

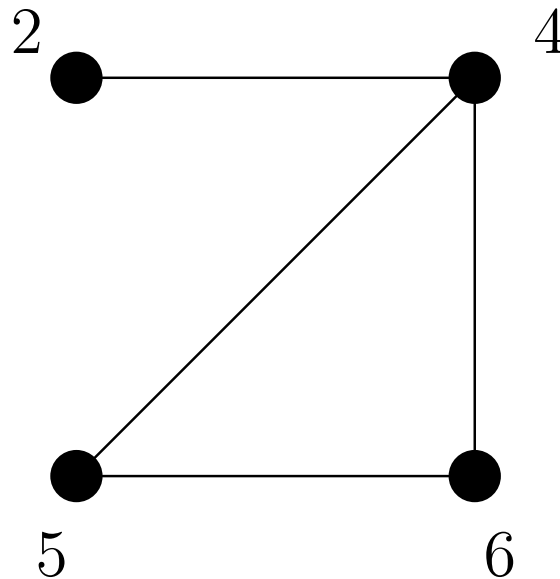
# Prüferi koodid

## Märgendatud puude loendamine

3. oktoober 2002

Olgu  $M \subseteq \mathbb{N}$  lõplik hulk. *Märgendatud graaf* märgendite hulgaga  $M$  on kolmik  $G_M = (V, E, \mu)$ , kus

- $G = (V, E)$  on graaf;
- $\mu : V \longrightarrow M$  on bijektiivne kujutus.



Märgendatud graaf märgendite hulgaga  $\{2, 4, 5, 6\}$ .

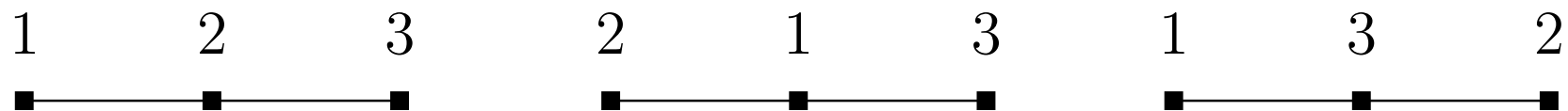
Märgendatud graafid  $G_M^1 = (V_1, E_1, \mu_1)$  ja  $G_M^2 = (V_2, E_2, \mu_2)$  on *isomorfsed*, kui leidub kujutus  $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ , nii et

- $\varphi$  on graafide  $(V_1, E_1)$  ja  $(V_2, E_2)$  isomorfism;
- iga  $v \in V_1$  jaoks kehtib  $\mu_1(v) = \mu_2(\varphi(v))$ .

Mitteisomorfsed kolmetipulised puud:



Mitteisomorfsed kolmetipulised märgendatud puud (märgenditega  $\{1, 2, 3\}$ ):



Kui palju on neljatipulisi puud ja märgendatud puud (märgenditega  $\{1, 2, 3, 4\}$ )?

Tänases loengus näitame, et mitteisomorfseid  $n$ -tipulisi (kus  $n \geq 2$ ) märgendatud puid (fikseeritud märgendite hulgaga) on  $n^{n-2}$  tükki (Cayley teoreem).

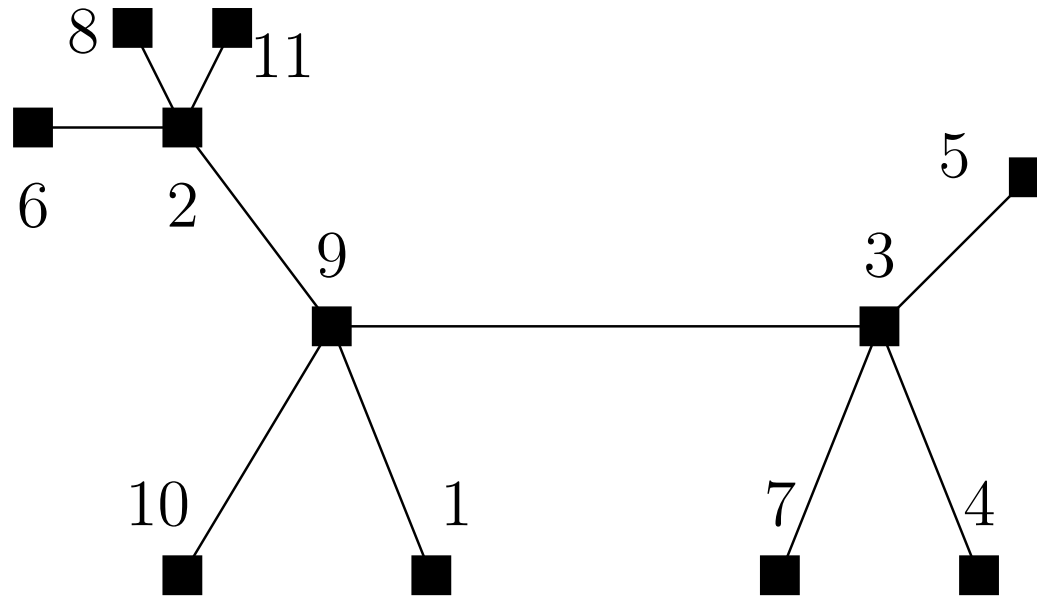
$$\boxed{\begin{array}{l} n\text{-tipulised märgendatud} \\ \text{puud märgenditega hul-} \\ \text{gast } M \end{array}} \cong \boxed{\begin{array}{l} M^{n-2} \\ \text{(järjendid pikkusega } n - 2 \\ \text{hulga } M \text{ elementidest)} \end{array}}$$

- Defineerime teatava funktsiooni (*Prüferi koodi* leidmise) esimesest hulgast teise.
- Näitame, et ta on üksühene ja peale.

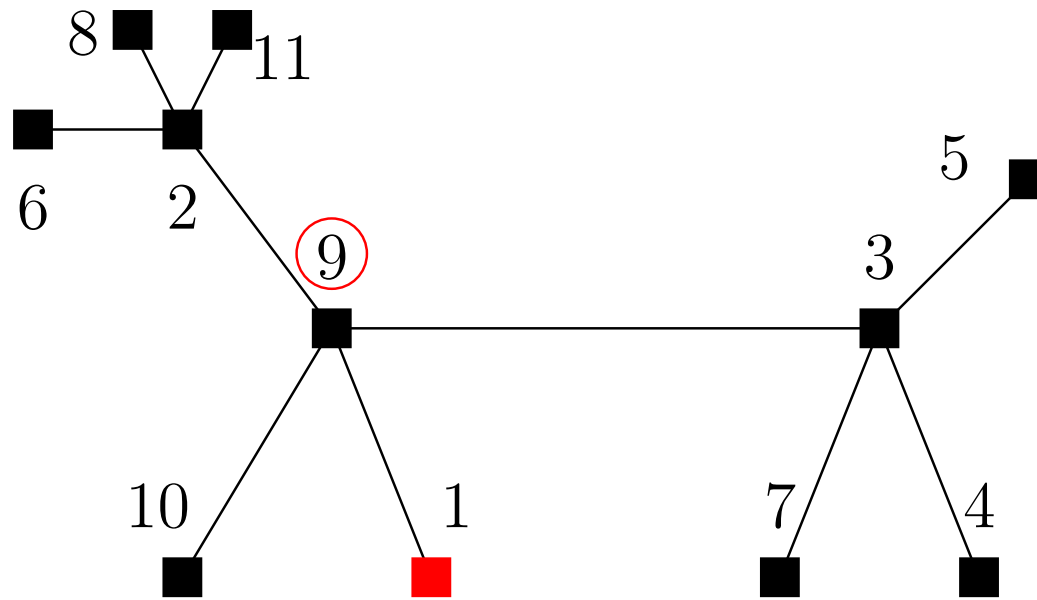
Olgu  $T = (V, E, \mu)$  märgendatud puu märgendite hulgaga  $M$ . Tema *Prüferi kood*  $\wp(T)$  on defineeritud järgmiselt:

- Kui  $|V| = 2$ , siis  $\wp(T) = []$  (tühi järjend).
- Muidu
  - Olgu  $v \in V$  vähima märgendiga leht. Olgu  $w$  tema naabertipp.
  - Olgu  $T' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{(v, w)\}, \mu|_{V \setminus \{v\}})$  märgendatud puu märgendite hulgaga  $M \setminus \{\mu(v)\}$ .

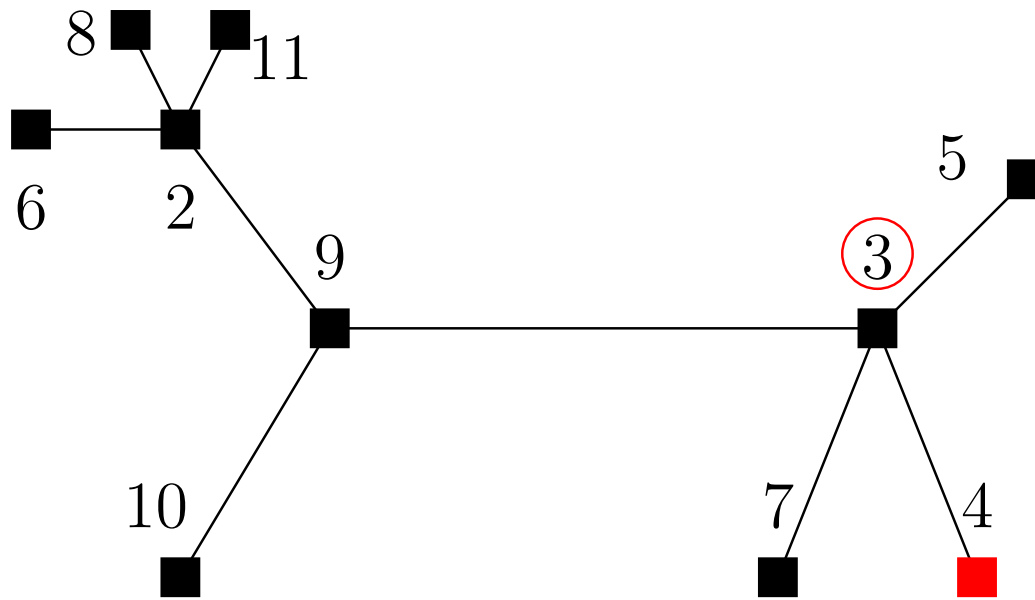
Defineerime  $\wp(T) = \mu(w) \cdot \wp(T')$ .



Kood:

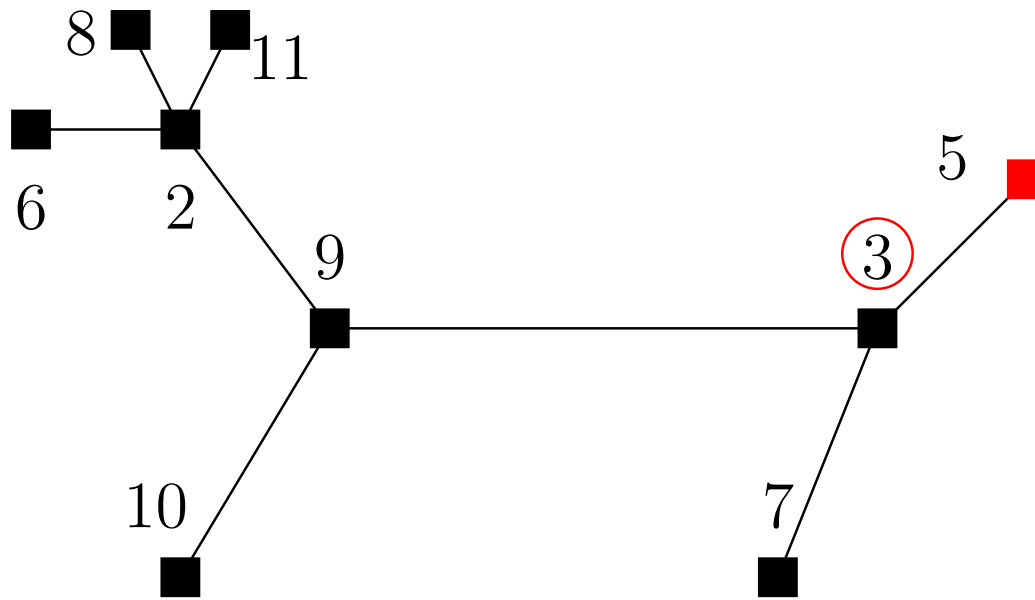


Kood:

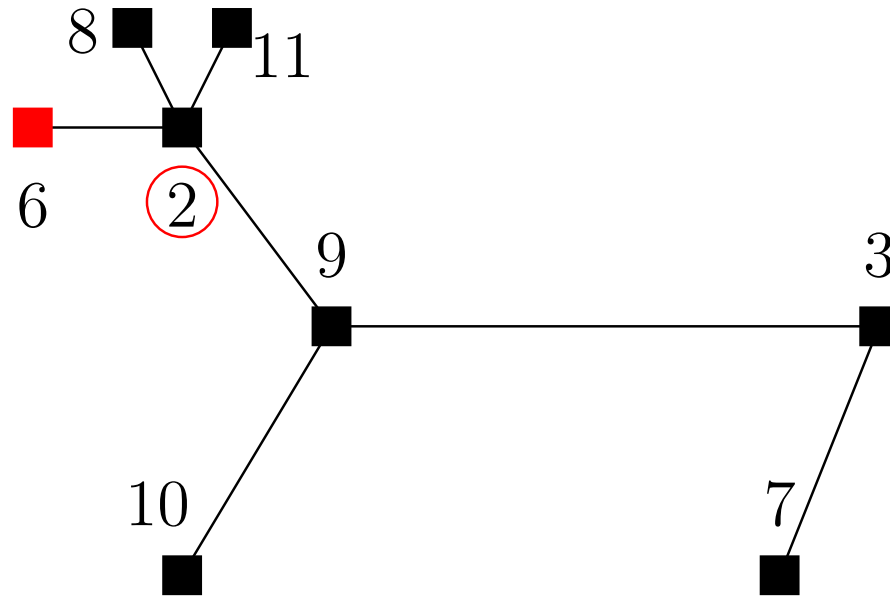


Kood: 9

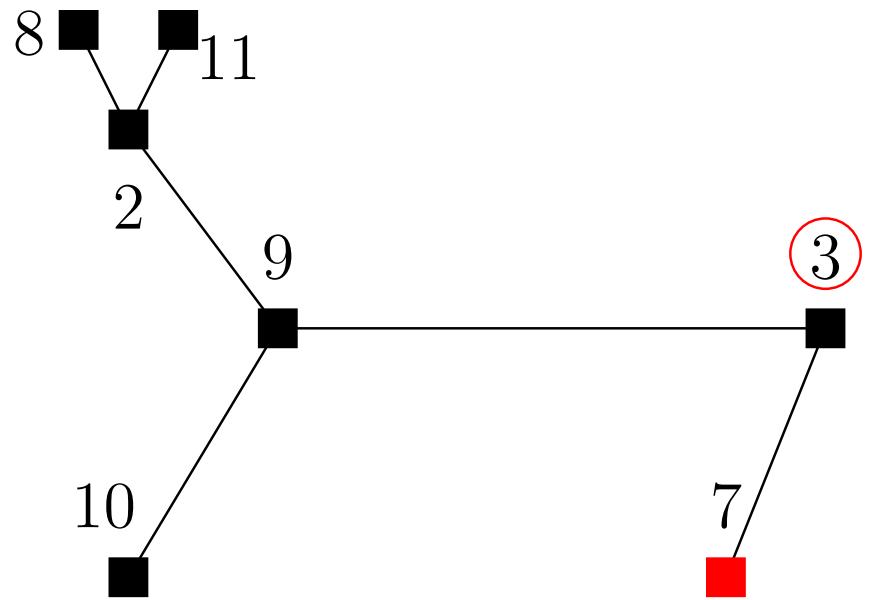




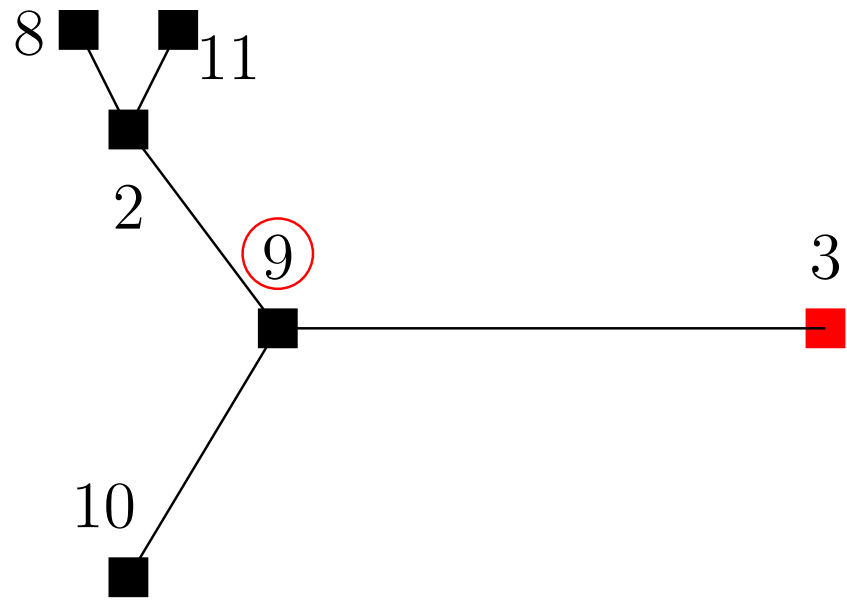
Kood: 93



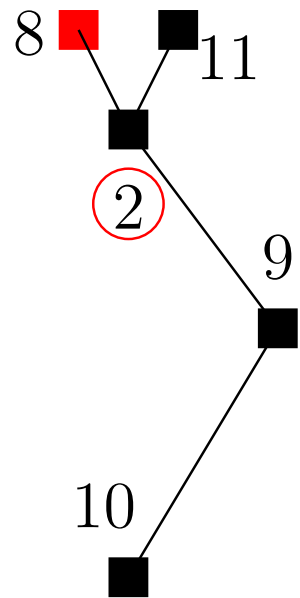
Kood: 933



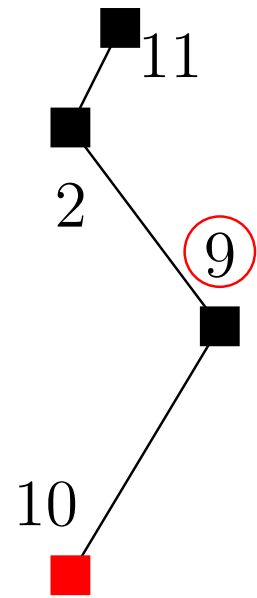
Kood: 9332



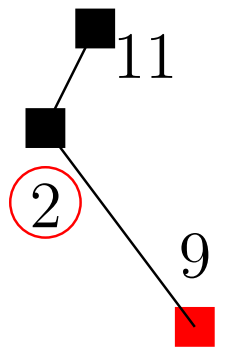
Kood: 93323



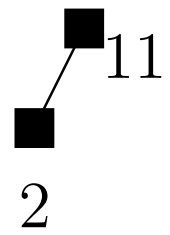
Kood: 933239



Kood: 9332392



Kood: 93323929



Kood: 933239292



**Lemma.** Märgendatud puu  $T = (V, E, \mu)$  tipu  $v \in V$  märgend  $\mu(v)$  esineb koodis  $\wp(T)$  täpselt  $\deg(v) - 1$  korda.

**Tõestus.** Induktsioon üle tippude arvu.

*Baas.*  $|V| = 2$ . Siis on kummagi tipu aste 1 ning kummagi tipu märgend esineb koodis  $\wp(T)$  null korda.

*Samm.*  $|V| = n$ . Olgu  $\wp(T) = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ . Olgu  $u \in V$  vähima märgendiga leht puus  $T$ . Olgu  $w$  tema naabertipp. Olgu  $T'$  saadud puust  $T$ , eemaldades sealt tipu  $u$  (tähistame  $T' = T - u$ ).

$T'$  on  $(n - 1)$ -tipuline märgendatud puu märgendite hulga  $M \setminus \{\mu(u)\}$ . Tema Prüferi kood on  $[m_2 \dots m_{n-2}]$ . Induktsiooni eelduse järgi esineb suvalise tipu  $v \in V \setminus \{u\}$  märgend selles koodis  $\deg_{T'}(v) - 1$  korda.

Olgu  $v \in V$ . Vaatame kolme varianti:

- $v = u$ . Siis  $\deg_T(v) = 1$ . Märgend  $\mu(u)$  ei esine koodis  $\wp(T')$  ning  $m_1 = \mu(w)$ . Seega ei esine  $\mu(u)$  koodis  $\wp(T)$ .
  - $v = w$ . Siis  $\deg_T(v) = \deg_{T'}(v) + 1$ . Märgend  $\mu(w)$  esineb koodis  $\wp(T)$  üks kord rohkem kui koodis  $\wp(T')$ , sest  $m_1 = \mu(w)$ .
  - $v$  on mingi muu tipp. Siis  $\deg_T(v) = \deg_{T'}(v)$ . Ka  $v$  märgendi esinemiste arv koodides  $\wp(T)$  ja  $\wp(T')$  on sama.
-

**Teoreem.** Olgu  $T_1 = (V_1, E_1, \mu_1)$  ja  $T_2 = (V_2, E_2, \mu_2)$  märgendatud puud märgendite hulgaga  $M$ . Kui  $\wp(T_1) = \wp(T_2)$ , siis  $T_1 \cong T_2$ .

**Tõestus.** Induktsioon üle tippude arvu.

*Baas.*  $|V| = 2$ . Leidub ainult üks kahetipuline märgendatud puu märgendite hulgaga  $M = \{m_1, m_2\}$ :  $m_1 \blacksquare \text{---} \blacksquare m_2$

*Samm.*  $|V| = n$ . Olgu  $\wp(T_1) = \wp(T_2) = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ .

$\wp(T)$ -st saab leida puu  $T$  lehtede märgendid — need on need märgendid, mis  $\wp(T)$ -s ei esine ( $\Leftarrow$  eelmine lemma).

Seega on puude  $T_1$  ja  $T_2$  lehtede märgendite hulgad võrdsed.

Olgu  $m \in M$  vähim lehe märgend. Olgu  $v_1 \in V_1$  ja  $v_2 \in V_2$  sellised, et  $\mu_1(v_1) = \mu_2(v_2) = m$ .

Olgu  $T'_1 = T_1 - v_1$  ja  $T'_2 = T_2 - v_2$ . Vastavalt Prüferi koodi konstruktsioonile  $\wp(T'_1) = \wp(T'_2) = [m_2 \dots m_{n-2}]$ .

Induktsiooni eelduse järgi  $T'_1 \cong T'_2$ . Olgu  $\varphi : V_1 \setminus \{v_1\} \longrightarrow V_2 \setminus \{v_2\}$  nendevaheline isomorfism.

Näitame, et kui me täiendavalt defineerime  $\varphi(v_1) = v_2$ , siis on  $\varphi$  märgendatud puude  $T_1$  ja  $T_2$  vaheline isomorfism.

$\varphi$  jätab märgendid paika:  $\mu_1(v_1) = \mu_2(v_2)$ . Meil tuleb veel näidata, et  $\varphi$  on puude  $T_1$  ja  $T_2$  vaheline isomorfism.

Olgu  $u, u' \in V_1$ . Näitame, et  $u$  ja  $u'$  on naabrid parajasti siis, kui  $\varphi(u)$  ja  $\varphi(u')$  on naabrid.

Kui  $u \neq v_1$  ja  $u' \neq v_1$ , siis järeldeb see sellest, et  $\varphi$  oli  $T'_1$  ja  $T'_2$  vaheline isomorfism.

Olgu  $u = v_1$ . Tipud  $v_1$  ja  $v_2$  on lehed. Olgu  $w_1 \in V_1$  ja  $w_2 \in V_2$  tippude  $v_1$  ja  $v_2$  ainsad naabrid.

Vastavalt Prüferi koodi konstruktsioonile  $\mu_1(w_1) = \mu_2(w_2) = m_1$ . Kuna  $\varphi$  on märgendatud puude  $T'_1$  ja  $T'_2$  vaheline isomorfism, siis  $\varphi(w_1) = w_2$ .

Seega on  $u'$  tipu  $u = v_1$  naabertipp parajasti siis, kui  $\varphi(u')$  on tipu  $\varphi(u) = v_2$  naabertipp.  $\square$

**Teoreem.** Olgu  $M \subset \mathbb{N}$ , nii et  $n = |M| \geq 2$ . Olgu  $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ , kus  $m_1, \dots, m_{n-2} \in M$ . Siis leidub  $n$ -tipuline märgendatud puu  $T = (V, E, \mu)$  märgendite hulgaga  $M$ , nii et  $\wp(T) = \mathcal{M}$ .

**Tõestus.** Induktsioon üle  $n$ .

*Baas.*  $n = 2$ . Siis  $\mathcal{M} = []$ . Kui  $M = \{m_1, m_2\}$ , siis võtame  $T$ -ks puu  $m_1 \blacksquare \text{---} \blacksquare m_2$

*Samm.* Olgu  $m \in M$  vähim selline element, mis ei esine järjendis  $\mathcal{M}$ . Olgu  $M' = M \setminus \{m\}$  ja  $\mathcal{M}' = [m_2 \dots m_{n-2}]$ .

Vastavalt induktsiooni eeldusele leidub märgendatud puu  $T' = (V', E', \mu')$  märgendite hulgaga  $M'$ , nii et  $\wp(T') = \mathcal{M}'$ .

Olgu  $w \in V'$  selline, et  $\mu'(w) = m_1$ . Olgu

$$V = V' \uplus \{v\}$$

$$E = E' \cup \{(v, w)\}$$

$$\mu = \mu'[v \mapsto m]$$

ja olgu  $T = (V, E, \mu)$ . Siis  $T$  on märgendatud puu märgendite hulgaga  $M$ .

Leiame  $\wp(T)$ . Meil on tarvis leida vähima märgendiga leht puus  $T$ . Puu  $T$  lehtede märgendid on täpselt need  $M$ -i elemendid, mis ei kuulu  $\mathcal{M}$ -i. Vastavalt  $m$ -i definitsioonile on  $m$  vähim nende seas. Seega on vastavalt  $\mu$  definitsioonile  $v$  vähima märgendiga leht puus  $T$ .

Tipu  $v$  naabriks puus  $T$  on  $w$ , mille märgend on vastavalt tema definitsioonile  $m_1$ .

Eemaldades puust  $T$  tipu  $v$  saame puu  $T'$  märgenditega hulgast  $M'$ .

Seega  $\wp(T) = \mu(w) \cdot \wp(T') = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}] = \mathcal{M}$ . □



Teoreemi tõestus oli konstruktiivne, andes meile ka algoritmi märgendatud puu leidmiseks tema Prüferi koodi järgi. Olgu antud  $\mathcal{M} = [m_1 m_2 \dots m_{n-2}]$ .

1. Iga  $i \in \{1, \dots, n-2\}$  jaoks leiame järjendile  $[m_i \dots m_{n-2}]$  vastava vähima märgendiga lehe märgendi. Olgu  $l_i$  hulga  $M \setminus \{l_1, \dots, l_{i-1}\}$  vähim element, mis erineb elementidest  $m_i, \dots, m_{n-2}$ .
2. Loome kahetipulise märgendatud puu märgenditega hulgast  $M \setminus \{l_1, \dots, l_{n-2}\}$ .
3. Iga  $i \in \{1, \dots, n-2\}$  jaoks (kahanevalt):
  - Lisame puule uue tipu, märgendame ta  $l_i$ -ga.
  - Ühendame selle tipu tipuga, mis on märgendatud  $m_i$ -ga.

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood:

7 7 7 4 5 7 4 4

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8 5



Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

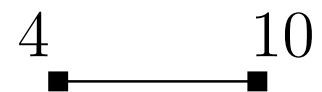
Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8 5 7

Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

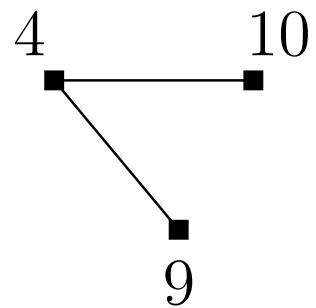
Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4

vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8 5 7 9



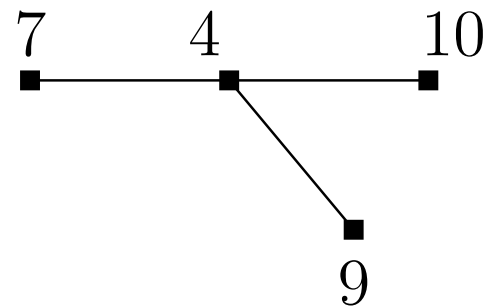
Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood:	7	7	7	4	5	7	4	4
vähima märgendiga lehe märgend:	1	2	3	6	8	5	7	9



Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

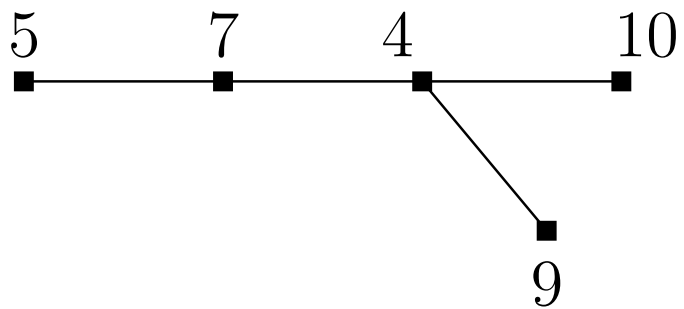
Kood:                                    7 7 7 4 5 7 4 4  
vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8 5 7 9



Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 

7	7	7	4	5	7	4	4
1	2	3	6	8	5	7	9

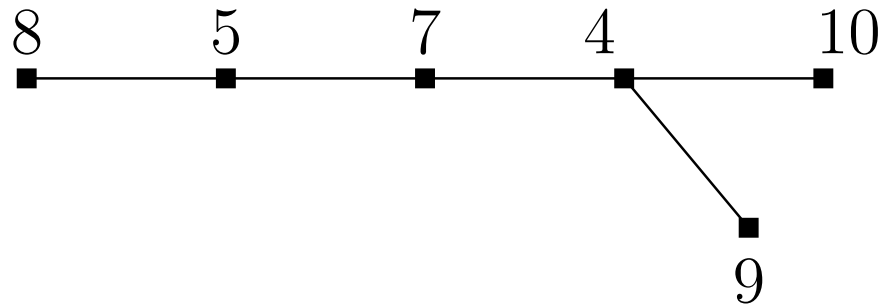


Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood:

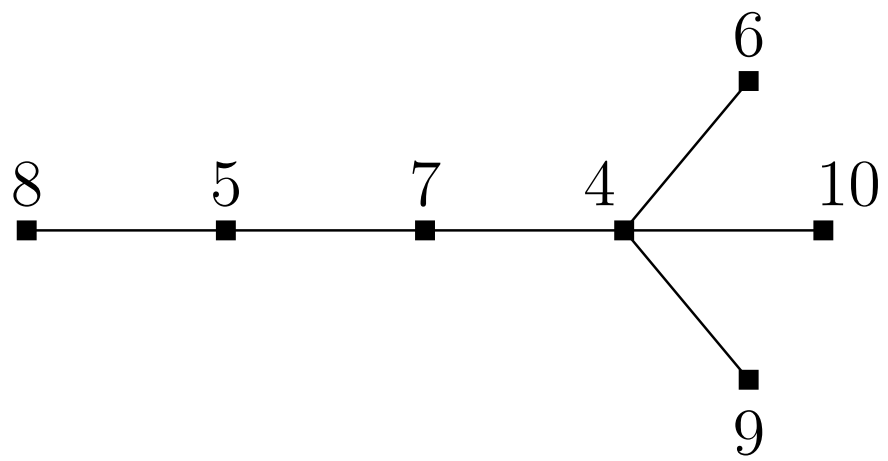
7	7	7	4	5	7	4	4
1	2	3	6	8	5	7	9

vähima märgendiga lehe märgend:



Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 7 7 7 4 5 7 4 4  
 vähima märgendiga lehe märgend: 1 2 3 6 8 5 7 9

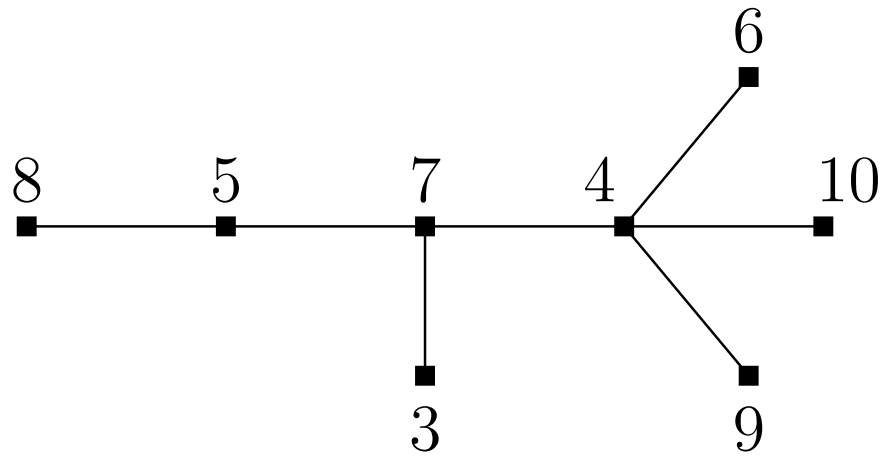


Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood:

7	7	7	4	5	7	4	4
1	2	3	6	8	5	7	9

vähima märgendiga lehe märgend:



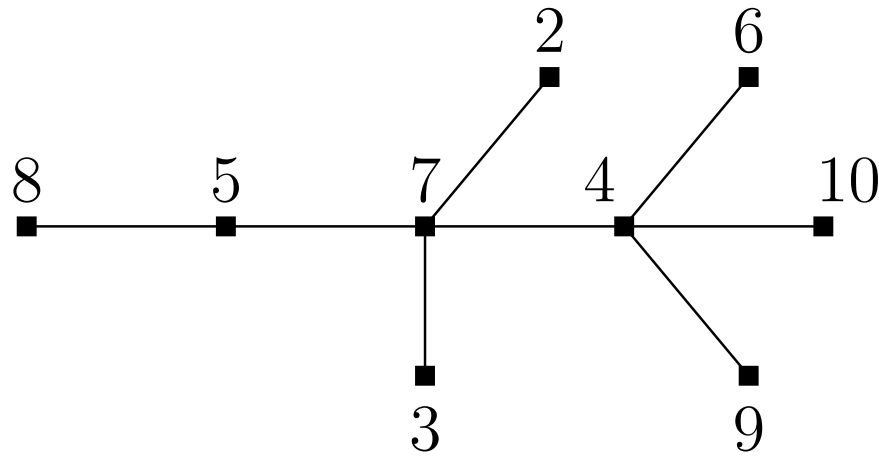


Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood:

7	7	7	4	5	7	4	4
1	2	3	6	8	5	7	9

vähima märgendiga lehe märgend:



Näide: Olgu  $M = \{1, \dots, 10\}$ .

Kood: 

7	7	7	4	5	7	4	4
1	2	3	6	8	5	7	9

