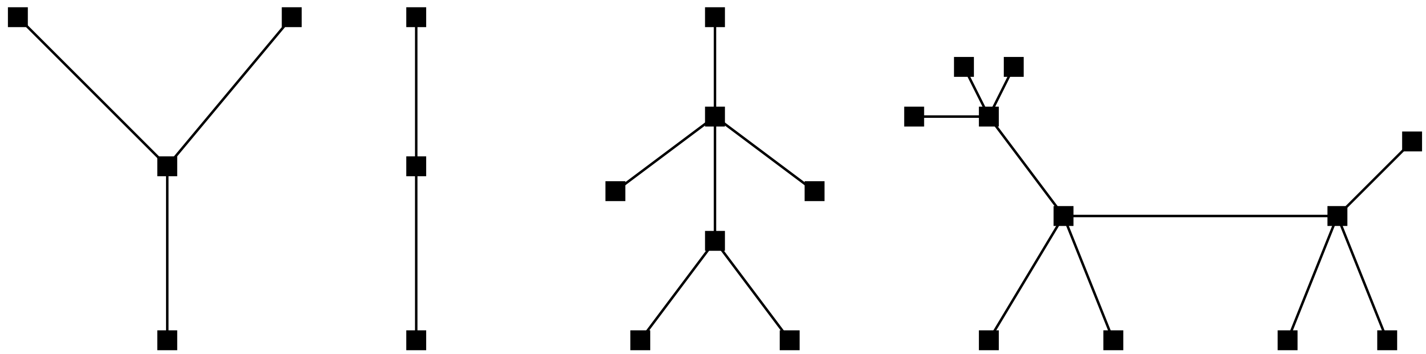
# Puud

26. september 2002

Graafi, kus pole tsükleid, nimetatakse *metsaks*.

Sidusat metsa nimetatakse *puuks*.



Tippu, mille aste on 1, nimetatakse *leheks*.

**Lause.** Iga puu on kahealuseline graaf.

Tõestus. Hakkame mingist tipust alates tippe alustesse jaotama. Meil ei saa tekkida vastuolu, sest tsükleid ei ole. $\square$

**Lause.** Olgu $G$ $n$-tipuline graaf, millel on $m$ serva ja $k$ sidususkomponenti. Sel juhul $n - k \leq m$.

Tõestus. Induktsioon üle $m$.

Kui $m = 0$, siis on $G$ iga tipp eraldi sidususkomponent, s.t. $k = n$. Võrratus kehtib.

Olgu $m > 0$. Eemaldame graafist $G$ ühe serva, saades $m - 1$ servaga graafi. On kaks võimalust:

- Sidususkomponentide arv ei suurenenud. Induktsiooni eeldusest saame $n - k \leq m - 1$. Seega ka $n - k \leq m$.
- Sidususkomponentide arv suurenes ühe võrra. Induktsiooni eeldusest saame $n - (k + 1) \leq m - 1$. Seega ka $n - k \leq m$. $\square$

**Teoreem.** Olgu $T = (V, E)$ $n$-tipuline graaf. Suvalisest kahest järgmisest väitest järeldub kolmas.

(i). $T$ on sidus.

(ii). $T$ on tsükliteta.

(iii). $T$-s on $n - 1$ serva.

See teoreem annab kaks alternatiivset puu definitsiooni.

Tõestus.

(i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii). Induktsioon üle $n$.

Kui $T$-s on üks tipp, siis on $T$ kõik servad silmused, seega kujutab $T$ iga serv endast tsüklit. Tingimuse (ii) järgi on $T$ tsükliteta, järelikult ka servadeta.

Olgu graafis $T$ $n$ tippu.

$T$ on tsükliteta $\Longrightarrow$ $T$-s leidub tipp $v$ astmega 0 või 1.

**Teoreem.** Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

$T$ on sidus $\Longrightarrow$ tipu $v$ aste ei ole 0.

Indutseeritud alamgraaf $T'$ tipuhulgaga $V \backslash \{v\}$ on sidus ja tsükliteta, induktsiooni eelduse järgi on temas $n-2$ serva.

Graafis $T$ on üks serv rohkem kui graafis $T'$.

(ii) & (iii) $\Rightarrow$ (i). Oletame, et $T$ ei ole sidus.

Olgu $T_1, \ldots, T_k$ graafi $T$ sidususkomponendid. Nad kõik on tsükliteta ja sidusad, seega on juhu (i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii) järgi neis kõigis servi ühe võrra vähem kui tippe.

Kokkuvõttes saame, et graafis $T$ on $n - k$ serva. Kuna $T$-s on $n - 1$ serva, siis $k = 1$, s.t. $T$ on sidus.

(i) & (iii) $\Rightarrow$ (ii). Oletame, et $T$-s on tsükkel. Eemaldame sellest tsüklist ühe serva, siis on meil $n$ tipuga ja $n-2$ servaga sidus graaf. Vastuolu eelpool tõestatud lausega. $\square$

**Teoreem.** Graaf $T$ on puu parajasti siis, kui ta on sidus ja tema iga serv on sild.

Tõestus. Suund $\Rightarrow$. Olgu $T$-s $n$ tippu ja $n-1$ serva. Vaatame mingit serva. Kui me ta eemaldame, jääb järgi $n$ tipuga ja $n-2$ servaga graaf, mis vastavalt esimesele lausele on mittesidus. Seega on see serv sild.

Suund $\Leftarrow$. Kui $T$-s leiduks mõni tsükkel, siis sinna tsüklisse kuuluvad servad ei ole sillad — neist mõne eemaldamisel jääks graaf endiselt sidusaks. Seega on $T$ tsükliteta (ja vastavalt teoreemi eeldusele sidus). $\square$

**Teoreem.** Olgu $T$ graaf, milles on $n$ tippu. Järgmised väited on samaväärsed.

1. $T$ on puu.
2. $T$ suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.
3. $T$ on tsükliteta, aga serva lisamisel ükskõik millise kahe tipu vahele tekib tsükkel.

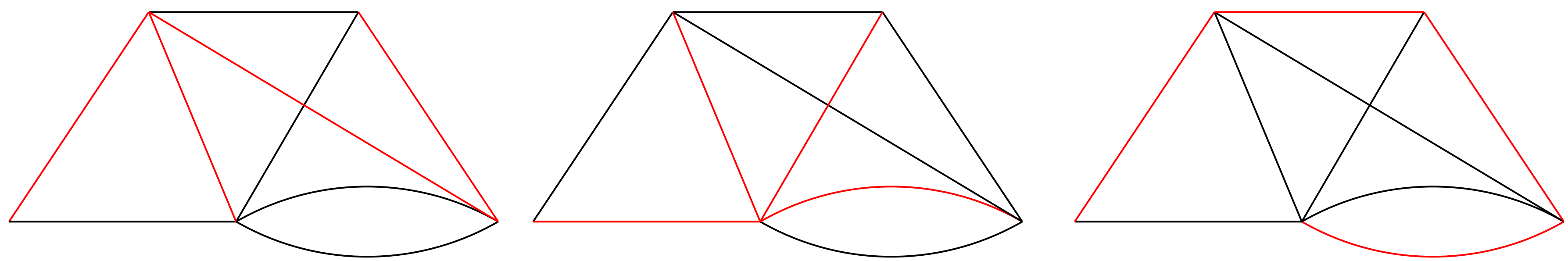
Tõestus. $1 \Rightarrow 2$. Suvalise kahe tipu vahel on vähemalt üks lihtahel, muidu poleks $T$ sidus. Kui mõne kahe tipu vahel leiduks mitu erinevat lihtahelat, siis need ahelad koos moodustaksid tsükli, seega poleks $T$ siis puu.

$2 \Rightarrow 3$. $T$ on tsükliteta, sest tsüklil olevate tippude vahel leidub vähemalt kaks erinevat lihtahelat. Tippude $u$ ja $v$ vahele uue serva $e$ lisamisel tekib tsükkel $u \rightsquigarrow v \overset{e}{\text{---}} u$.

$3 \Rightarrow 1$. Oletame, et $T$ ei ole sidus. Serva lisamisel erinevatesse sidususkomponentidesse kuuluvate tippude vahele tsüklit ei teki. Vastuolu eeldusega. $\square$

Sidusa graafi $G = (V, E)$ *aluspuu* on selle graafi alamgraaf $T$, mis on puu tipuhulgaga $V$.

Mittesidusa graafi korral võime rääkida tema *alusmetsast* — selle graafi sidususkomponentide mingite alampuude ühendist.



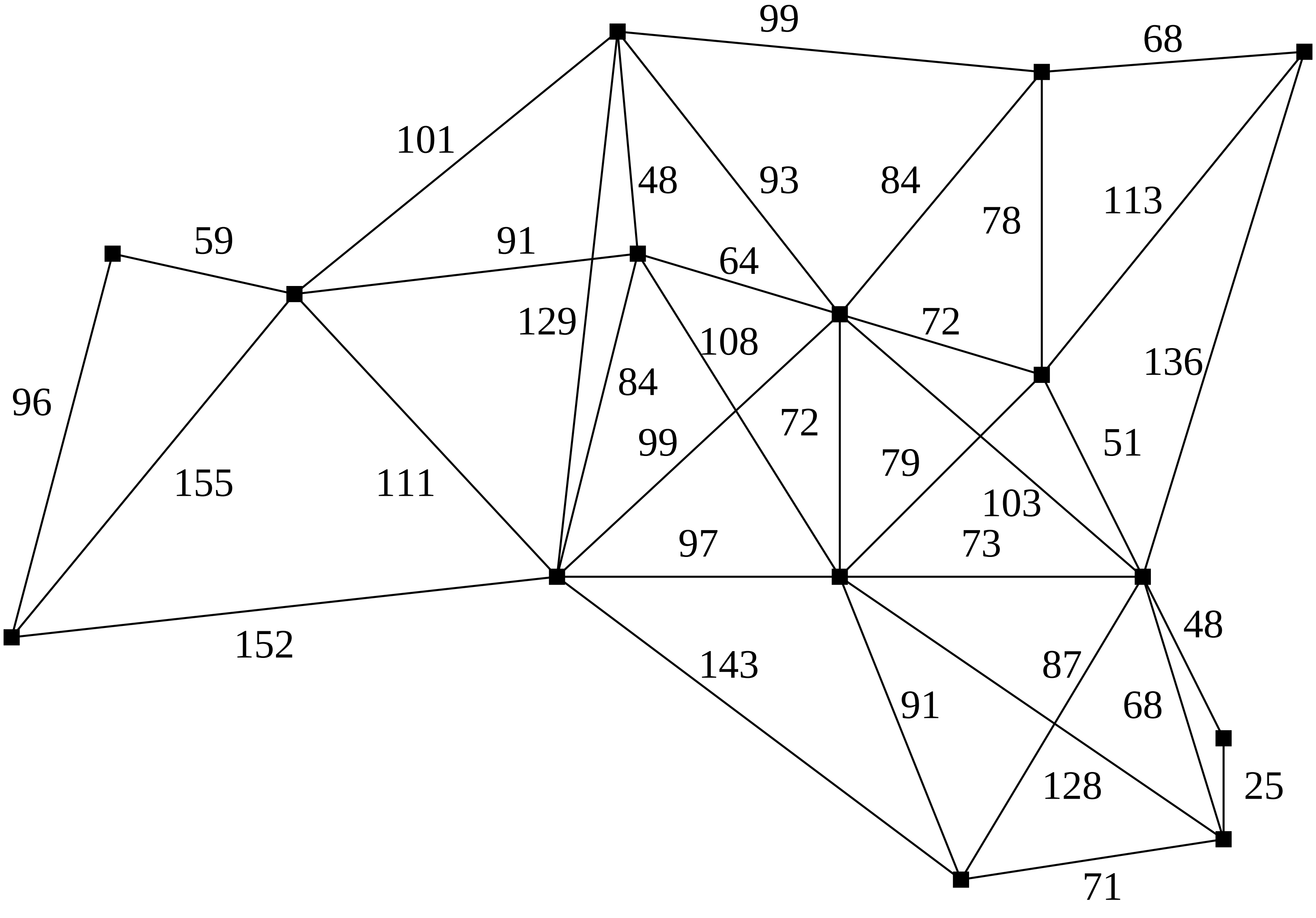
Olgu $G = (V, E)$ mingi $n$-tipuline graaf ning olgu iga serva $e \in E$ jaoks defineeritud tema *kaal* $w(e)$.

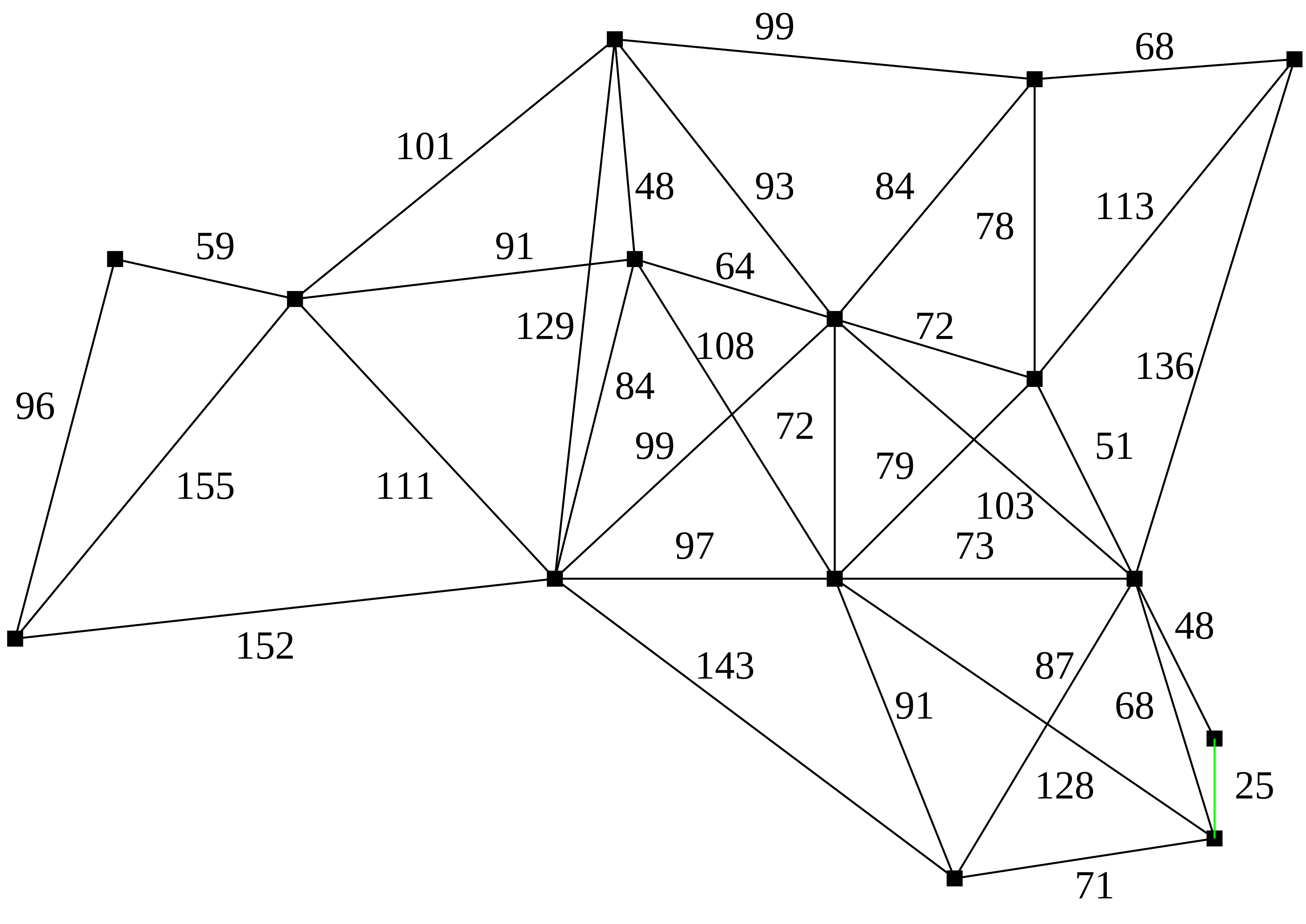
Kui $G' = (V', E')$ on $G$ alamgraaf, siis olgu $w(G') = \sum_{e \in E'} w(e)$.

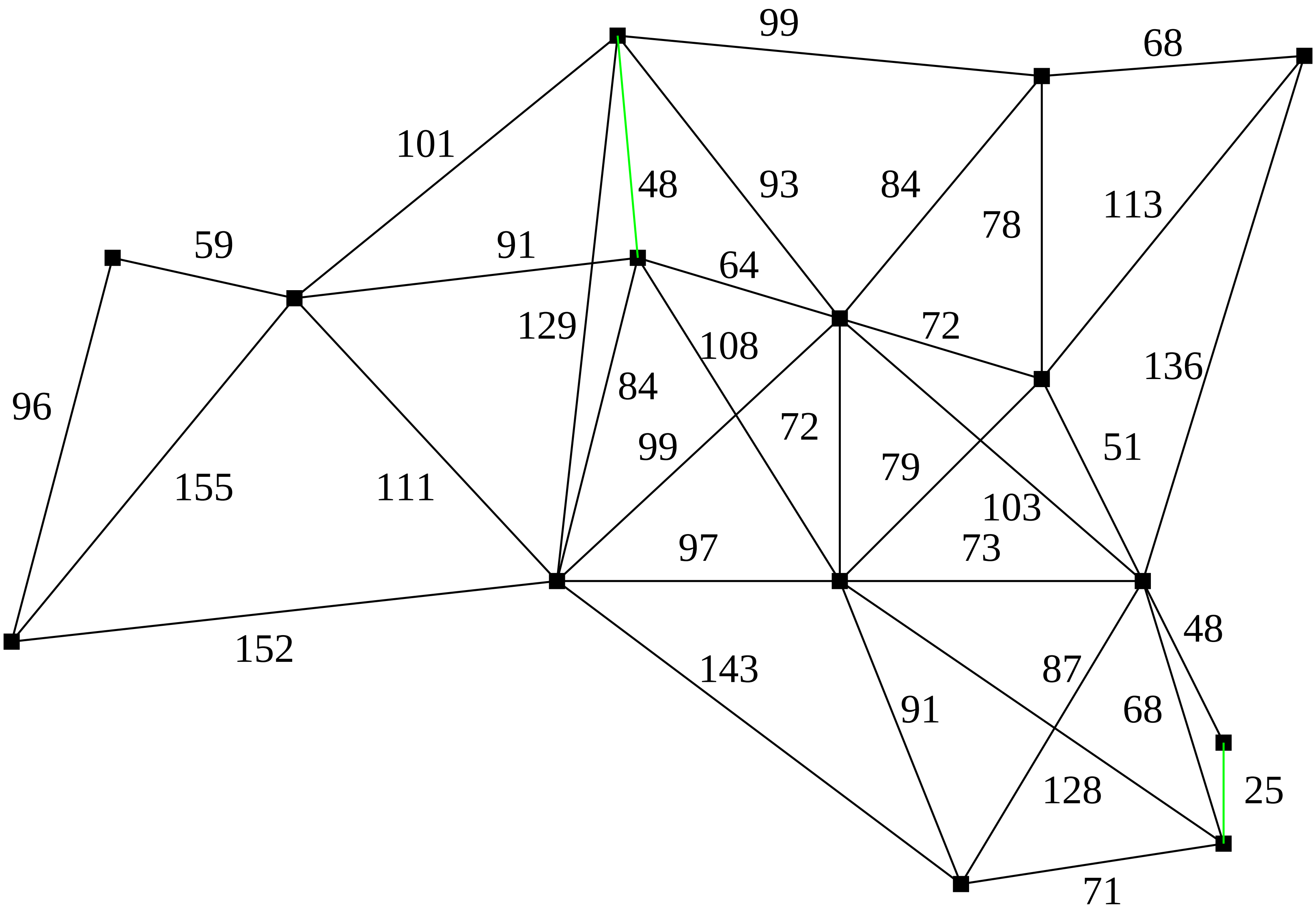
**Algoritm (minimaalse kaaluga aluspuu leidmiseks $G$-s).** Vali üksteise järel servad $e_1, \ldots, e_{n-1}$, nii et

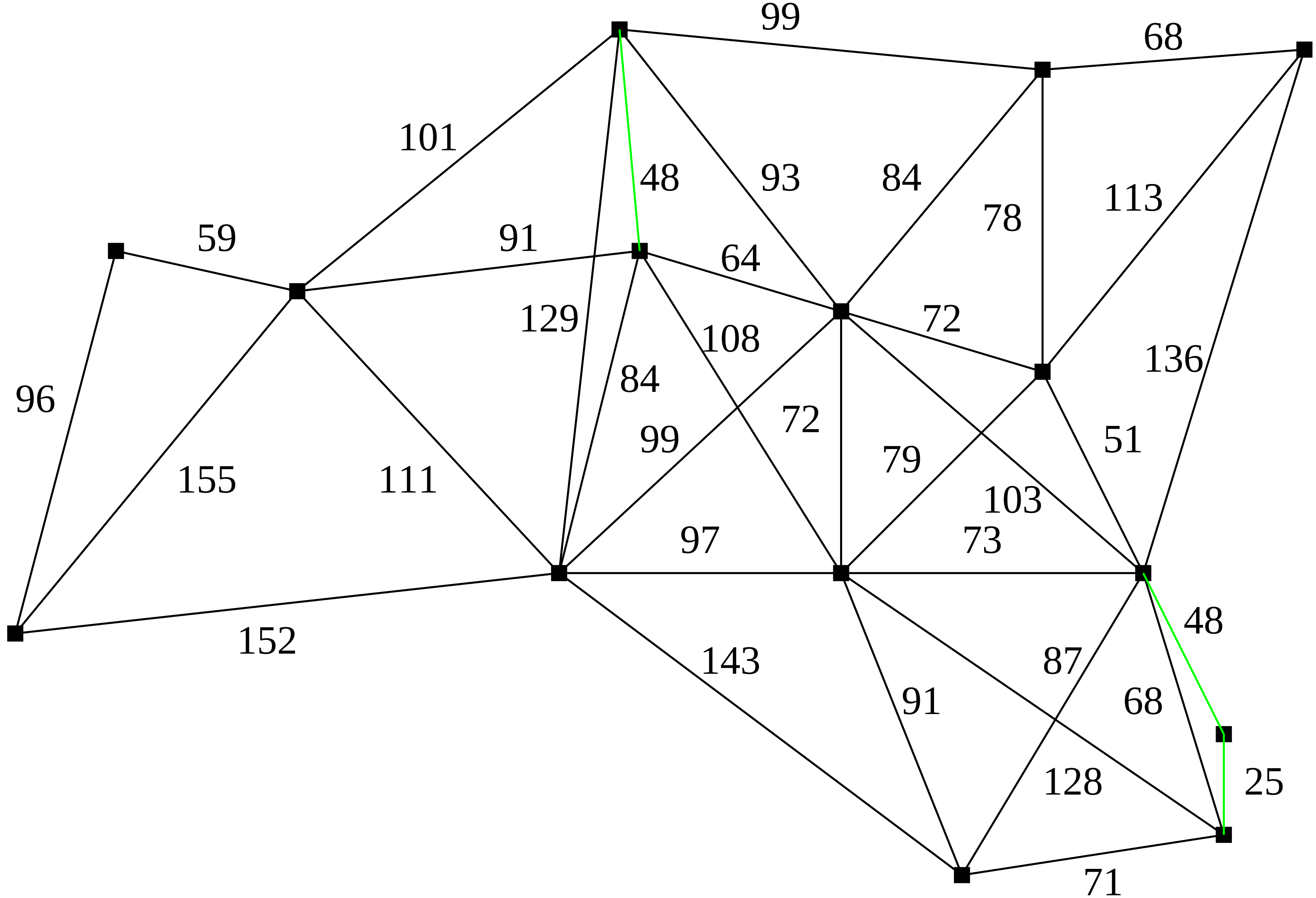
- $e_i$ on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}$;
- $e_i$ ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{i-1}$ tsüklit;
- $e_i$ on minimaalse kaaluga eelmist kahte punkti rahuldavate servade seas.

Väljasta $T = (V, \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$.

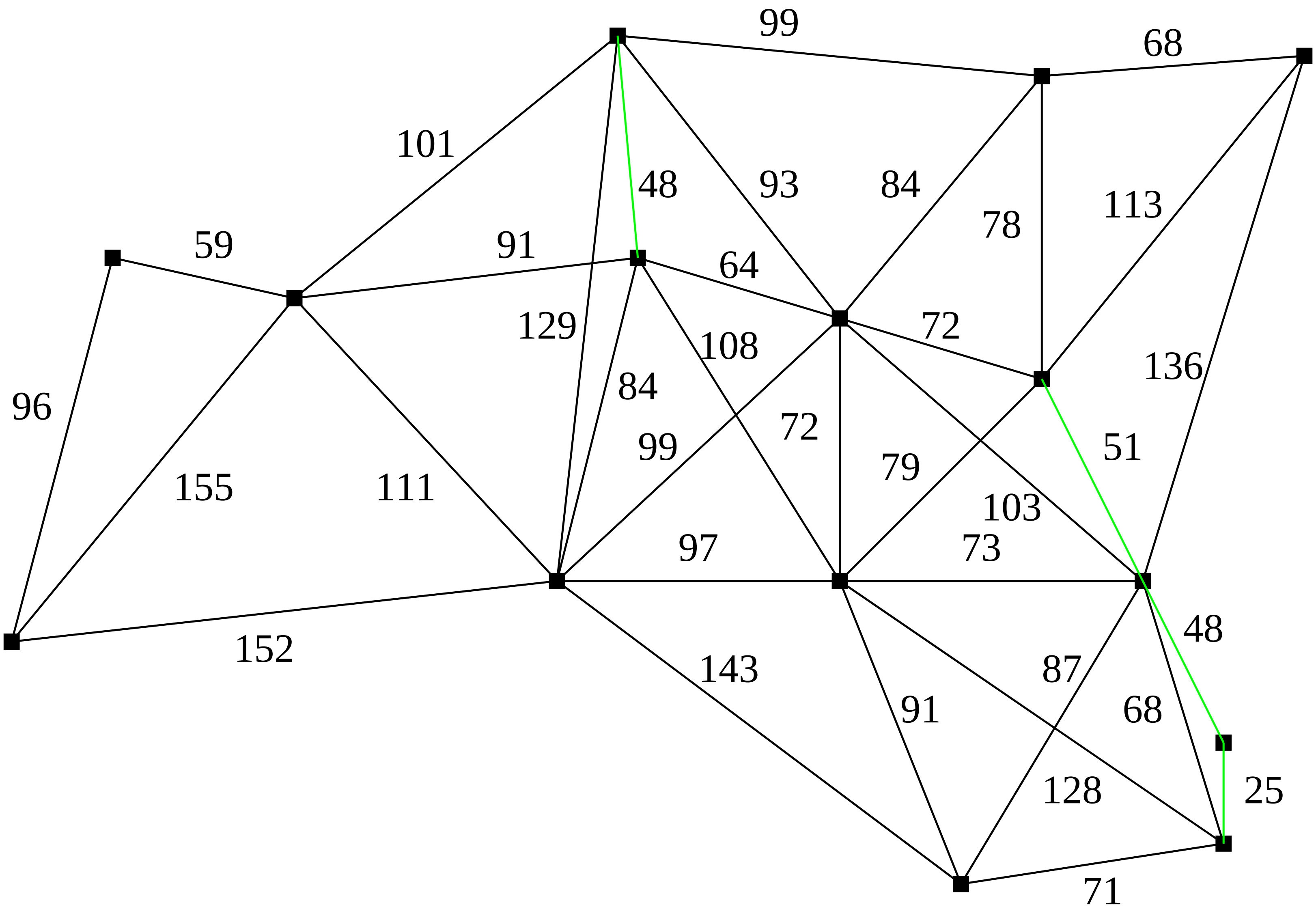

99
68
101
48
93
84
113
78
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

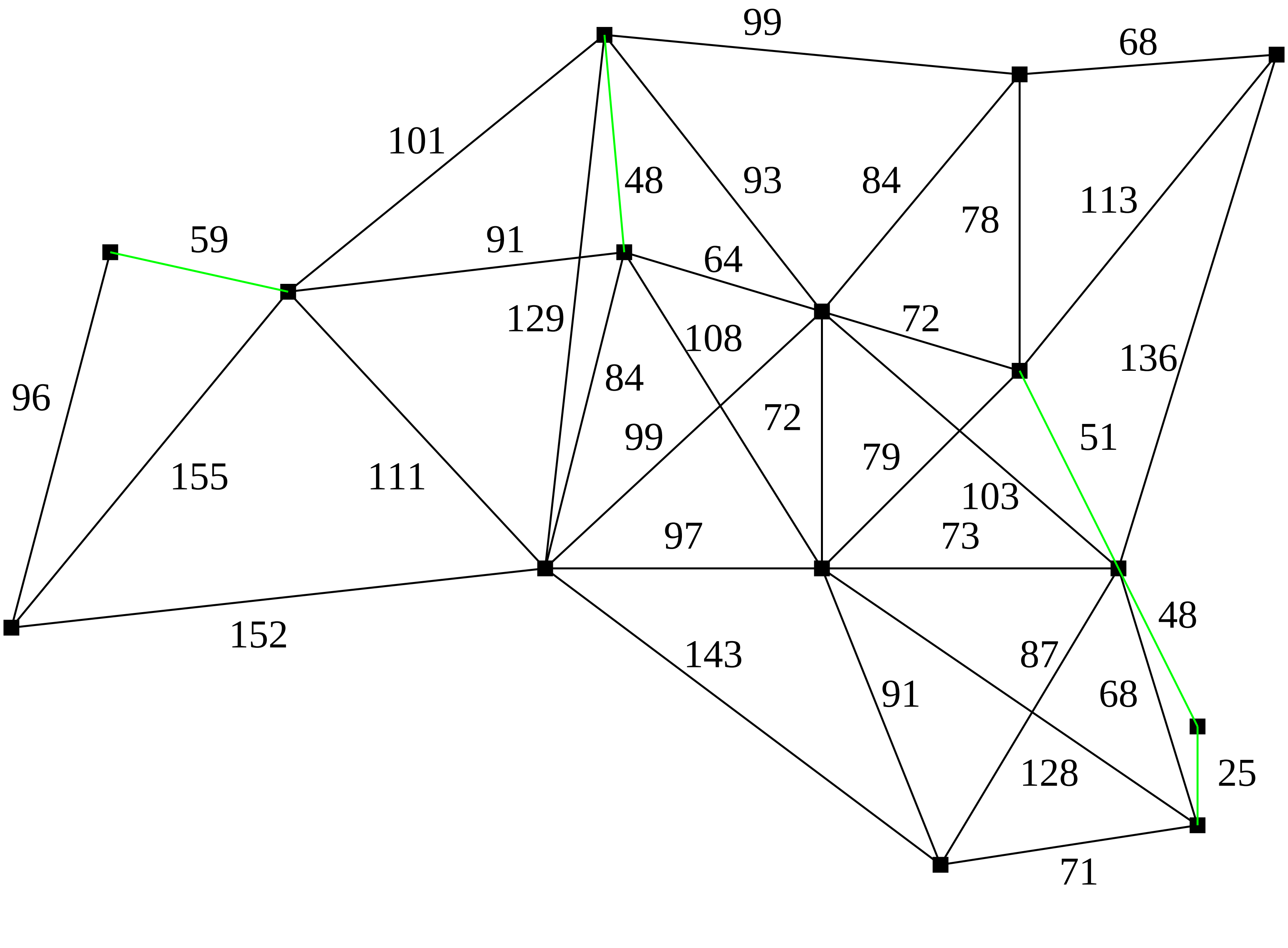

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

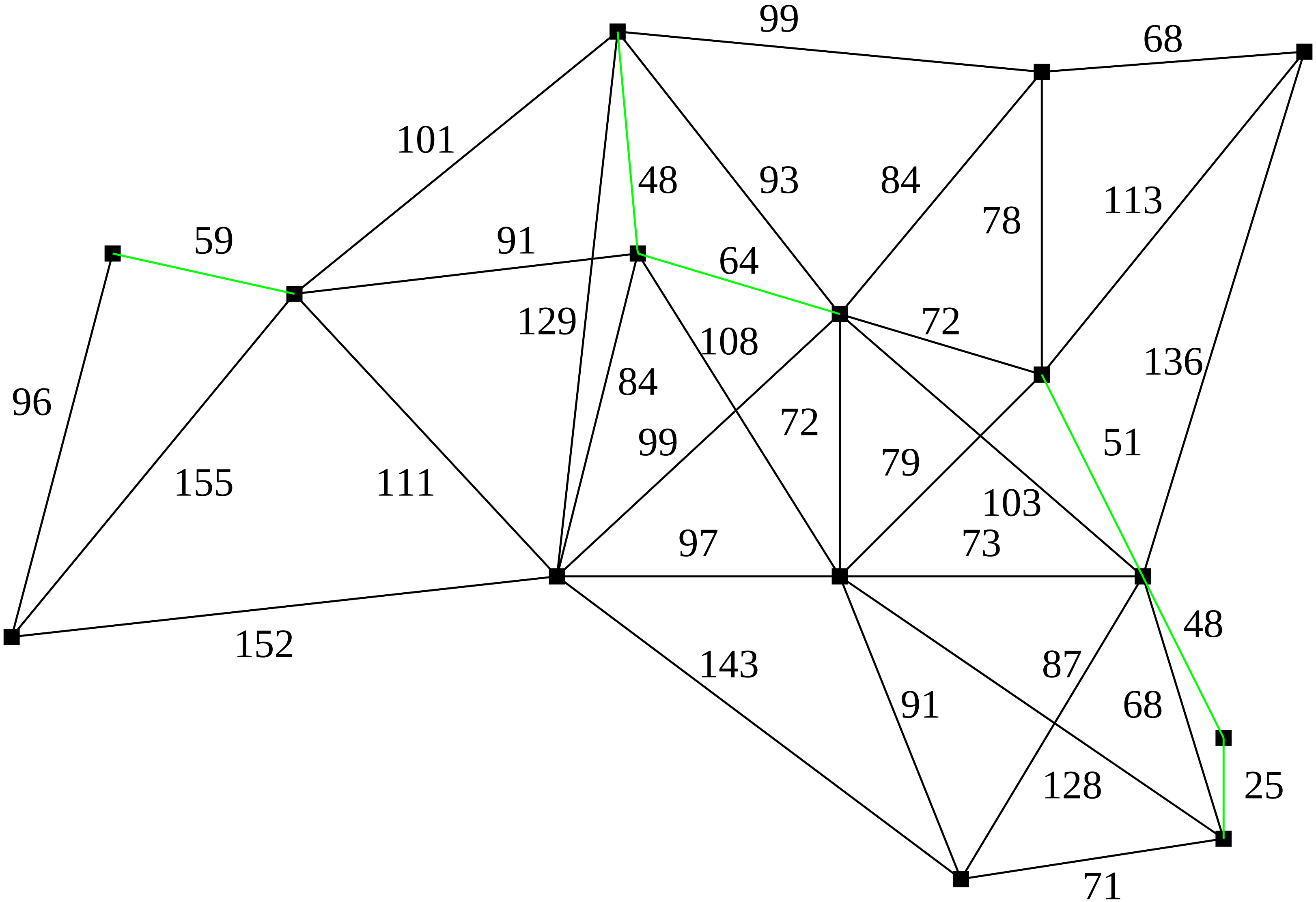

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

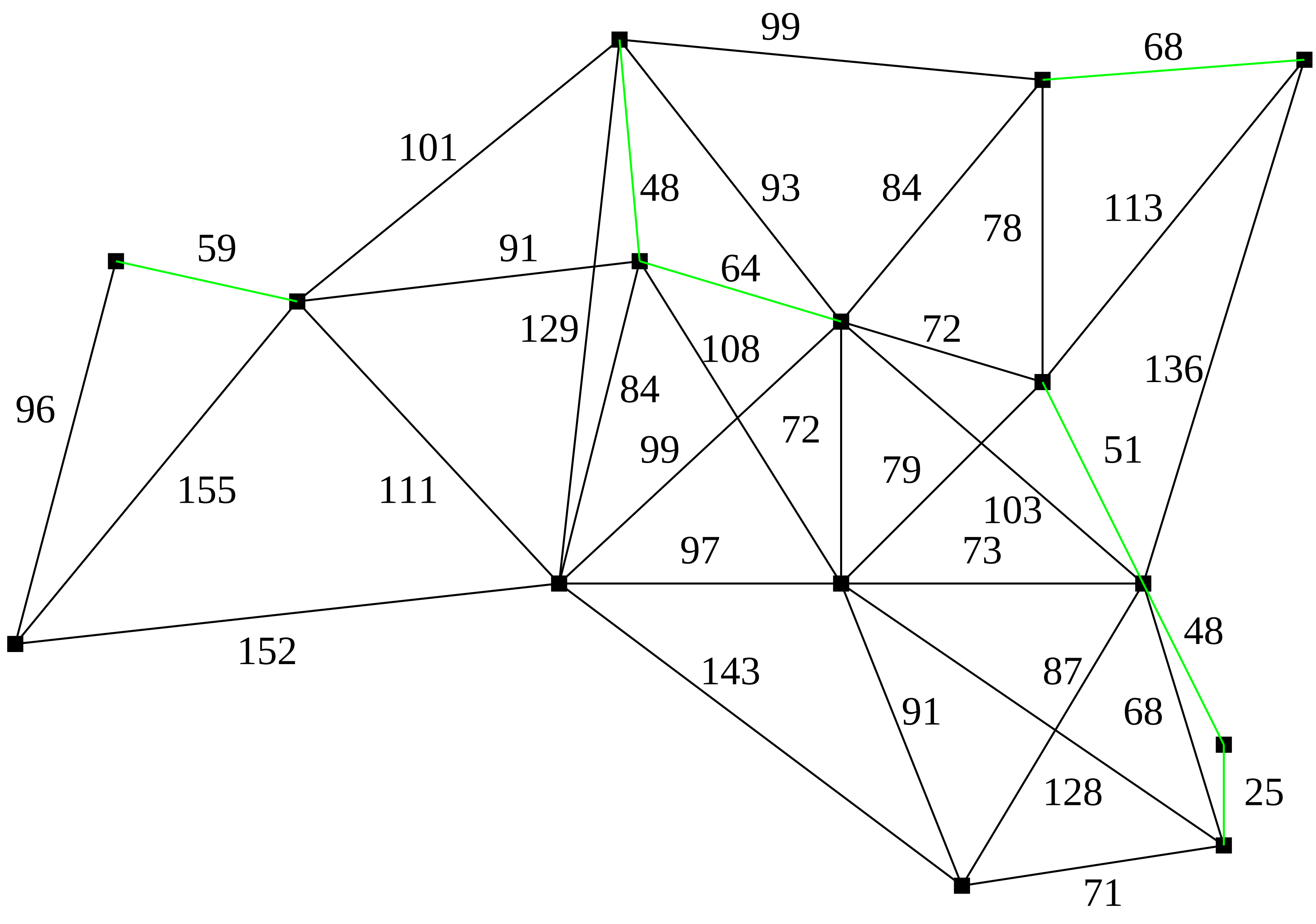


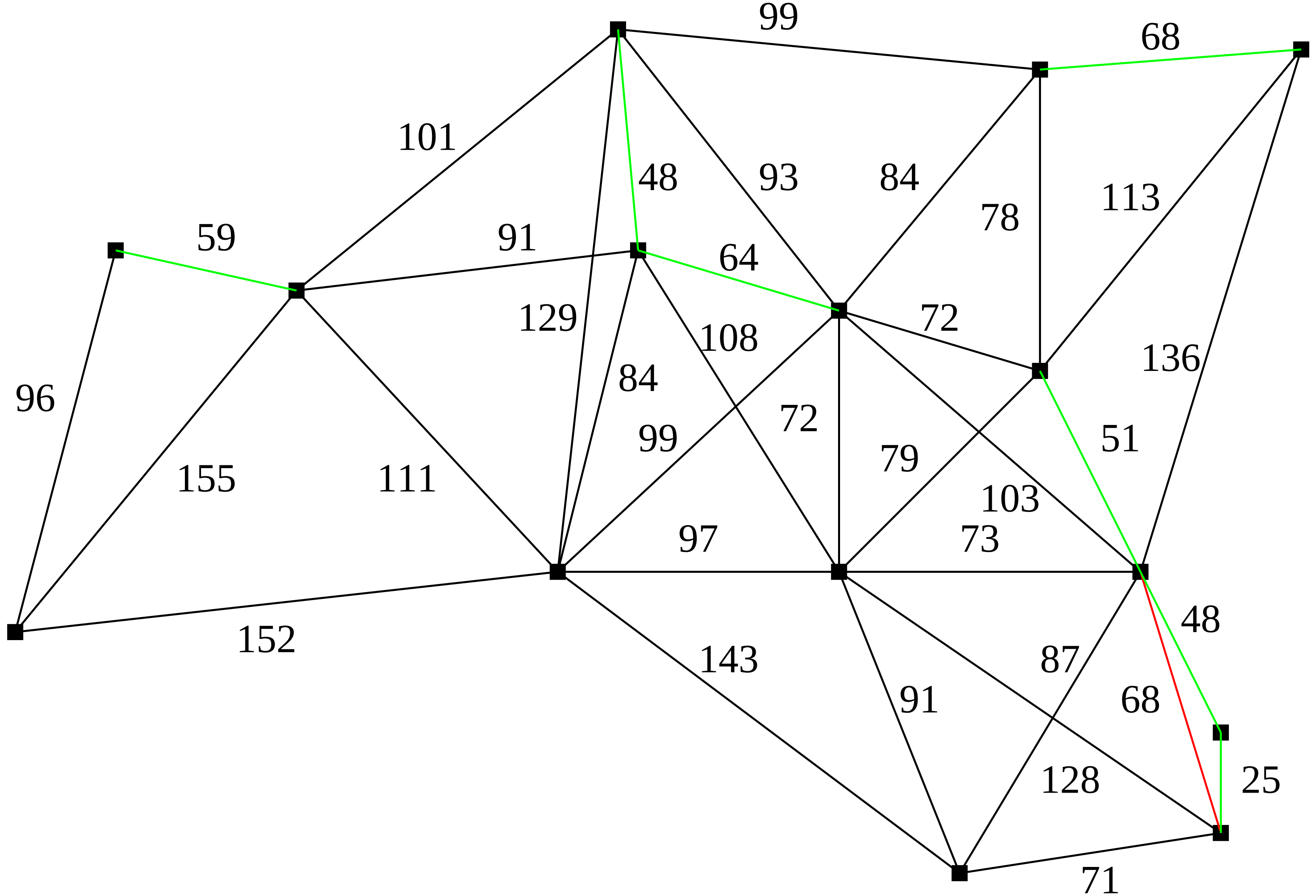
99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

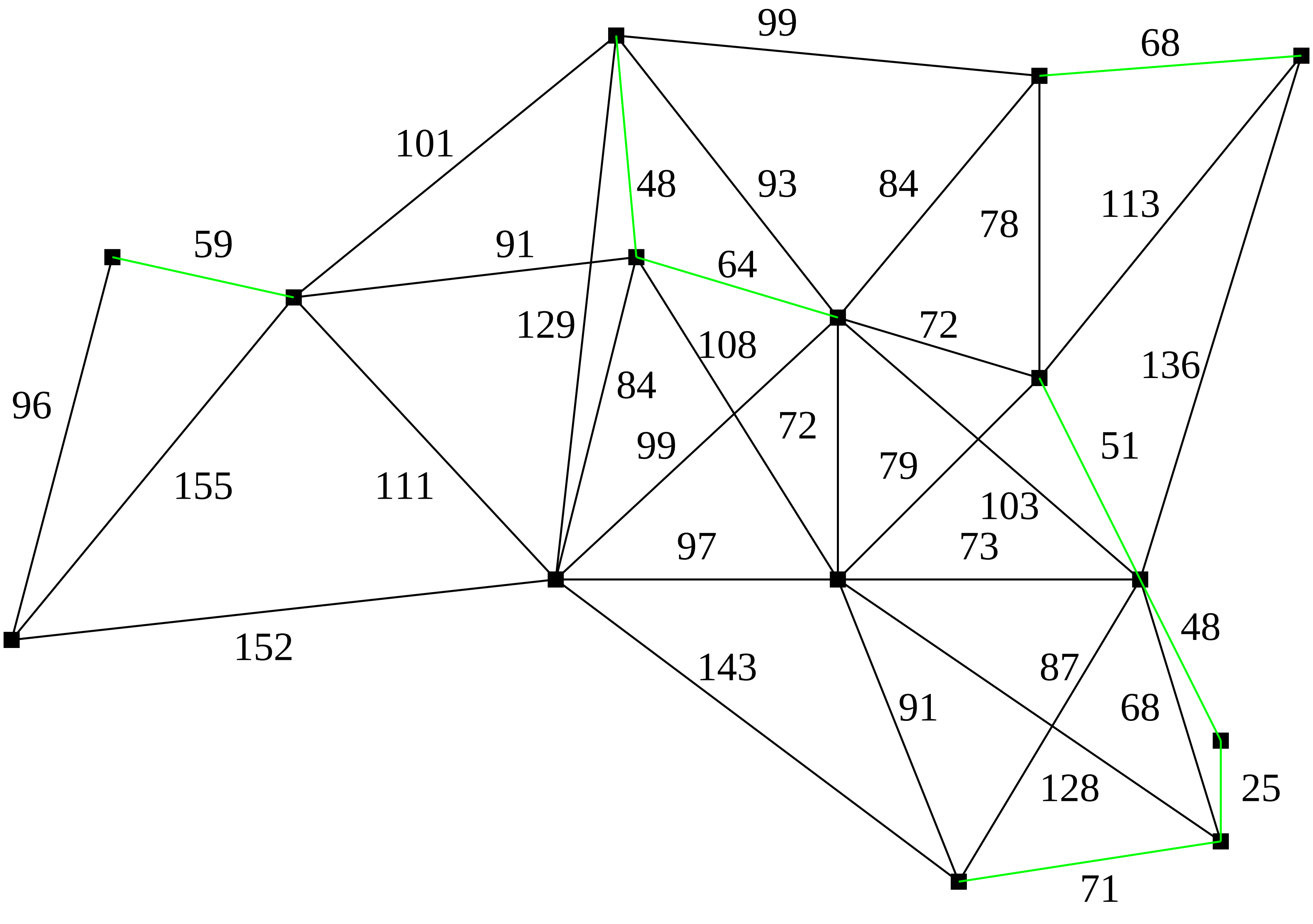

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

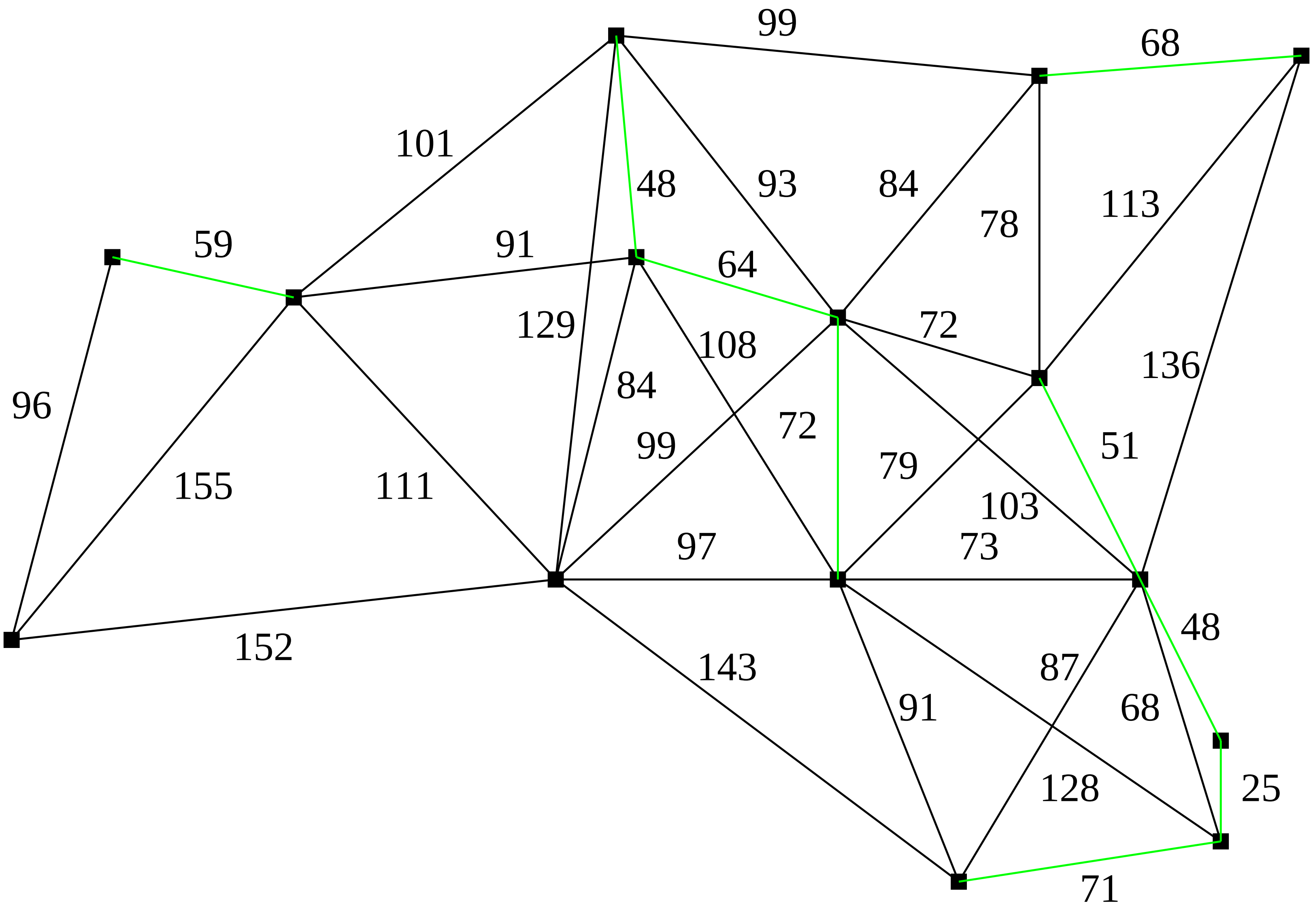

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
84
136
96
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

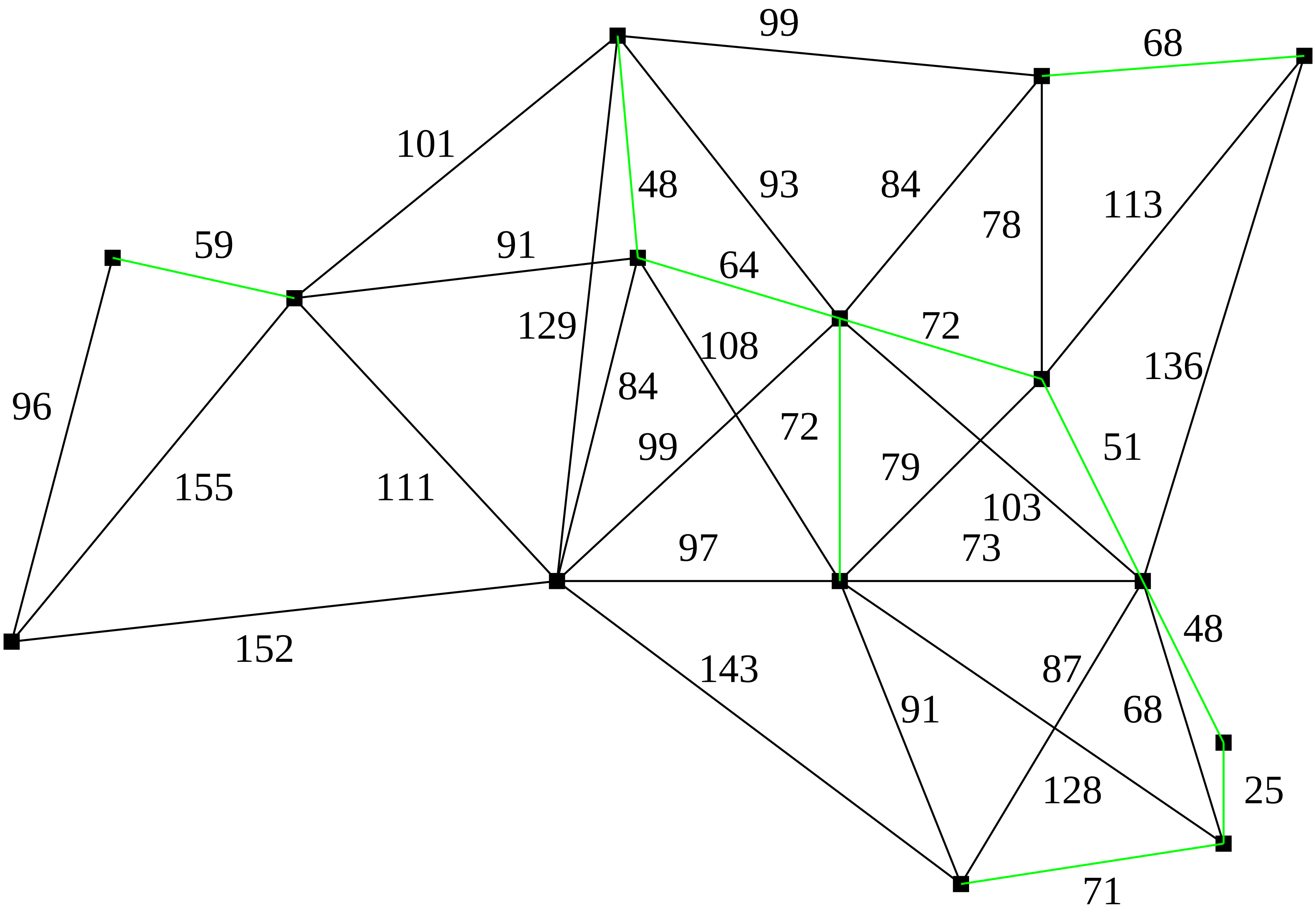


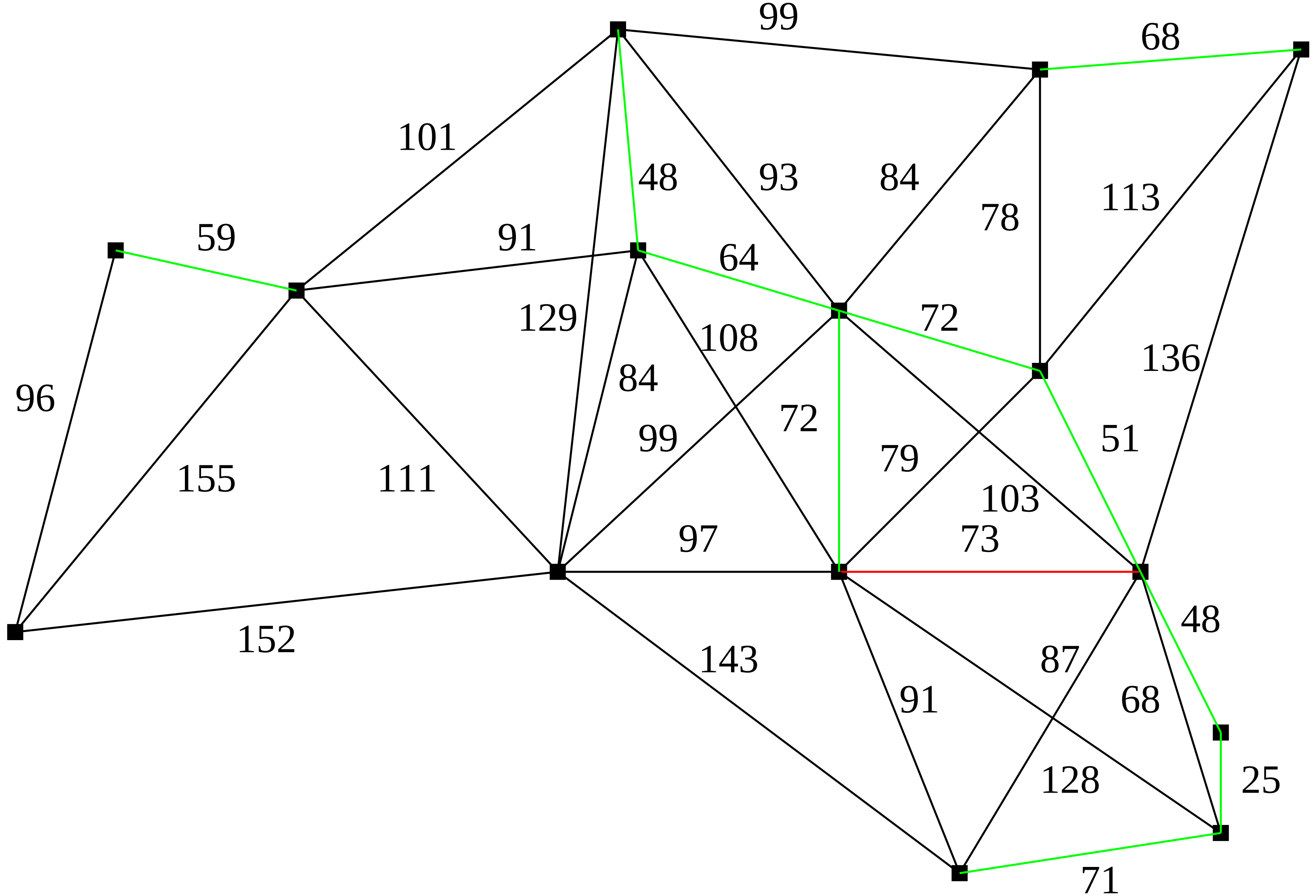
99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
108
72
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
48
87
91
68
128
25
71

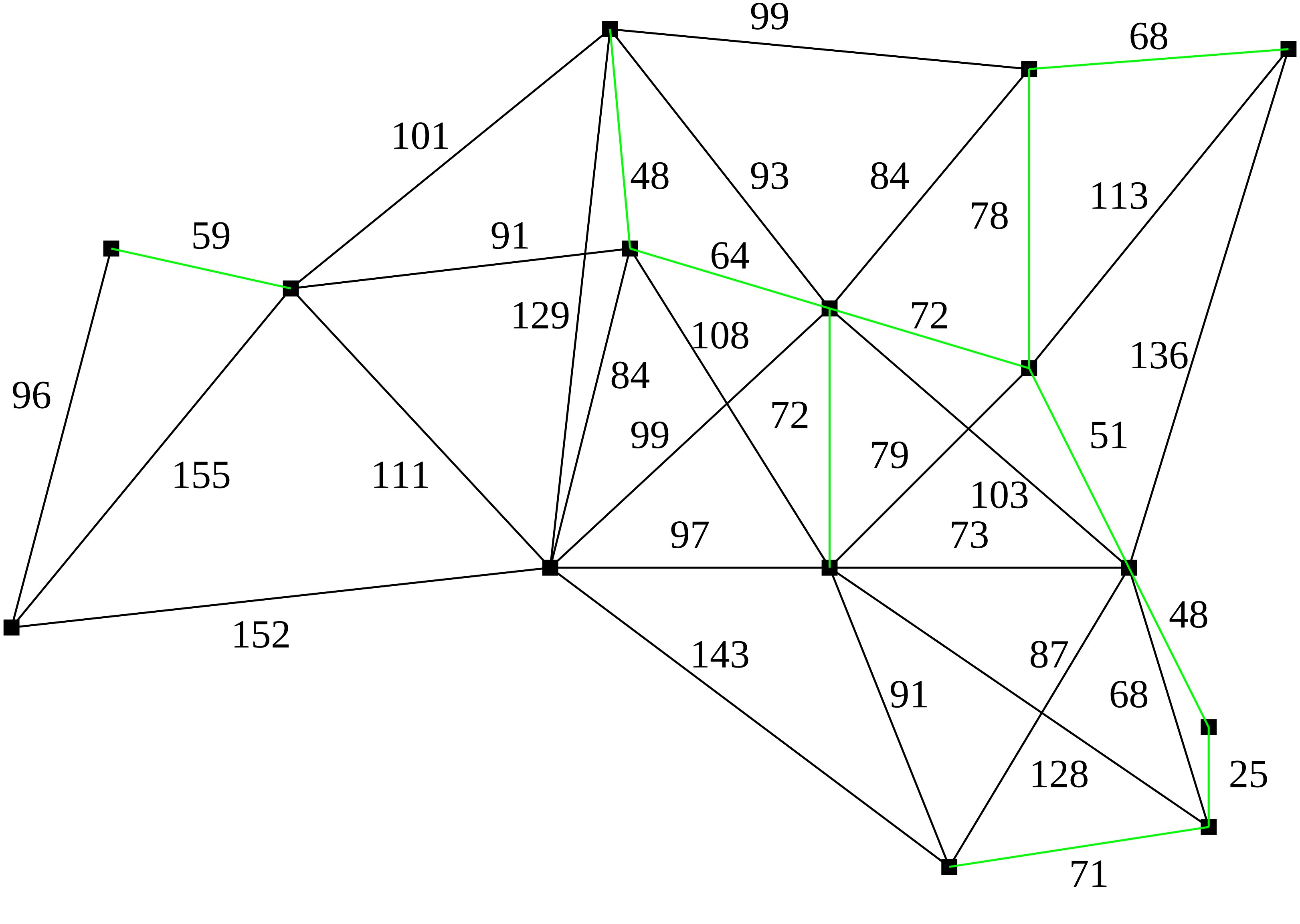

99
68
101
48
93
84
113
78
59
91
64
129
108
72
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

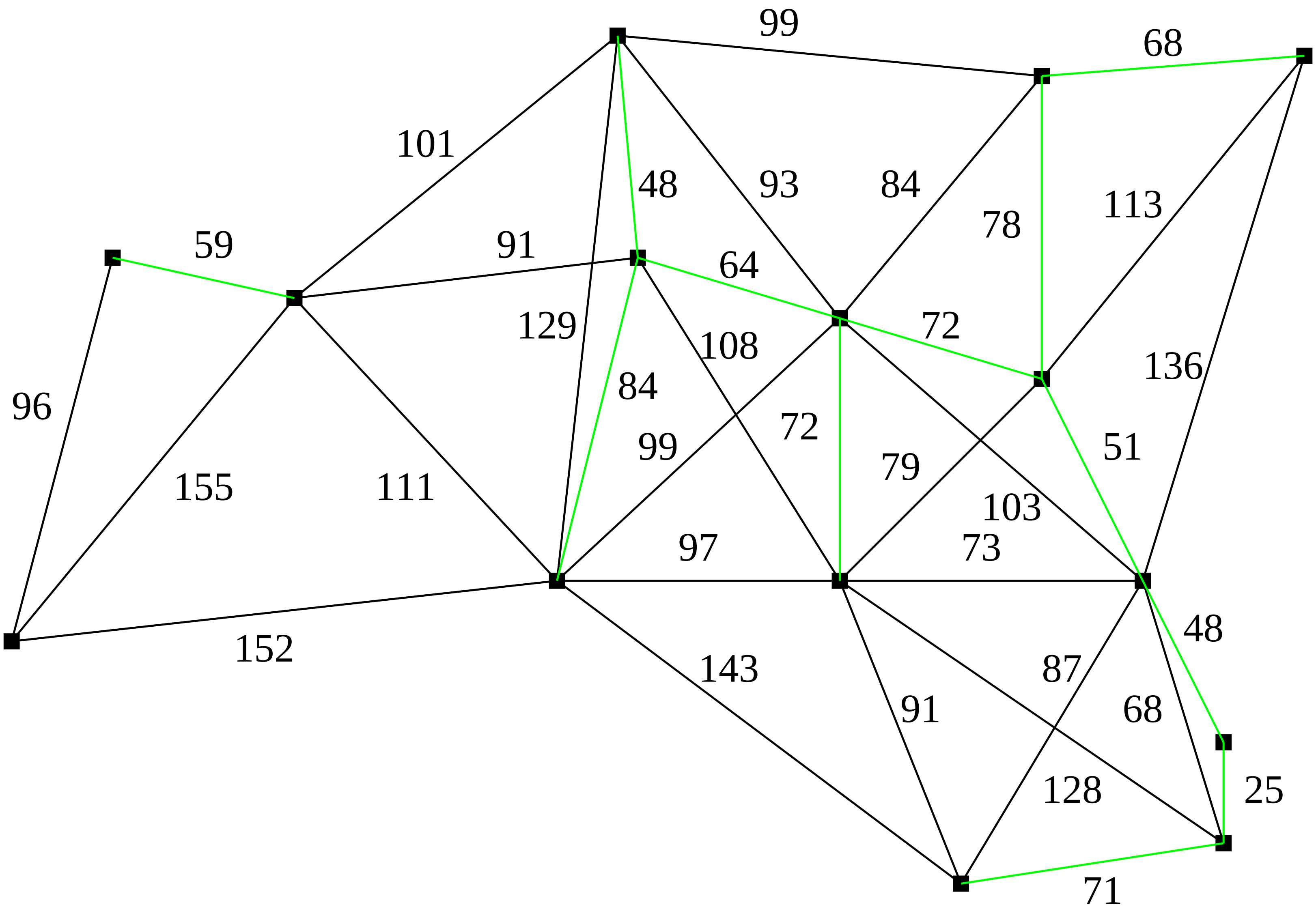


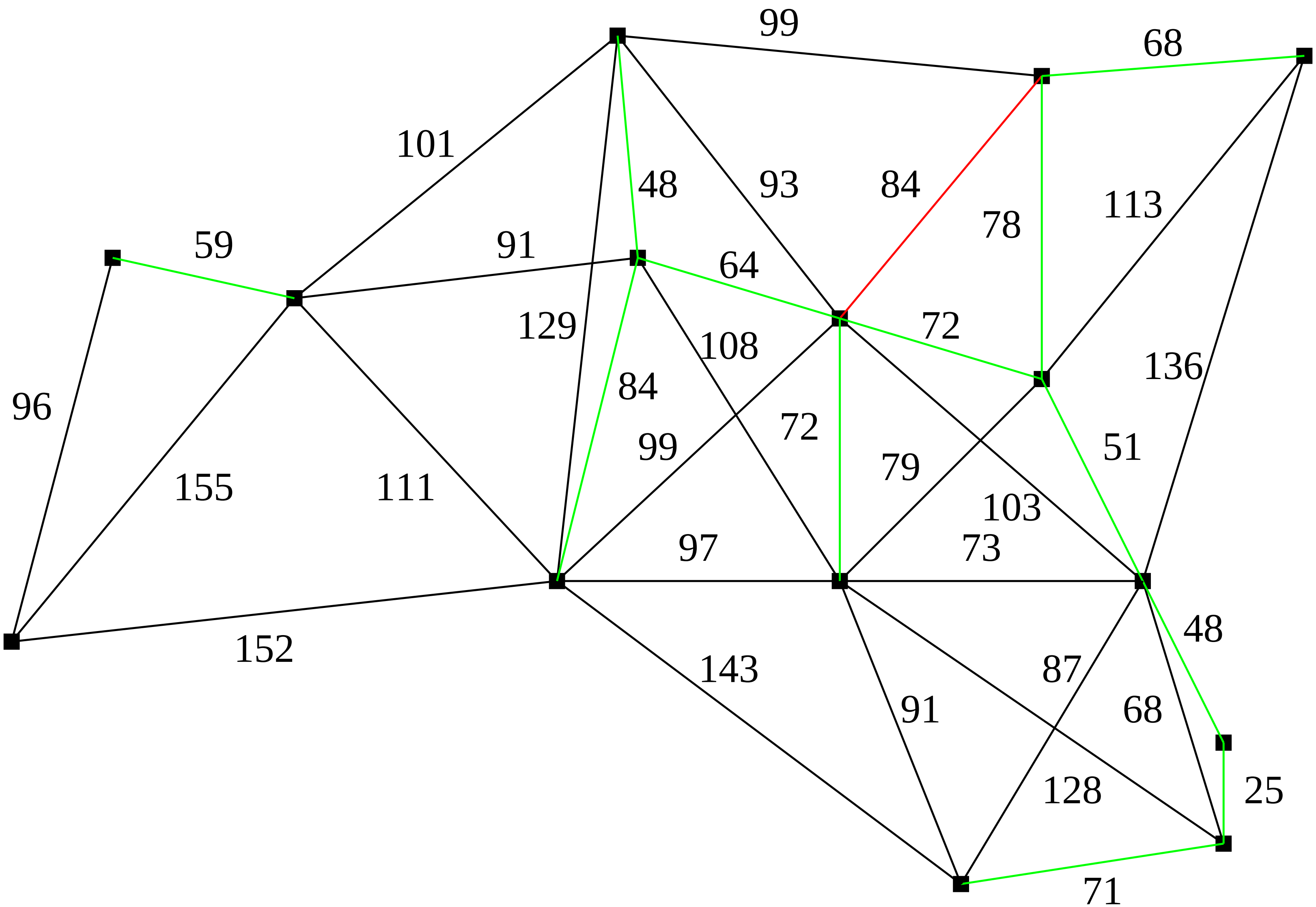
99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

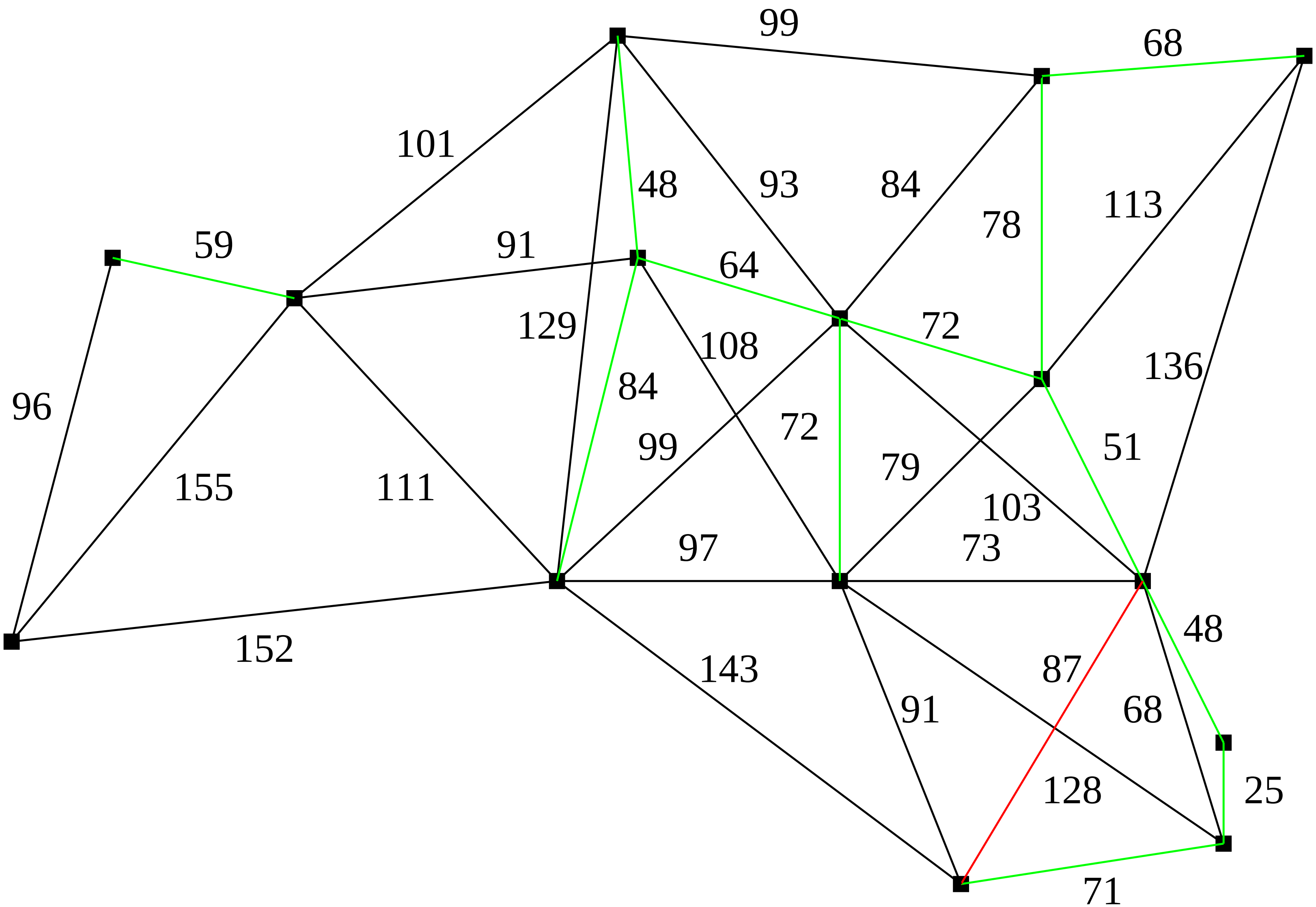

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
48
87
91
68
128
25
71

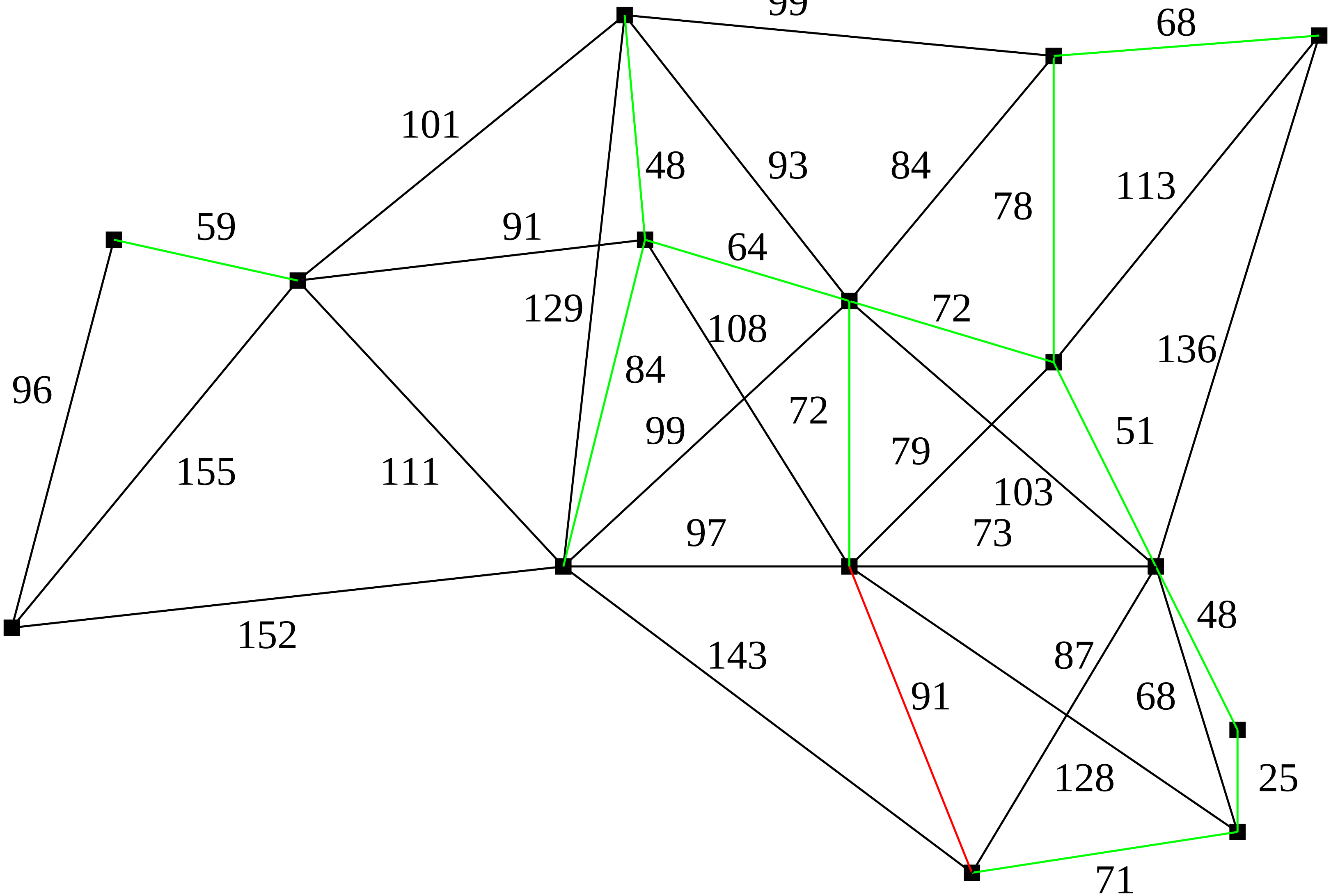

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
99
72
79
51
155
111
103
97
73
152
143
87
91
68
48
128
25
71

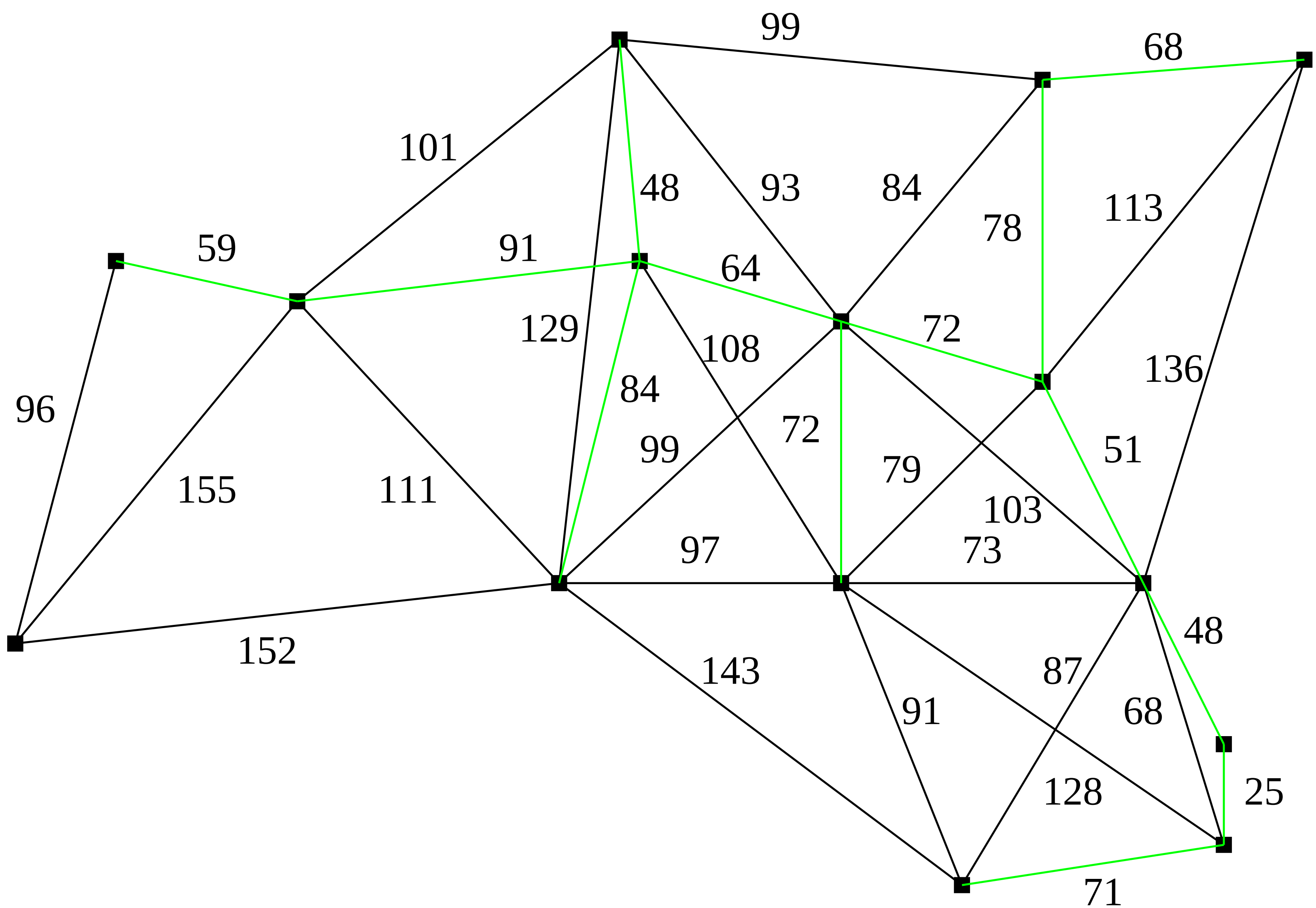

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71

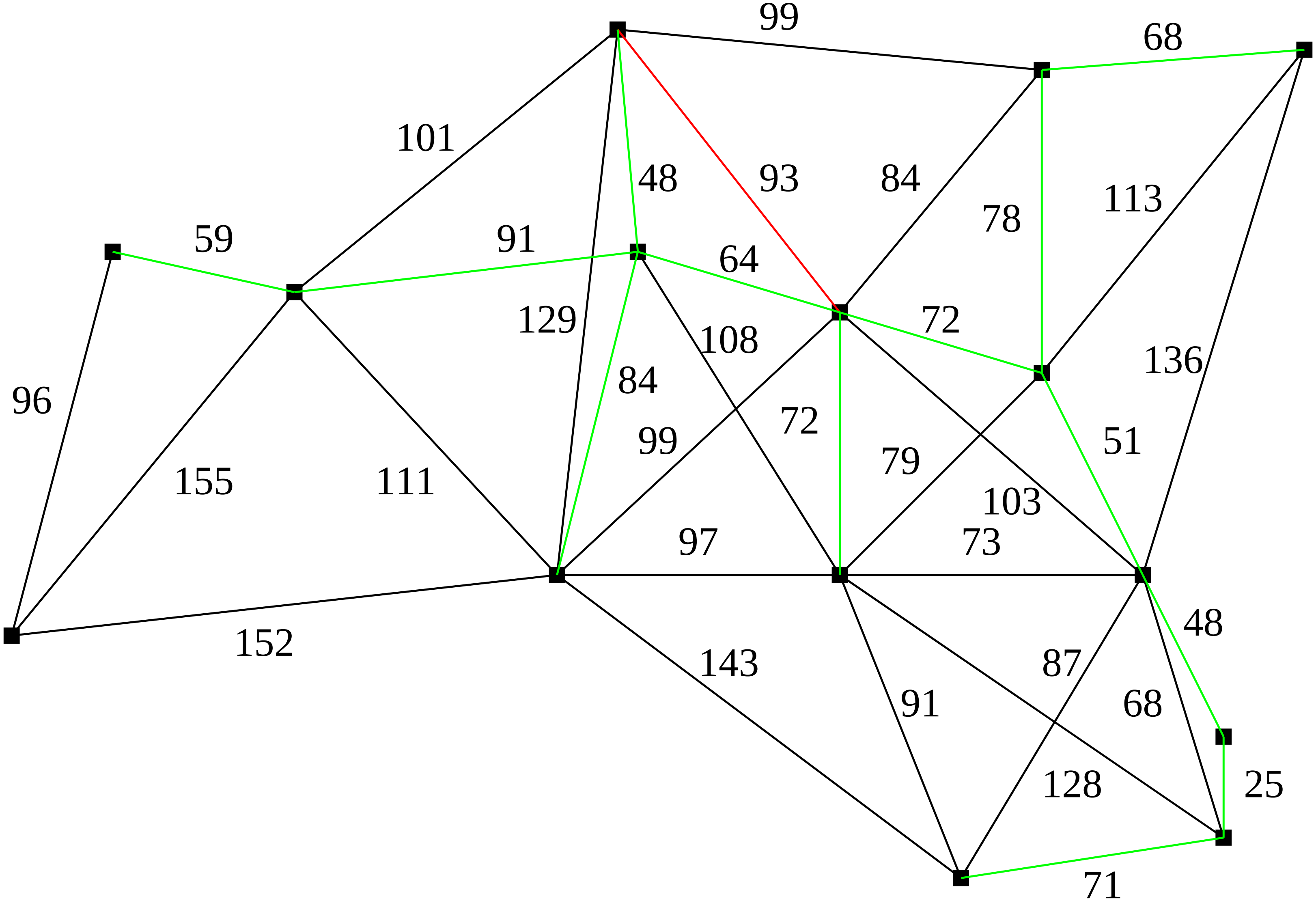

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
51
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

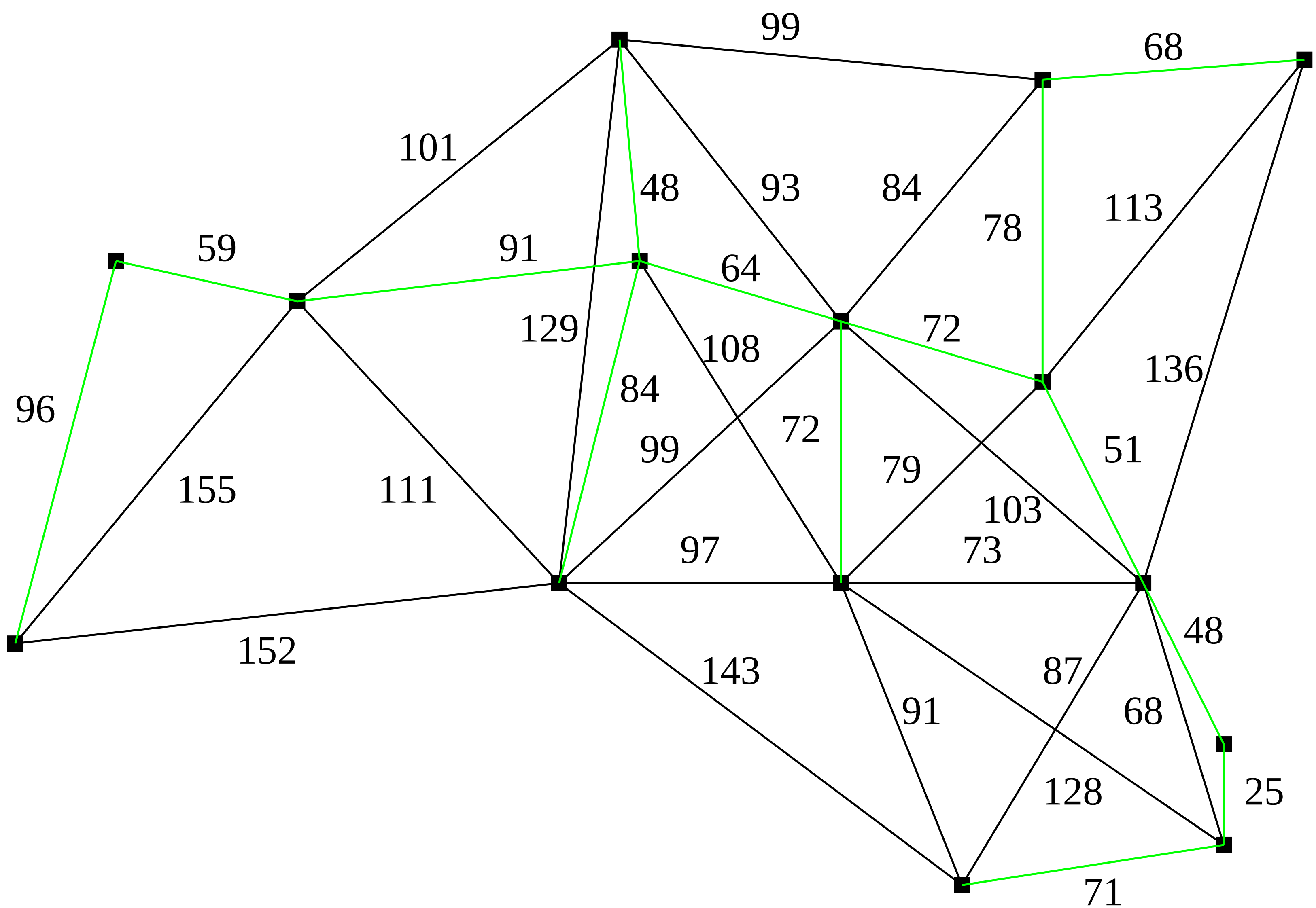


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
87
48
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
87
48
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
48
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
108
72
96
84
136
72
99
51
79
155
111
103
97
73
152
143
87
48
91
68
128
25
71

**Teoreem.** Eeltoodud algoritm on korrektne.

Tõestus. $T$ on (alus)puu — ta on tsükliteta, temas on $n$ tippu ja $n-1$ serva.

Oletame, et $w(T)$ pole minimaalne. Olgu $T'$ mõni $G$ minimaalse kaaluga aluspuu. Olgu $T'$ selline, et tal on $T$-ga maksimaalne arv ühiseid servi.

Olgu $k \in \{1,\dots,n-1\}$ vähim selline arv, et $e_k \notin E(T')$.

Olgu $S = T' \cup \{e_k\}$. Graafis $S$ leidub mingi tsükkel $C$.

Kuna $T$ ja $T'$ on tsükliteta, siis $e_k \in C$ ja leidub $e \in E(T') \backslash E(T)$, nii et $e \in C$.

Graaf $T'' = S \backslash \{e\}$ on sidus ja $n-1$ servaga, s.t. ta on aluspuu.

Serv $e$ on selline, mis

- on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{k-1}$,
- ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ tsüklit (sest $e_1, \ldots, e_{k-1} \in E(T')$).

Serv $e_k$ on minimaalse kaaluga servade seas, mis

- on erinevad servadest $e_1, \ldots, e_{k-1}$,
- ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ tsüklit.

Seega $w(e_k) \leq w(e)$.

Saame $w(T'') = w(T') - w(e) + w(e_k) \leq w(T')$, s.t. $T''$ on minimaalse kaaluga aluspuu.

Puul $T''$ on rohkem puuga $T$ ühiseid servi kui puul $T'$. Vastuolu $T'$ valikuga. $\square$