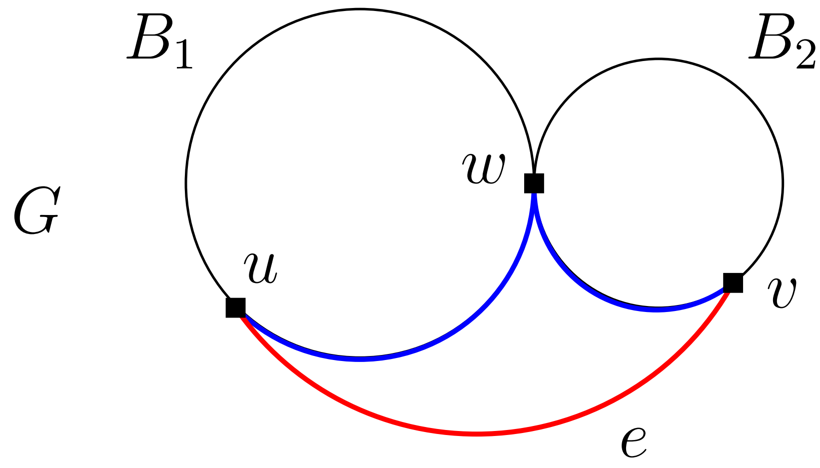
Ka $G$ sisaldab siis $K_5$-t või $K_{3,3}$-e:




Uue serva saab asendada lihtahelaga, mis on väljaspool $B_1$-e.

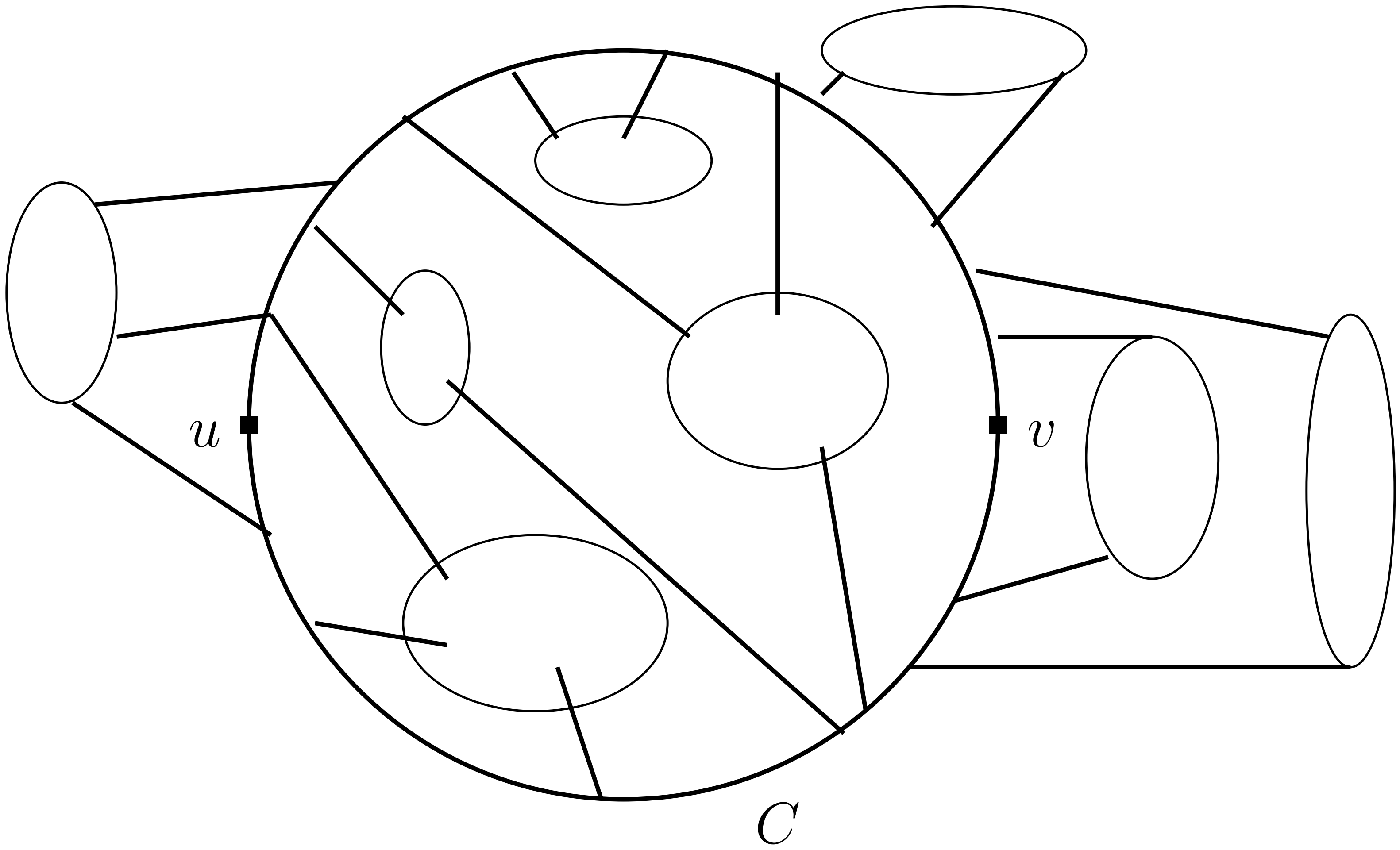
2. võimalus. $B_1$ ja $B_2$ on tasandilised.

Ka $G$ on siis tasandiline: joonistame $B_1$ ja $B_2$ nii, et uued servad oleksid välispinnal:



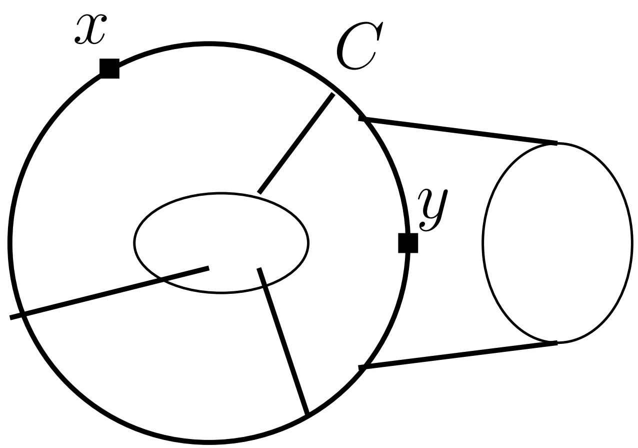

Väide 1' on tõestatud.

Olgu $F$ joonistatud tasandile ja olgu $C$ tsükkel, millel on tipud $u$ ja $v$. Olgu $F$ joonistatud ja $C$ valitud niimoodi, et $C$ sisse jääb nii palju tahke kui võimalik.

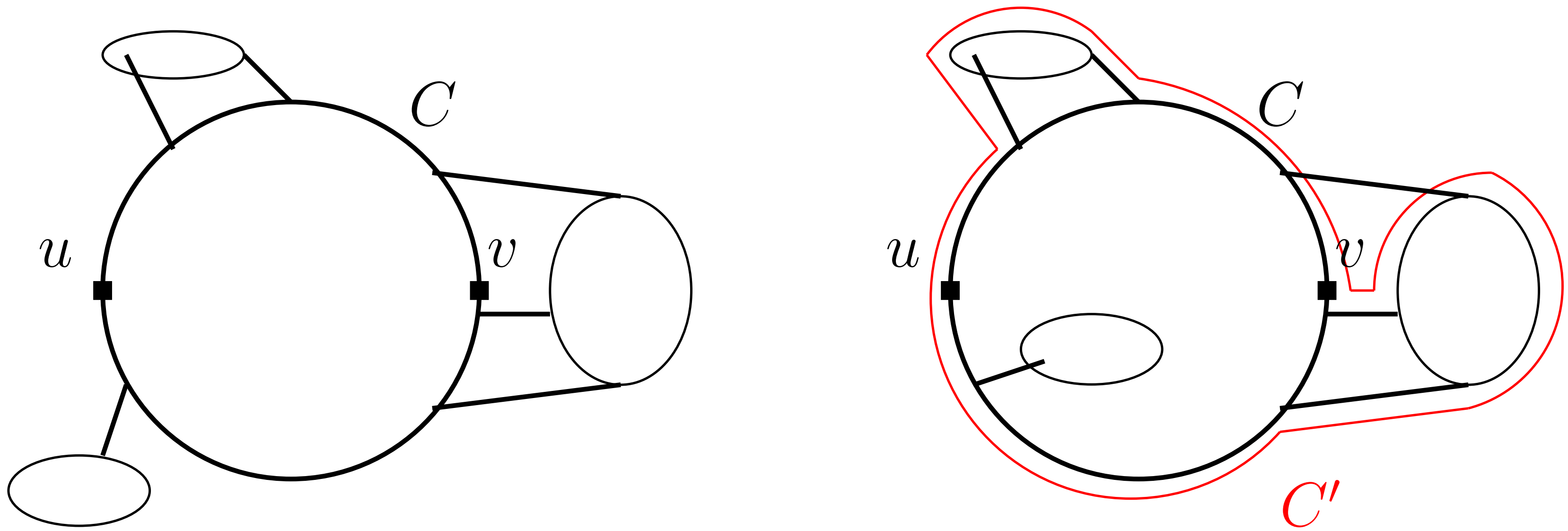


Lisaks tsüklile $C$ on graafis $F$ veel *komponente*. Osad neist on *sisemised*, osad *välimised*.

Olgu $x$ ja $y$ tipud tsüklil $C$. Ütleme, et mingi sisemine/välimine komponent *eraldab* $x$-i ja $y$-i, kui ta takistab joone vedamist $x$-i ja $y$-i vahel seespool/väljaspool tsüklit $C$.

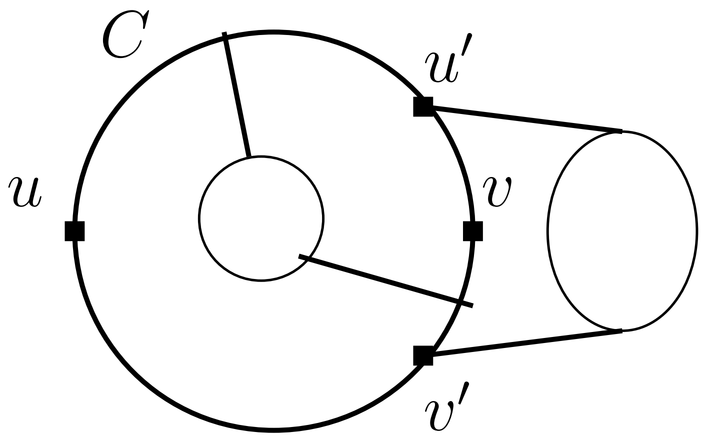


Kõik välimised komponendid eraldavad $u$ ja $v$ ning on $C$-ga ühendatud täpselt kahe servaga:

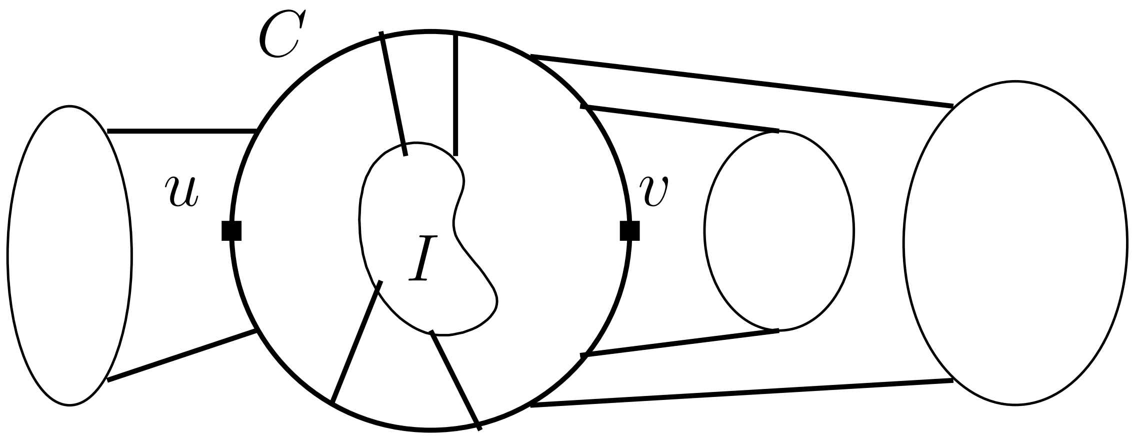



Muidu leiduks joonistamisviis / tsükkel, mille sisse jääb rohkem tahkusid.

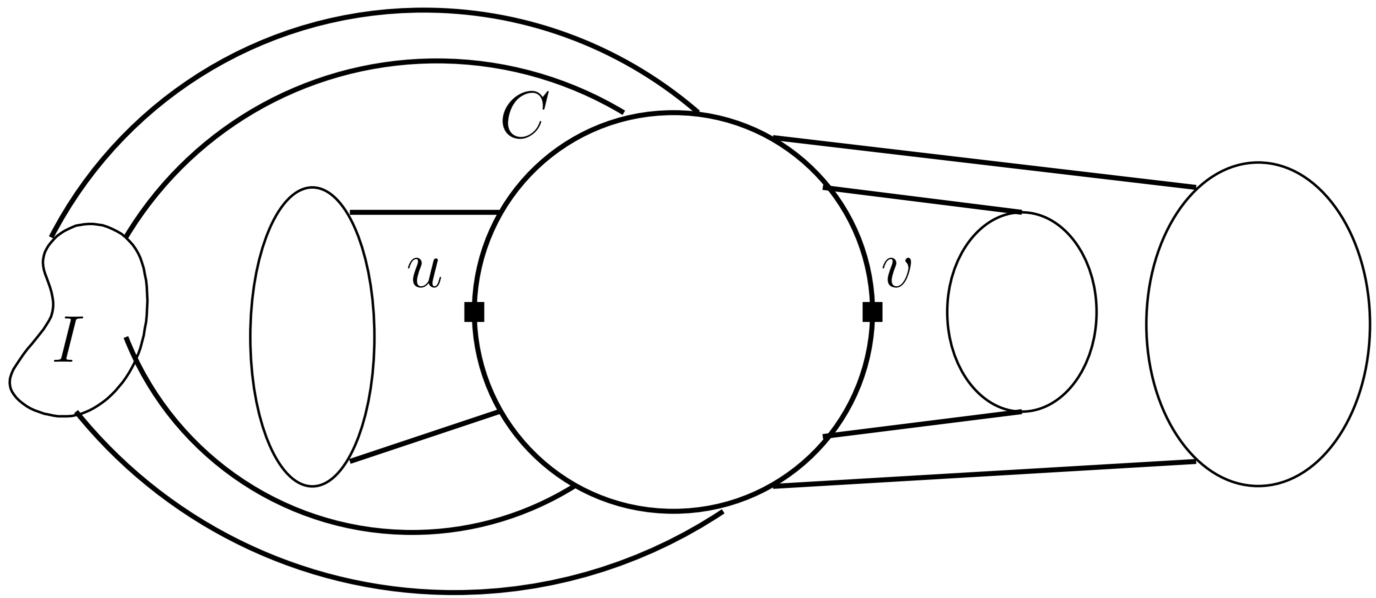
**Väide 2.** Leiduvad sisemine komponent ning välimine komponent (mis olgu $C$-ga ühendatud tippudest $u'$ ja $v'$), nii et see sisemine komponent eraldab nii $u$ ja $v$ kui ka $u'$-i ja $v'$-i:



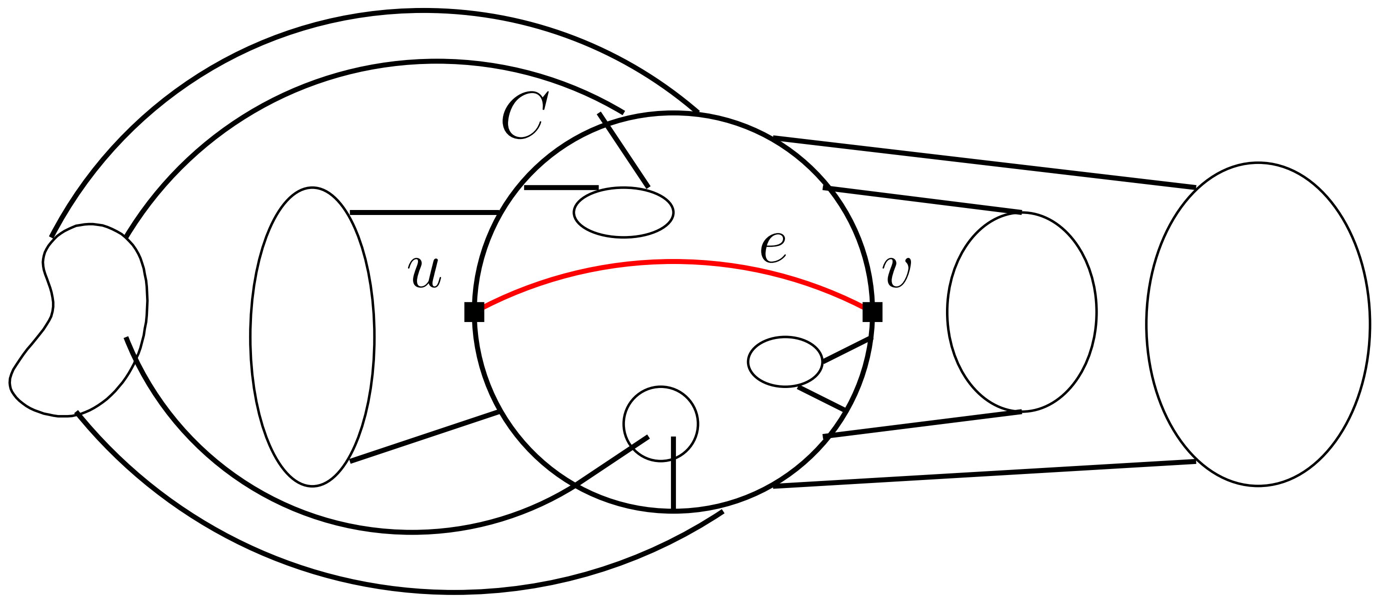
Väite tõestus: Olgu $I$ mingi $u$-d ja $v$-d eraldav sisemine komponent, mis ei eralda ühegi välimise komponendi puutepunkte $C$-ga:



Me saame $I$ välja tõsta:

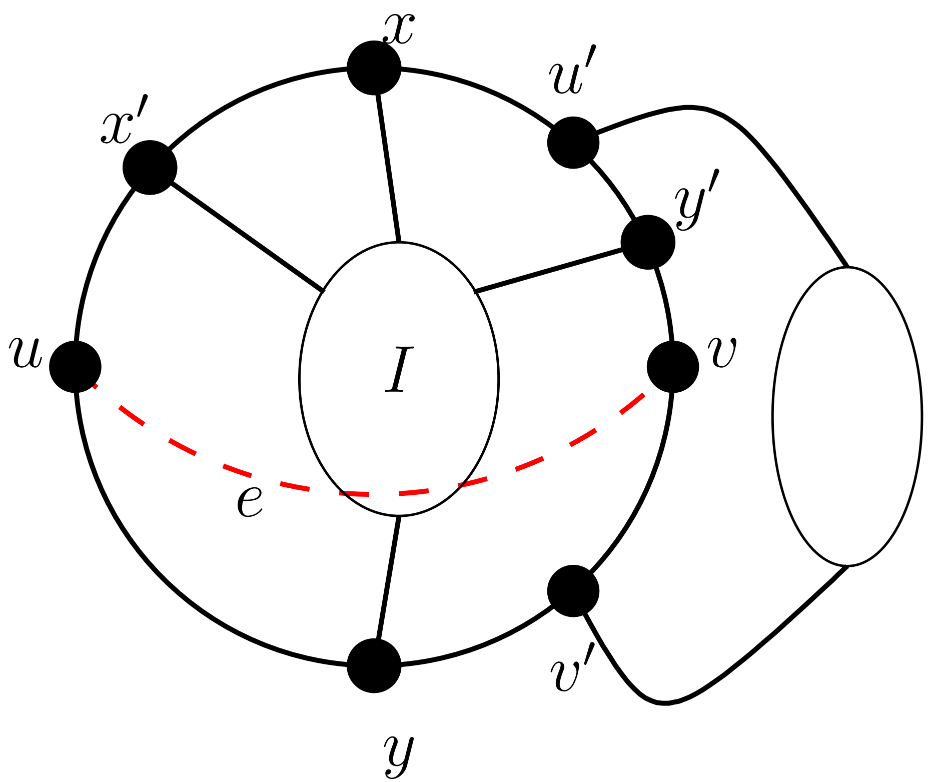


Kui väide 2 ei kehtiks, siis saaksime kõik sisemised $u$-d ja $v$-d eraldavad komponendid välja tõsta. Seejärel saame tagasi panna serva $e$. Seega oleks graaf $G$ tasandiline. Järelikult väide 2 kehtib.



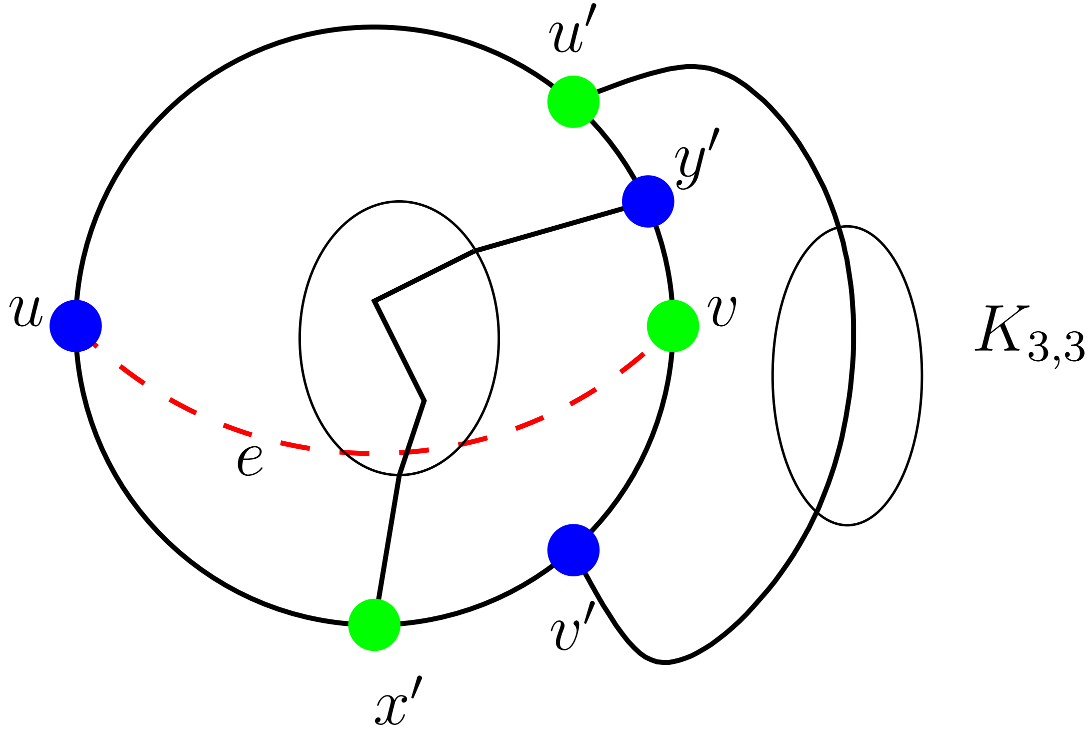
Olgu $x, y$ tipud, tänu millele $I$ eraldab $u$ ja $v$.

Olgu $x', y'$ tipud, tänu millele $I$ eraldab $u'$ ja $v'$.




Need võivad paikneda mitmel viisil. Vaatame kõik viisid läbi ja leiame $G$-st kas $K_5$ või $K_{3,3}$.

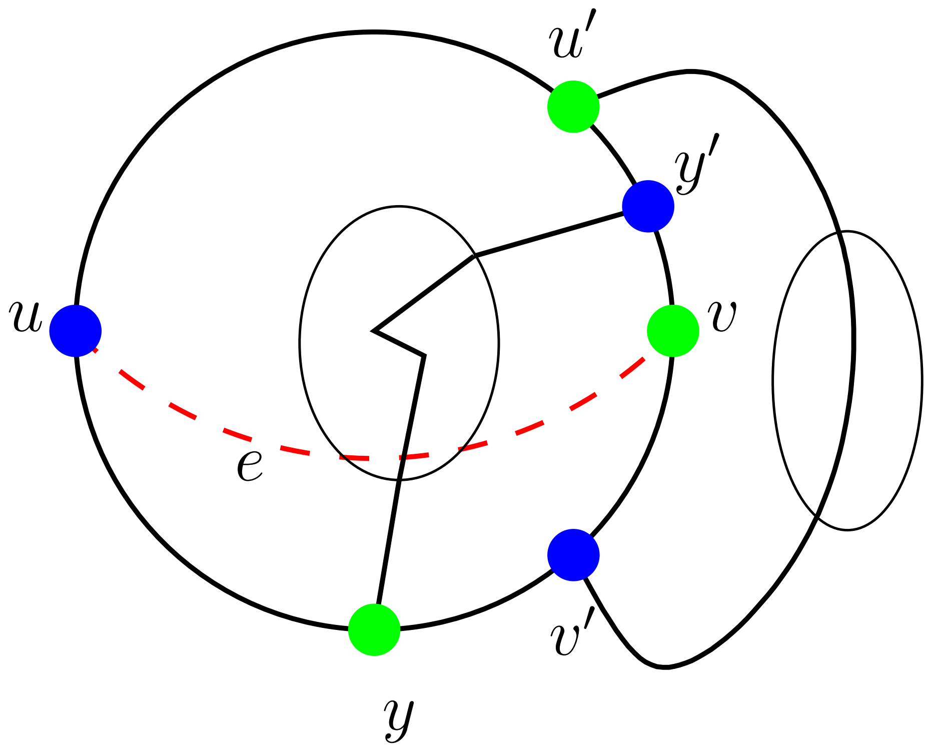
**1. viis.** $x', y'$ on erinevad $u$-st ja $v$-st ning $I$ eraldab $u$ ja $v$ ka tänu $x', y'$-le.



**2. viis.** $x', y'$ on erinevad $u$-st ja $v$-st ning $I$ ei eralda $u$-d ja $v$-d tänu $x', y'$-le.

Võime eeldada, et $x', y'$ on samal pool, kui $x$.

**1. variant.** $y$ on $u$ ja $v'$ vahel.

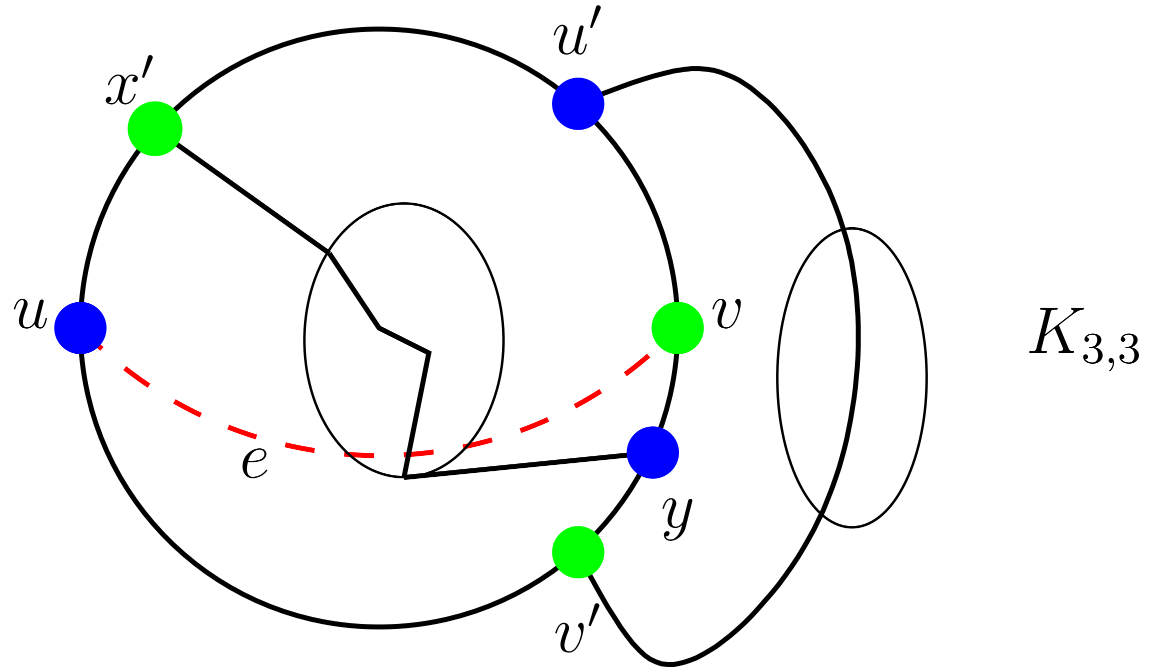



$K_{3,3}$

**2. viis.** $x', y'$ on erinevad $u$-st ja $v$-st ning $I$ ei eralda $u$-d ja $v$-d tänu $x', y'$-le.

Võime eeldada, et $x', y'$ on samal pool, kui $x$.

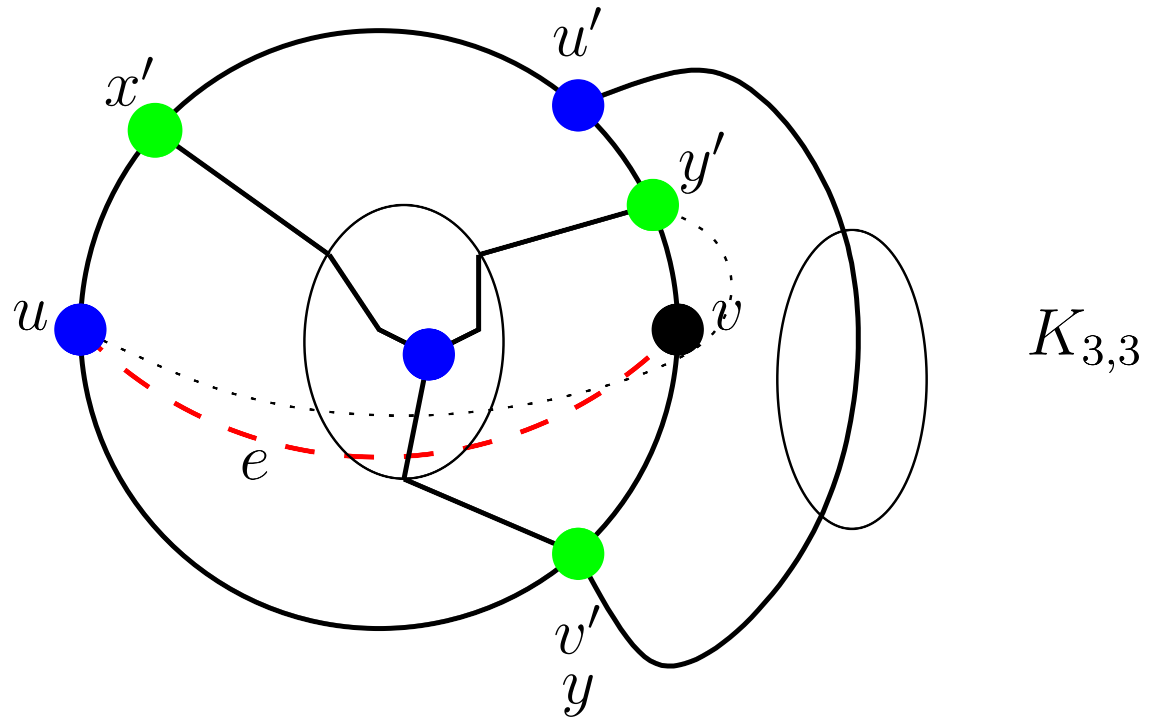
**2. variant.** $y$ on $v'$ ja $v$ vahel.



**2. viis.** $x', y'$ on erinevad $u$-st ja $v$-st ning $I$ ei eralda $u$-d ja $v$-d tänu $x', y'$-le.

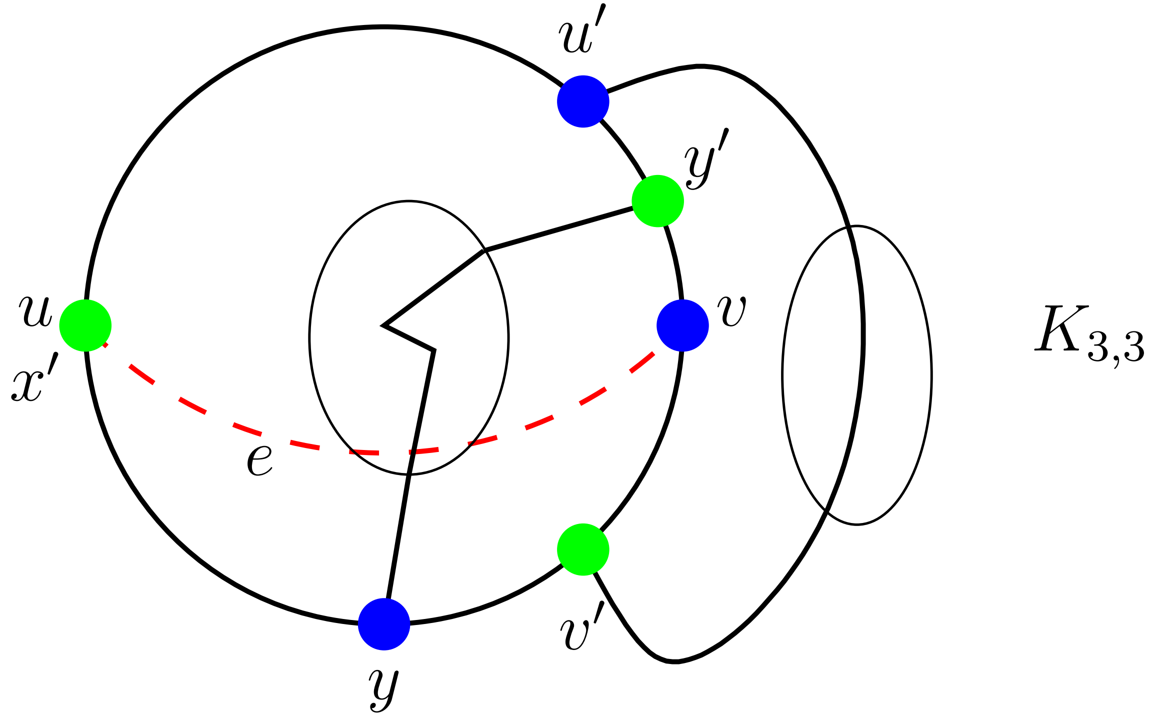
Võime eeldada, et $x', y'$ on samal pool, kui $x$.

**3. variant.** $y = v'$.



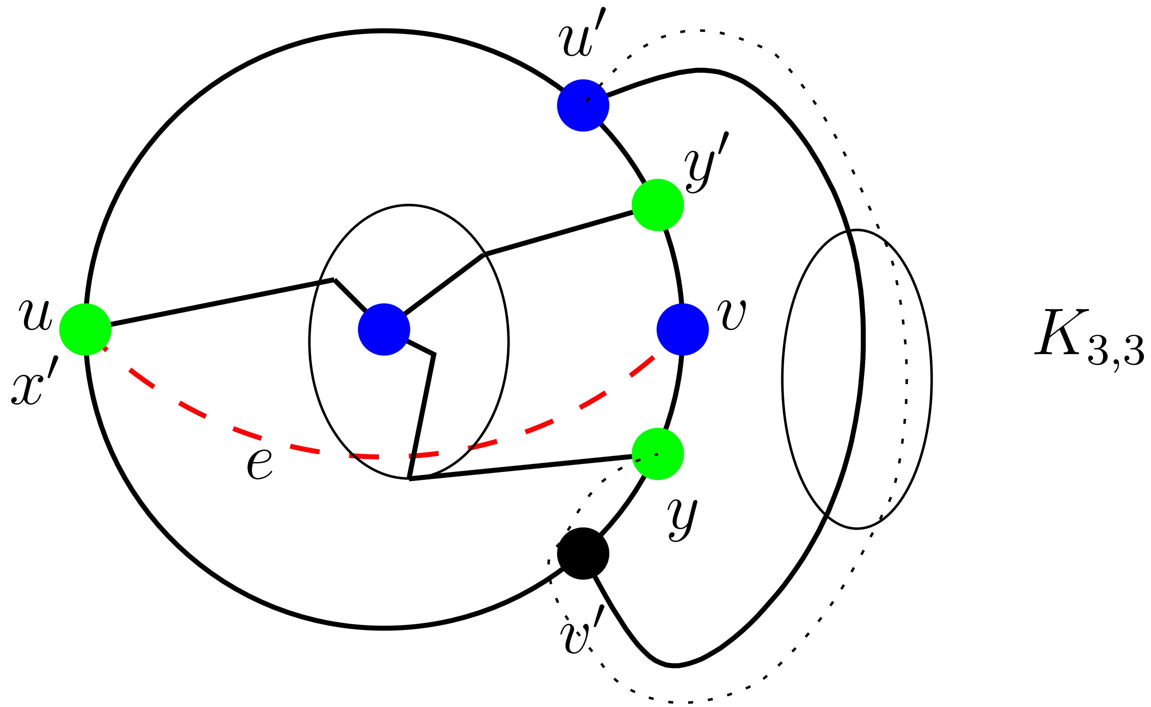
**3. viis.** $x' = u$ ja $y' \neq v$. Loeme, et $y'$ on $u'$ ja $v$ vahel.

**1. variant.** $y$ on $u$ ja $v'$ vahel.

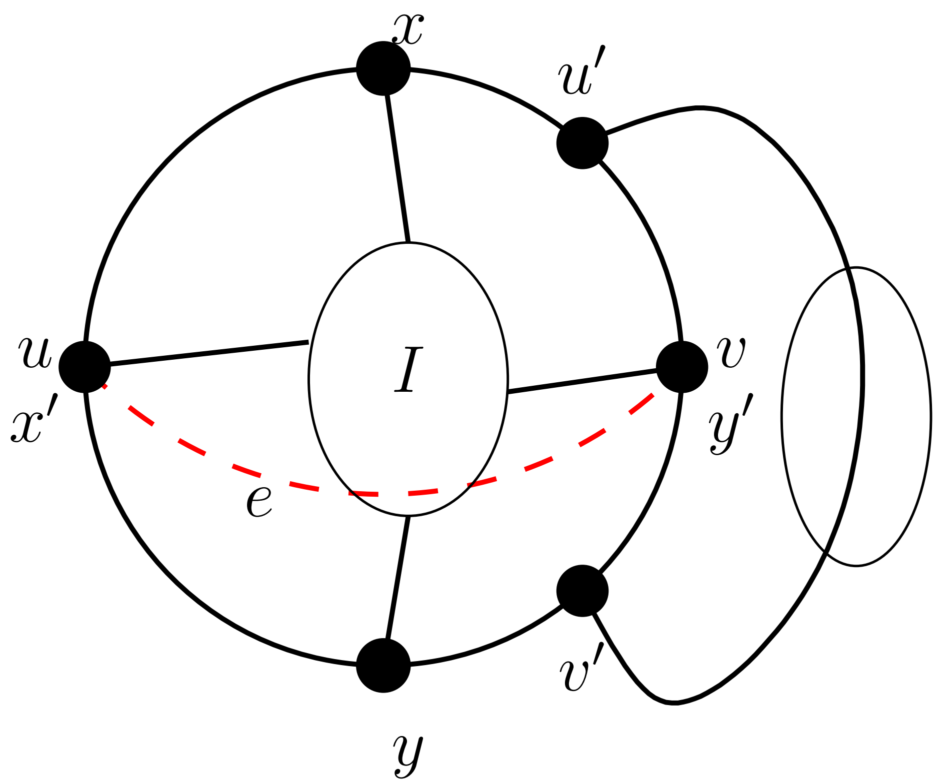


**3. viis.** $x' = u$ ja $y' \neq v$. Loeme, et $y'$ on $u'$ ja $v$ vahel.

**2. variant.** $y$ on $v'$ ja $v$ vahel või $y = v'$.



**4. viis.** $x' = u$ ja $y' = v$.

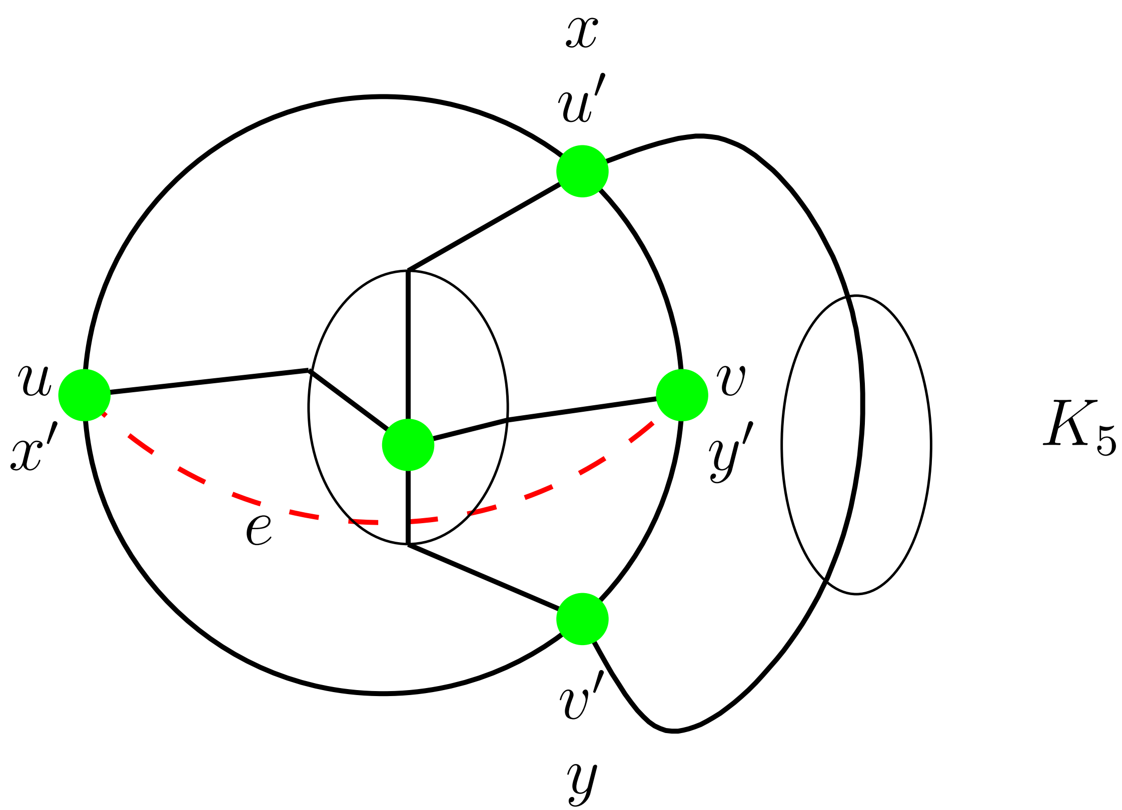



Kui $x$ ja $y$ ei ole $u'$ ja $v'$, siis vahetame tähistused ($u \leftrightarrow u'$, $v \leftrightarrow v'$, $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $e \leftrightarrow$ tee väljaspool tsüklit $C$). Siis realiseerub üks vaadatud kolmest viisist.

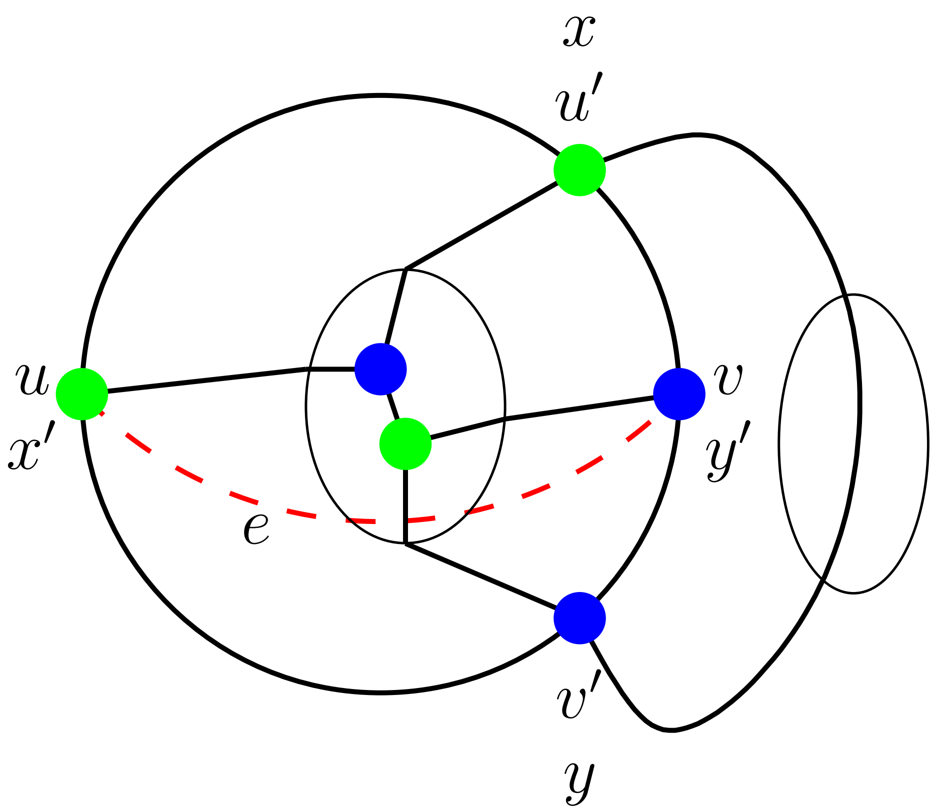
Võime eeldada, et $x' = u$, $y' = v$, $x = u'$, $y = v'$.

Sisemise komponendi tipud, mille naabriteks on $u, v, u', v'$, on selle komponendi sees kuidagi ühendatud.

Ühenduse esimene võimalik kuju:



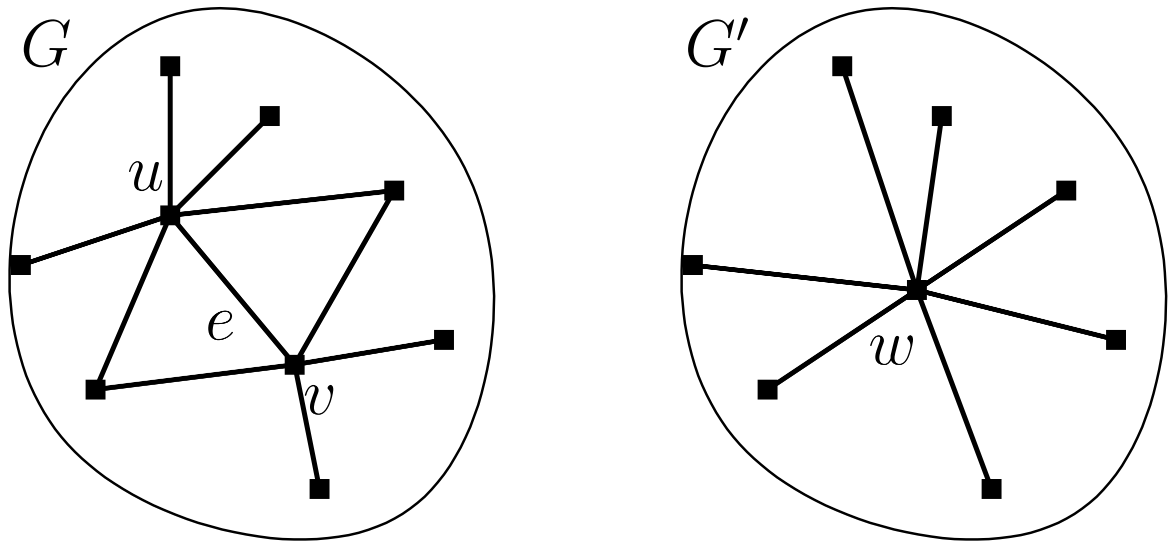
Ühenduse teine võimalik kuju:




$K_{3,3}$

Teoreem on tõestatud. $\square$

Serva *kokkutõmbamise* operatsioon ($G \Longrightarrow G'$):




Serva kokkutõmbamisel jääb tasandiline graaf tasandiliseks.

**Teoreem (Wagner).** Graaf on tasandiline parajasti siis, kui tal pole alamgraafi, mis on servi kokku tõmmates muudetav graafiks $K_5$ või $K_{3,3}$.

Tõestus: kodune ülesanne (kasuta Kuratowski teoreemi).