Euleri graafid

12. september 2002

Graaf G on paar (V, E), kus V on tippude hulk ja E on servade hulk. Lisaks sellele on antud *intsidentsusfunktsioon* $\mathcal{E}$, mis igale servale seab vastavusse tema otstippude hulga.

Ahel graafis G on jada

$$x_0 \overset{e_1}{\text{——}} x_1 \overset{e_2}{\text{——}} x_2 \overset{e_3}{\text{——}} x_3 \overset{e_4}{\text{——}} \ldots x_{k-1} \overset{e_k}{\text{——}} x_k,$$

kus $x_0, \ldots, x_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ ning $\mathcal{E}(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$.

Ahel on *kinnine*, kui esimene ja viimane tipp on sama.

Lihtahel on ahel, kus iga tipp esineb ülimalt ühe korra.

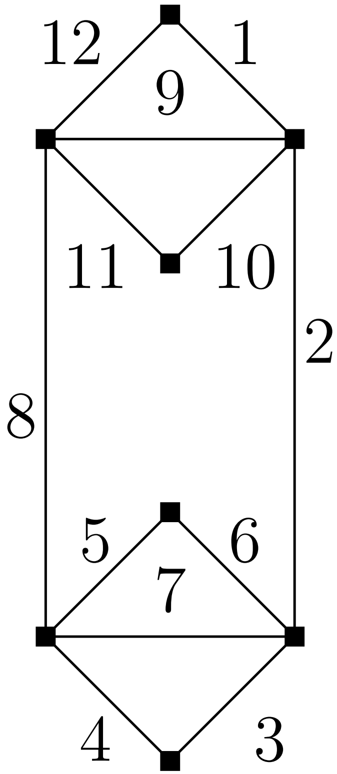
Tsükkel on kinnine lihtahel.

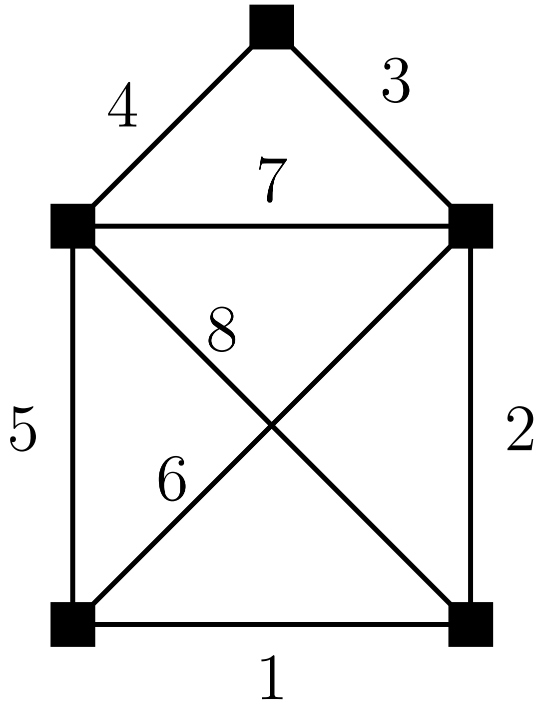
Euleri ahelaks graafis $G = (V, E)$ nimetatakse kinnist ahelat, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord.

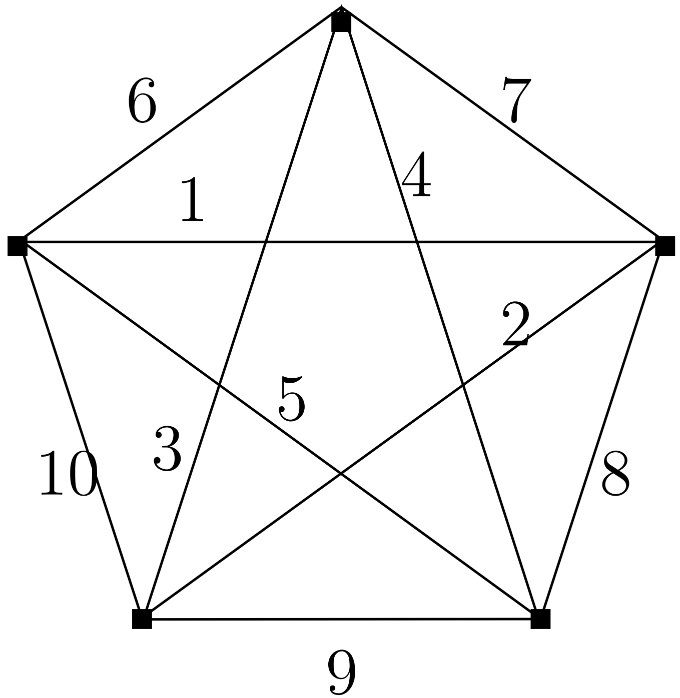
Euleri graafiks nimetatakse graafi, milles leidub Euleri ahel.

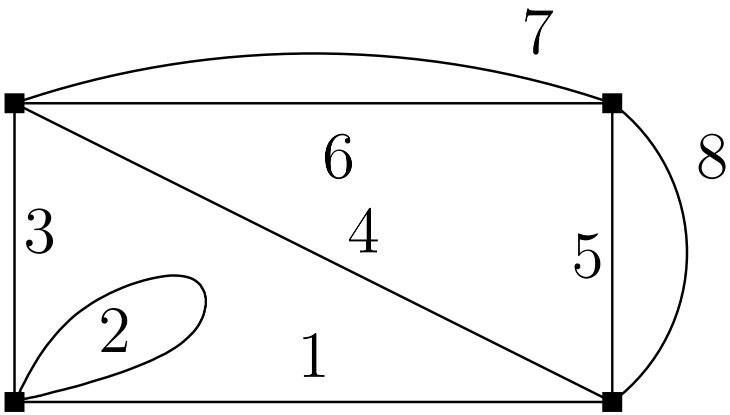
Graafi, milles leidub lahtine ahel, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord, nimetatakse *pool-Euleri graafiks*.

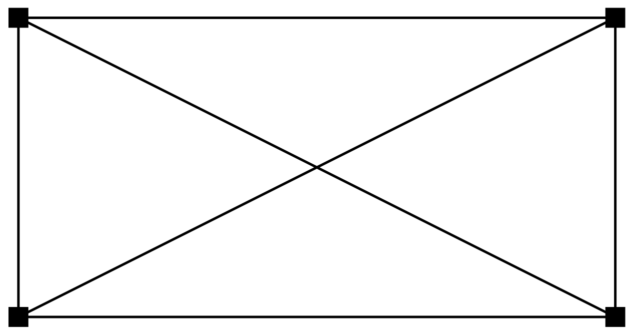
Levinud näidete klass: joonistada etteantud kujund pliiatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont mitu korda tõmbamata.

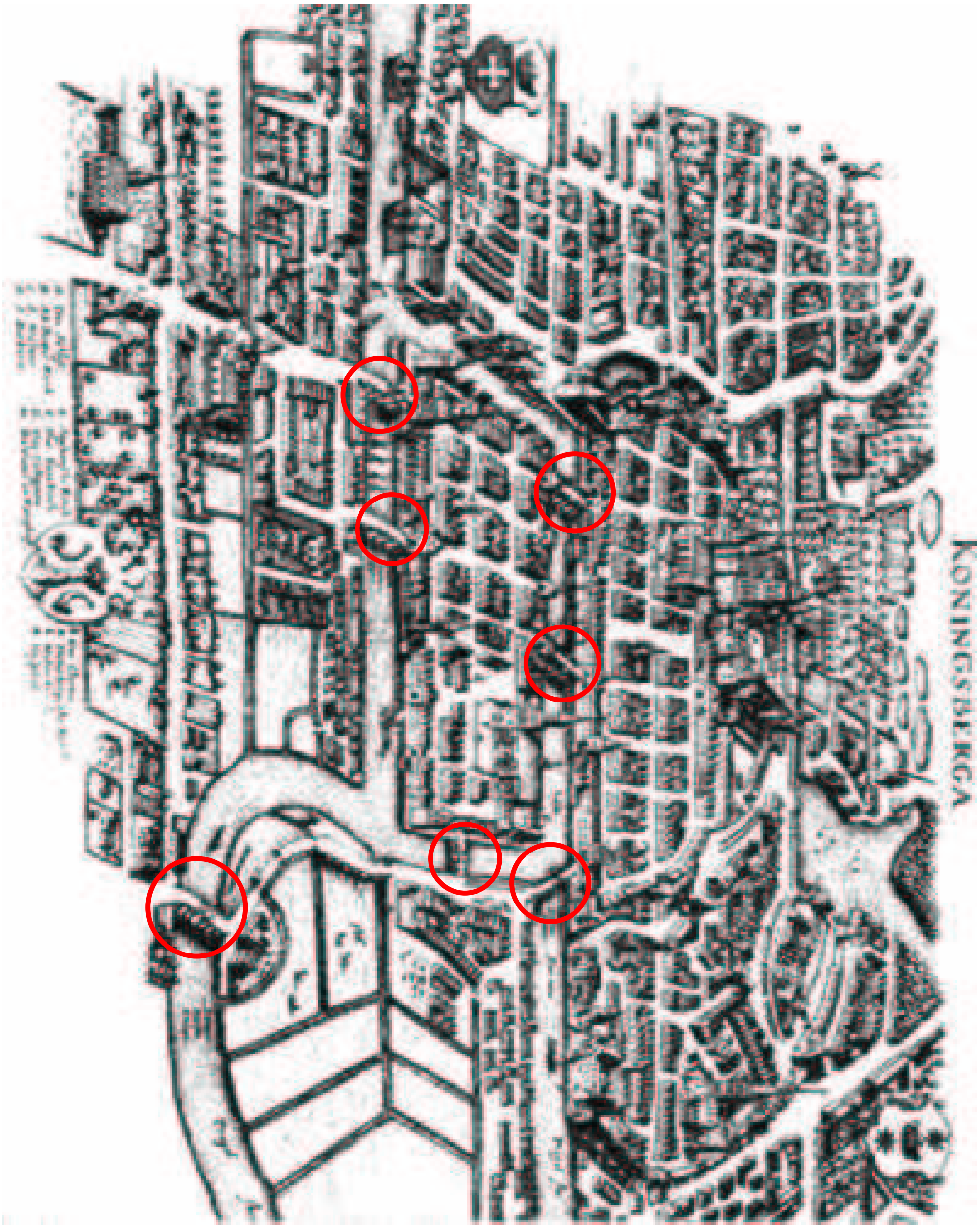

12
1
9
11
10
2
8
5
6
7
4
3

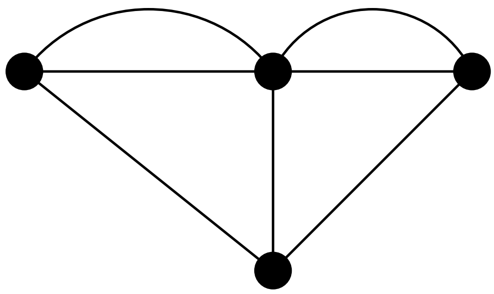

4
3
7
8
5
2
6
1


6
7
4
1
2
5
3
10
8
9


7
8
6
3
4
5
2
1




KONINGSBERGA



Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf. Järgmised kolm väidet on samaväärsed.

(i). G on Euleri graaf.

(ii). G kõigi tippude aste on paarisarv.

(iii). E esitub paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.

Tõestus (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu P graafi G mingi Euleri ahel ja olgu $v \in V$.

Ahel P siseneb tippu mingi arv kordi ning väljub temast sama arv kordi. Seega on ahelasse P kuuluvate tipuga v intsidentsete servade arv paarisarv.

P on Euleri ahel, seega esineb iga tipuga v intsidentne serv ahelas P täpselt ühel korral.

Tõestus (ii)$\Rightarrow$(iii). Induktsioon üle $|E|$.

Baas. $|E| = 0$. Siis esitub E nulli tüki ühendina, igaüks neist nullist on ....

Samm. $|E| > 0$. Siis on kõigi tippude aste nullist suurem, sest G on sidus.

Vastavalt eeldusele on kõigi tippude aste vähemalt kaks.

Vastavalt teoreemile eelmisest loengust leidub G-s mingi tsükkel C.

Teoreem. Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

Olgu G' saadud G-st, eemaldades sealt C-sse kuuluvad servad.

Graafis G' on vähem servi kui G-s ning kõigi tippude aste on endistviisi paarisarv.

Olgu $H_1, \ldots, H_k$ graafi G' sidususkomponendid. Induktsiooni eelduse järgi esitub neist igaühe servade hulk paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.

Võttes nende esituste ühendi ja lisades sinna veel tsükli C, saame E esituse lõikumatute tsüklite ühendina.

Tõestus (iii)$\Rightarrow$(i). Olgu $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \cdots \dot\cup C_n$, kus $C_1, \ldots, C_n$ on tsüklid.

Üldsust kitsendamata eeldame, et tsüklil C_i, kus $i > 1$, on ühiseid tippe mõne tsükliga C_j, kus $j < i$.

Konstrueerime kinnised ahelad $P_1, \ldots, P_n$. Konstruktsioon tagab, et P_i läbib tsüklite $C_1, \ldots, C_i$ iga serva täpselt üks kord ning ei läbi ühtegi ülejäänud serva.

Ahelaks P_1 võtame tsükli C_1.

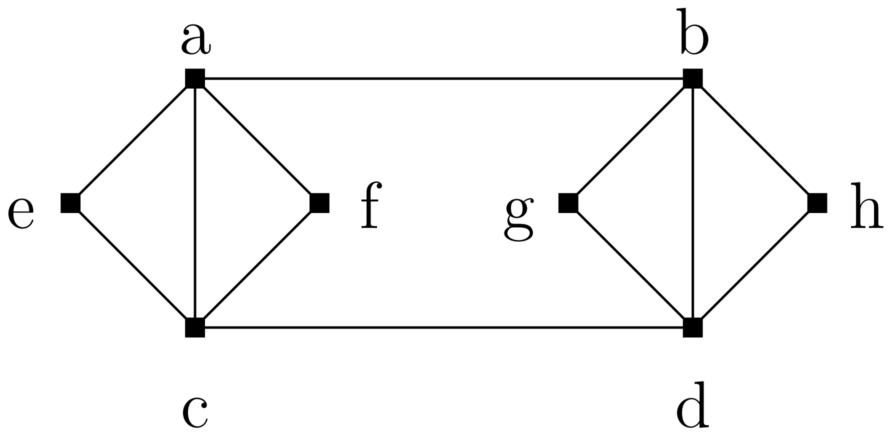
Ahela P_i saame ahelast P_{i-1} järgmisel viisil.

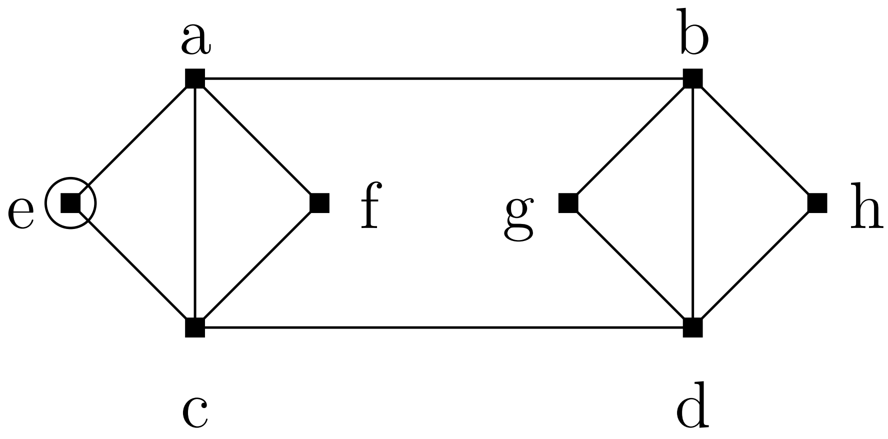
- Liigume ahelas P_{i-1} senikaua, kuni jõuame mingi tipuni v, mis esineb ka tsüklis C_i.
- Läbime tsükli C_i, alustades ja lõpetades tipus v.
- Läbime ülejäänud osa ahelast P_{i-1}.

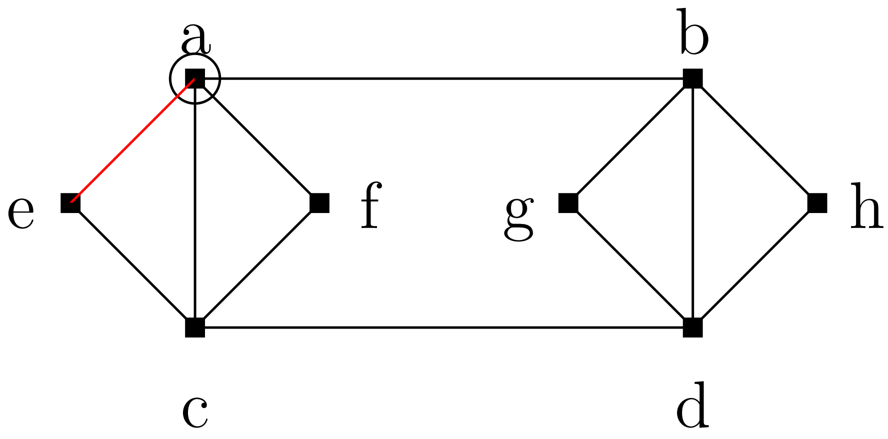
Ahel P_n on Euleri ahel graafis G. $\square$

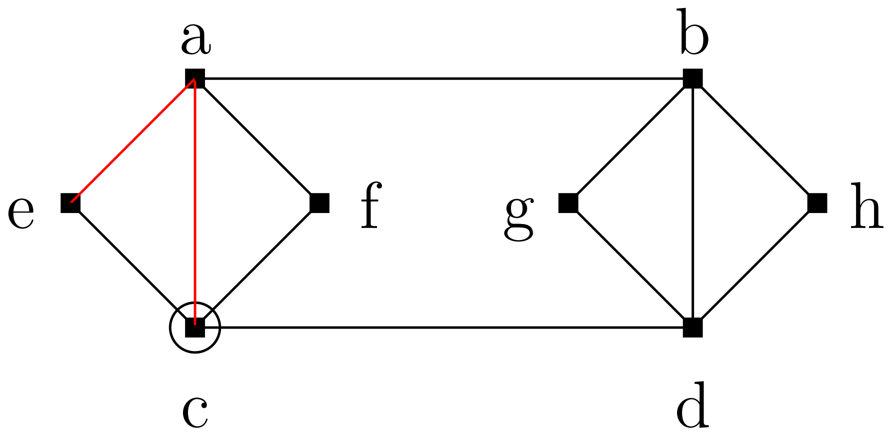
Tõestus annab algoritmi Euleri ahela leidmiseks graafis G:

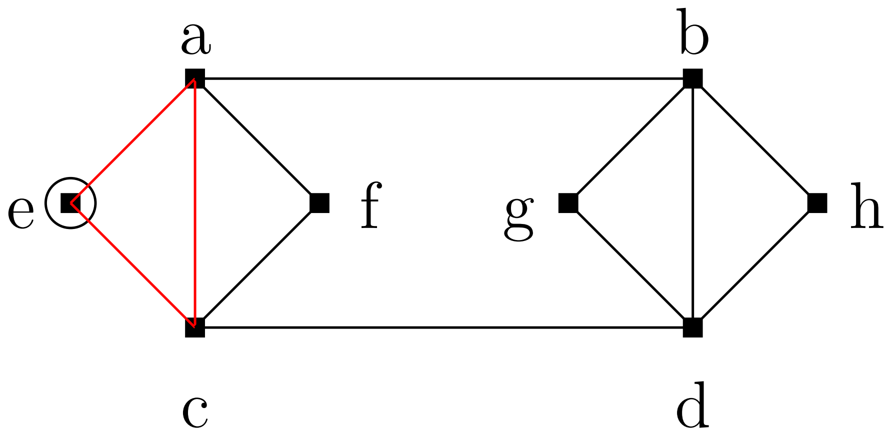
- Tükeldame G servad tsükliteks.
  - Leiame graafist G ühe tsükli, olgu see C.
    - Liigume G-s mööda servi, kuni jõuame tippu, kus oleme juba olnud.
  - Eemaldame C servad G-st.
  - Tükeldame G (ilma C-ta) sidususkomponentide servad tsükliteks.
  - Tagastame need tsüklid ja lisaks veel tsükli C.
- Paneme tsüklitest kokku Euleri ahela (vt. eelmine slaid).

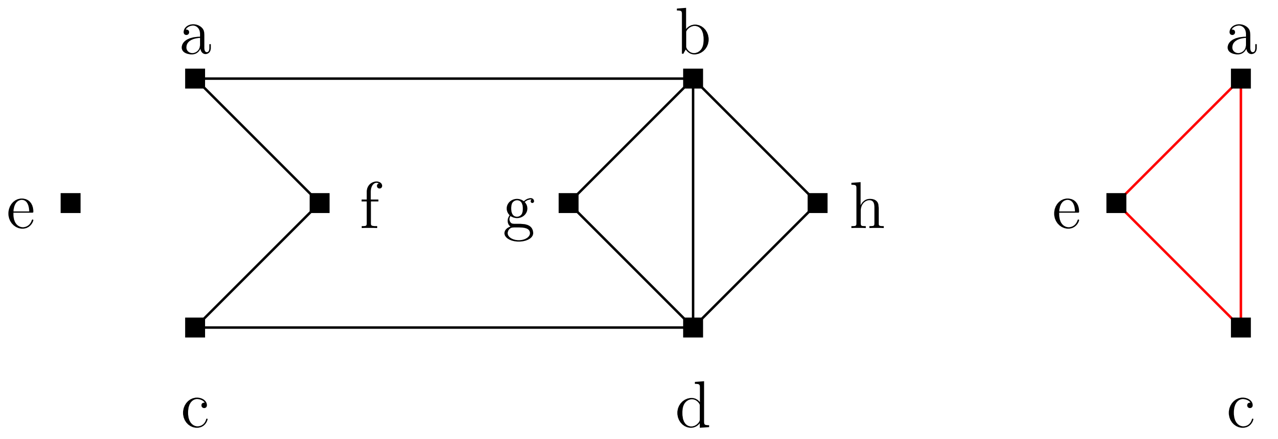

a
b
e
f
g
h
c
d

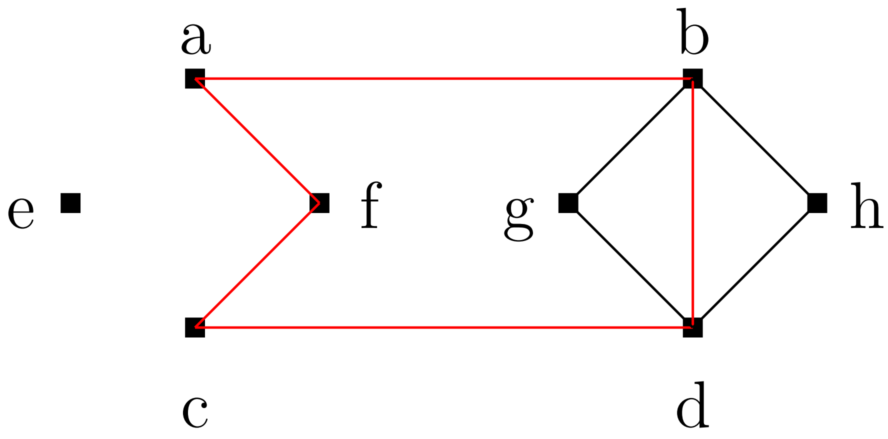

a
b
e
f
g
h
c
d

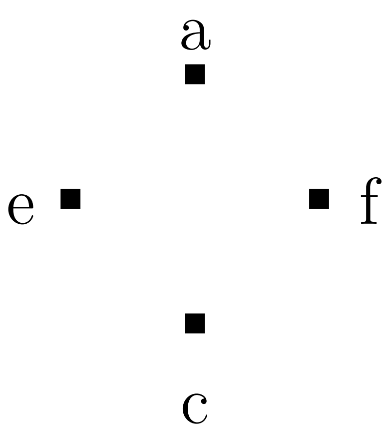

a
b
e
f
g
h
c
d

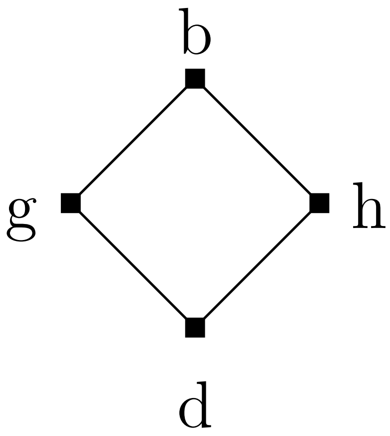

a
b
e
f
g
h
c
d

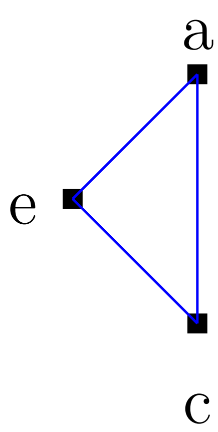

a
b
e
f
g
h
c
d

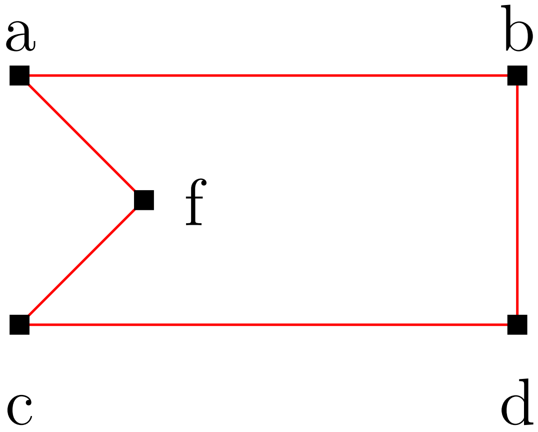

a
b
e
f
g
h
c
d
a
e
c

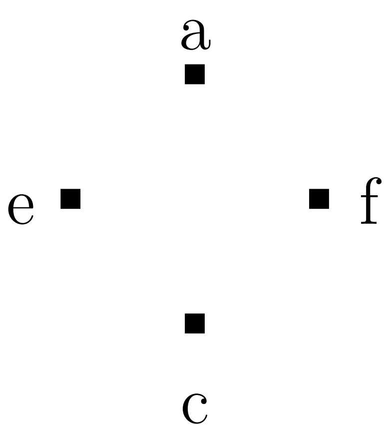

a
b
a
e
f
g
h
e
c
d
c

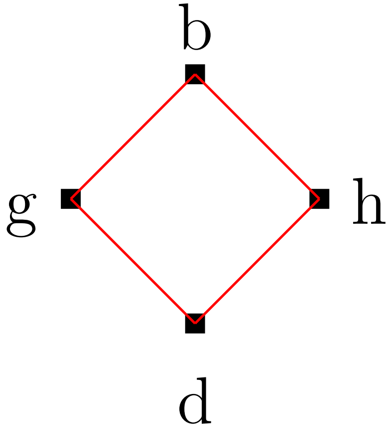

a
e
f
c

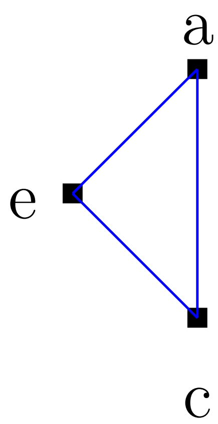

b
g
h
d

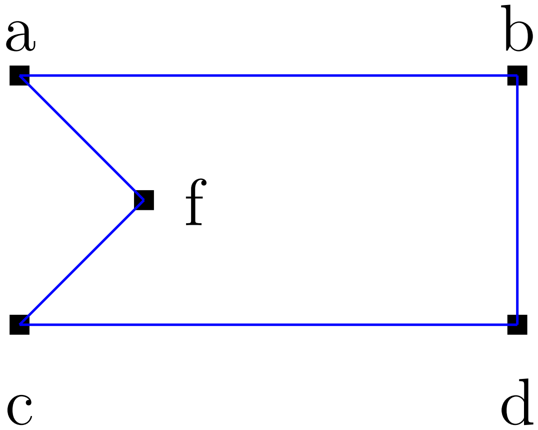

a
e
c

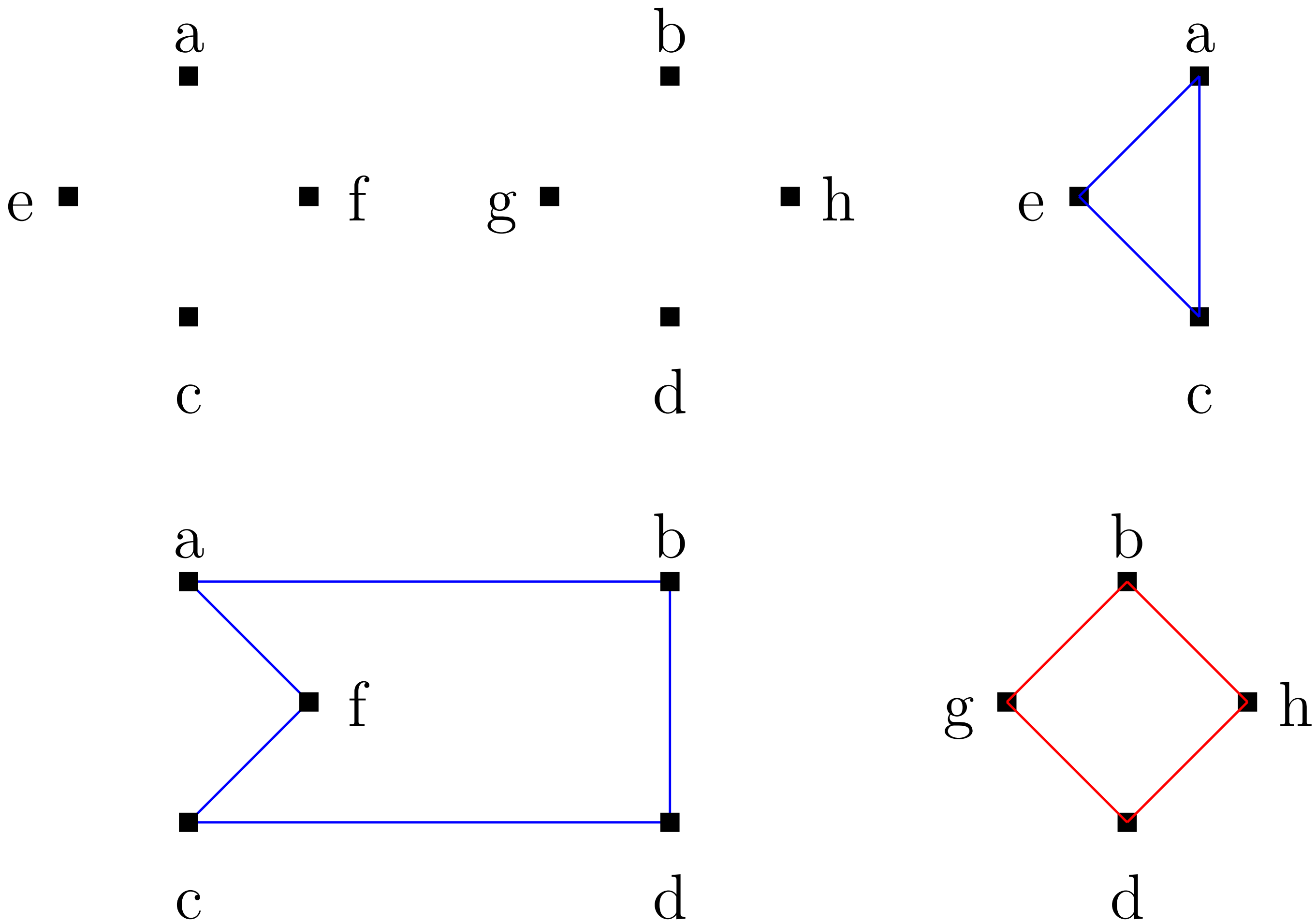

a
b
f
c
d

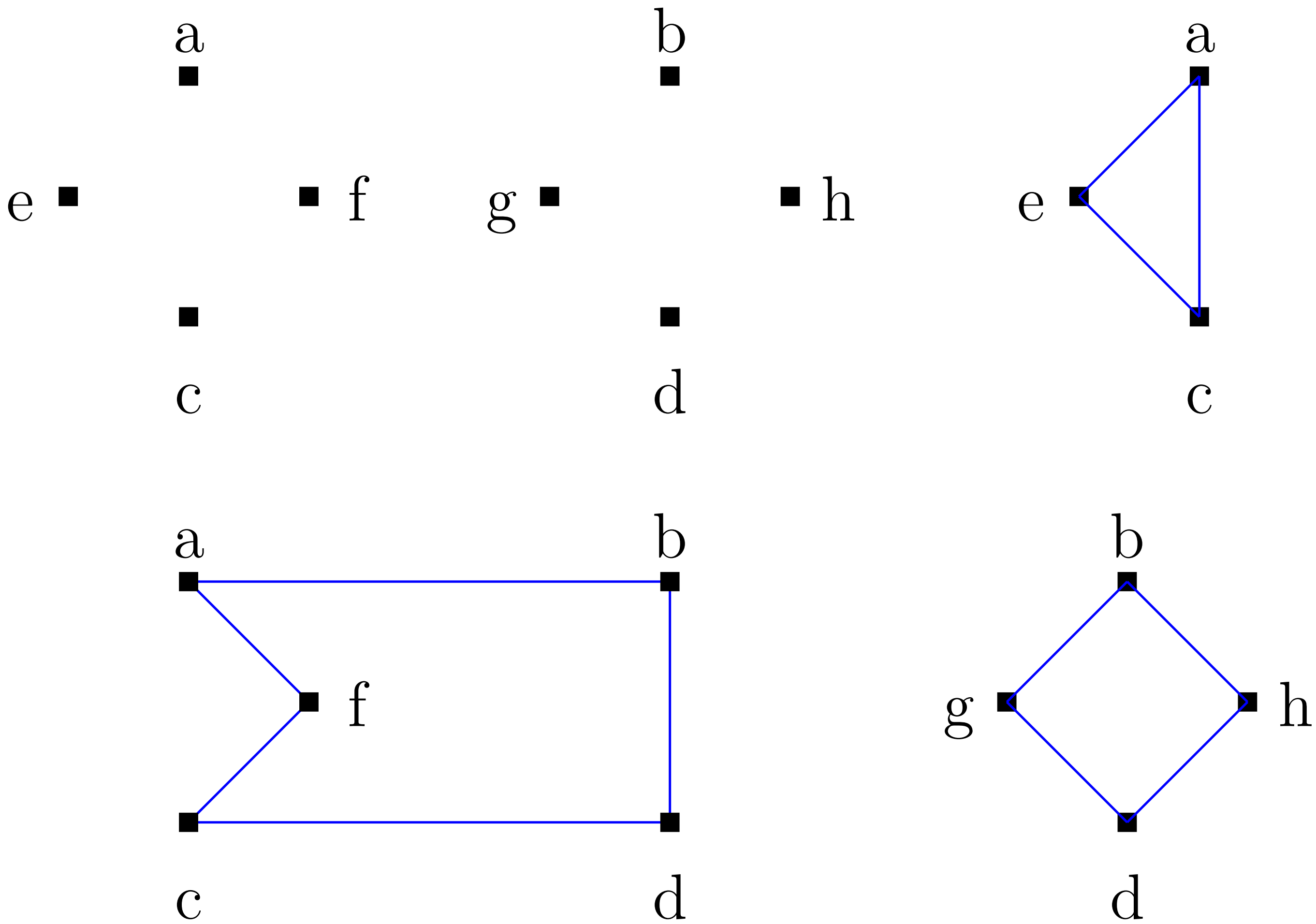

a
e
f
c

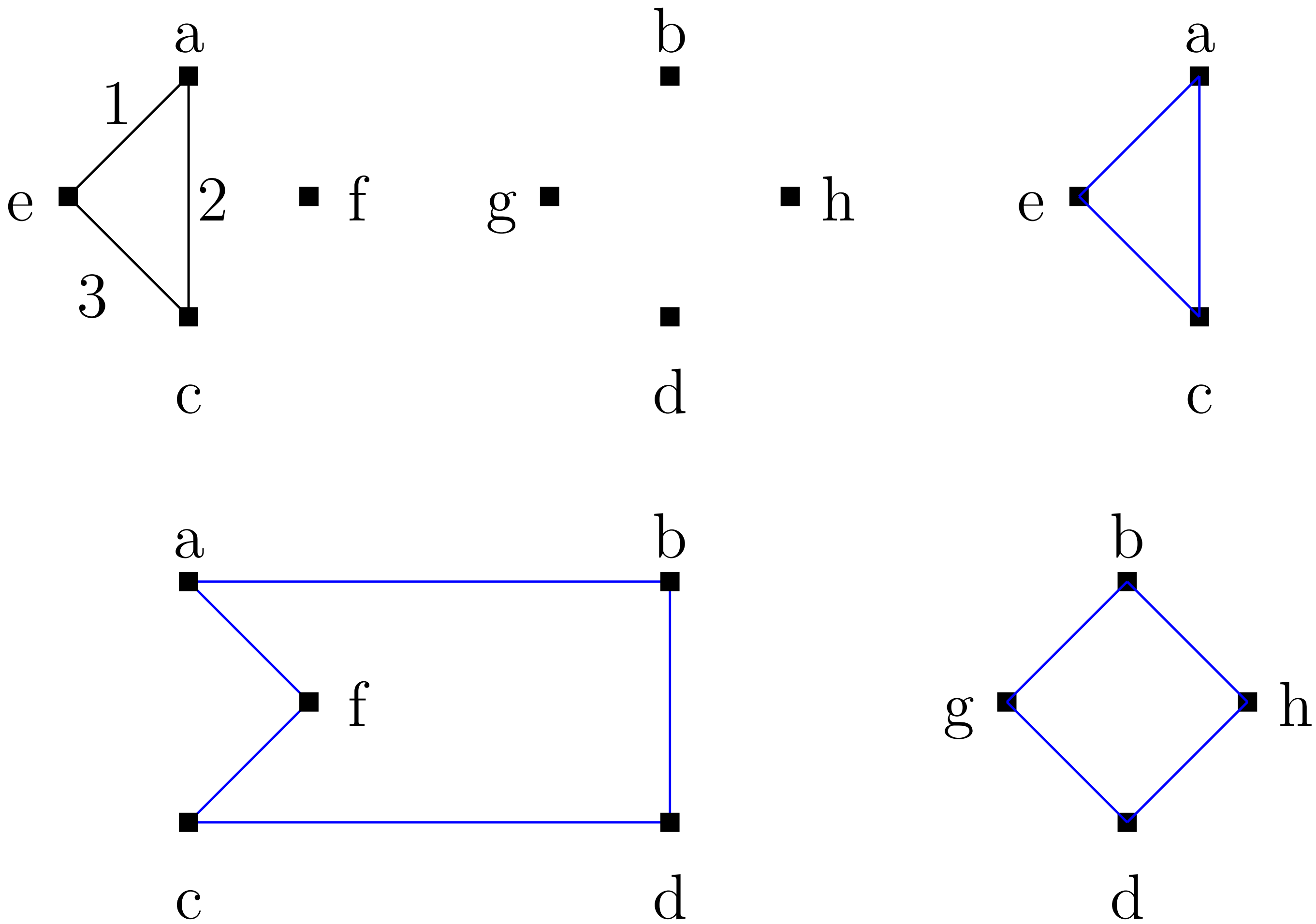

b
g
h
d


a
e
c

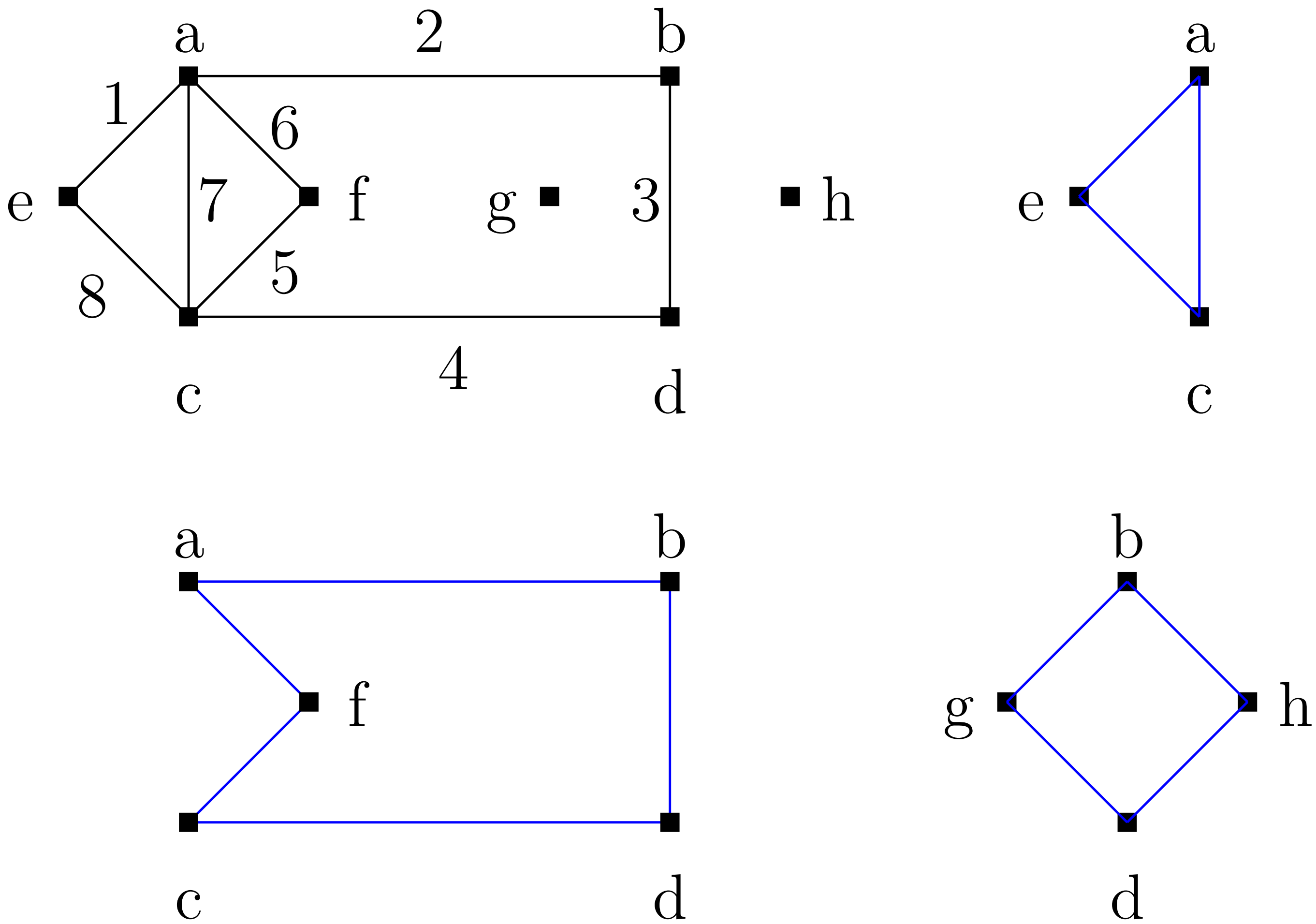

a
b
f
c
d


a
b
a
e
f
g
h
e
c
d
c
a
b
b
f
g
h
c
d
d

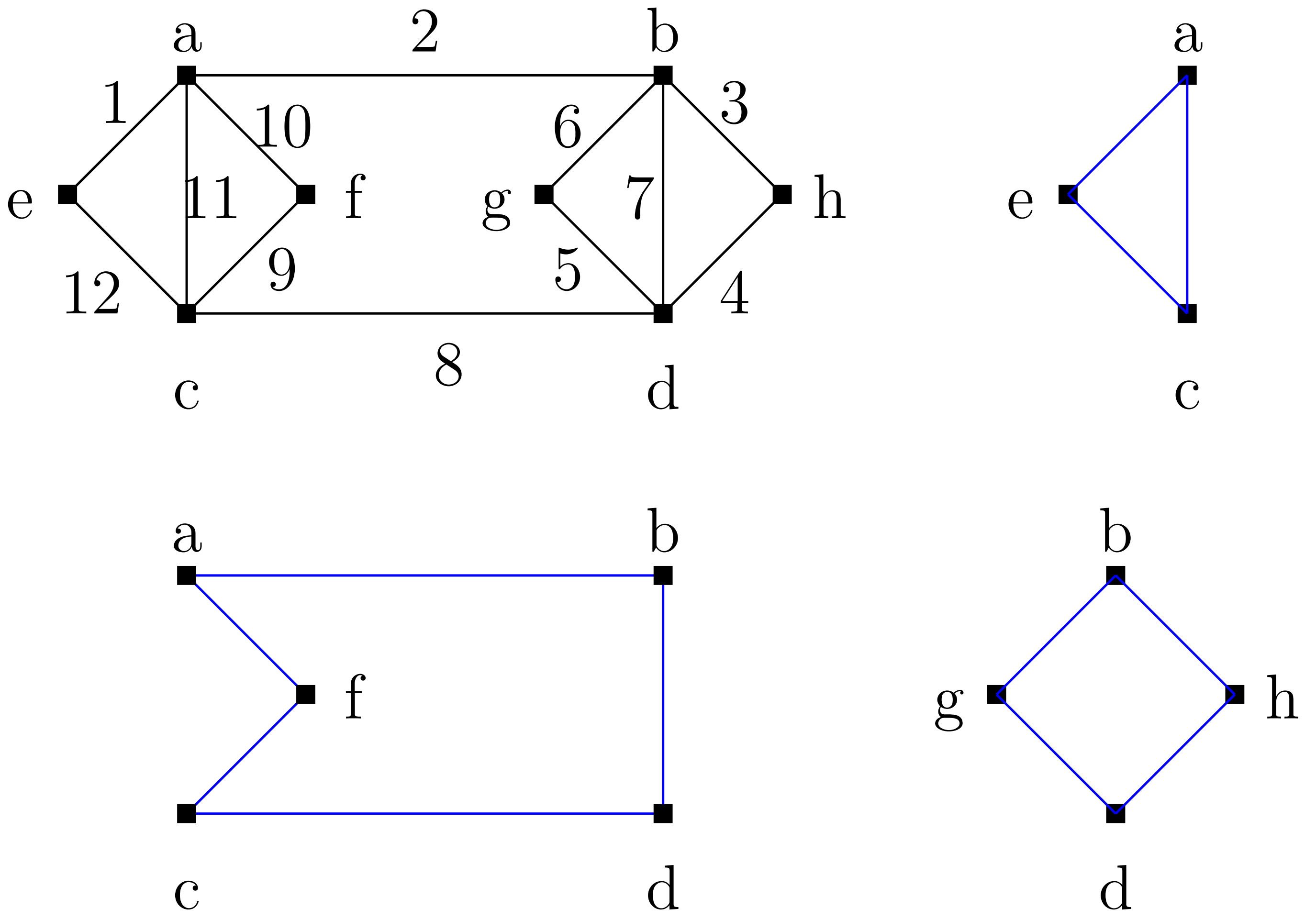

a
b
a
e
f
g
h
e
c
d
c
a
b
b
f
g
h
c
d
d



a
b
a
1
e
2
f
g
h
e
3
c
d
c
a
b
b
f
g
h
c
d
d



a
b
c
d
e
f
g
h
1
2
3
4
5
6
7
8



a
2
b
1
10
6
3
e
11
f
g
7
h
12
9
5
4
c
8
d
a
e
c
a
b
f
c
d
b
g
h
d

Järeldus. Sidus graaf G on pool-Euleri $\Leftrightarrow$ graafis G on täpselt kaks paarituarvulise astmega tippu.

Tõestus $\Rightarrow$. Olgu $x \overset{P}{\rightsquigarrow} y$ ahel graafis G, mis läbib G iga serva täpselt ühe korra.

Lisame G-le täiendava serva e, nii et $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$.

Saadud graaf on Euleri graaf ($x \overset{P}{\rightsquigarrow} y \overset{e}{\longrightarrow} x$ on Euleri ahel), seega on seal kõigi tippude aste paarisarvuline.

Esialgses graafis on x ja y paarituarvulise ning ülejäänud tipud paarisarvulise astmega.

Tõestus $\Leftarrow$. Olgu x ja y graafi G paarituarvulise astmega tipud.

Lisame G-le täiendava serva e, nii et $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$.

Saadud graafis on kõigi tippude aste paarisarvuline, seega leidub seal mingi Euleri ahel P.

Üldsust kitsendamata eeldame, et viimane serv ahelas P on e.

Ahel P ilma servata e on ahel, mis läbib graafi G iga serva täpselt ühe korra. $\square$

Tõestus annab algoritmi pool-Euleri ahela leidmiseks:

> Lisame graafi täiendava serva e ja leiame Euleri ahela.