Võrgud ja vood
Ford-Fulkersoni algoritm

10. oktoober 2002

Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf.

Suunatud graafi tipu $v \in V$ jaoks on defineeritud tema *sisendaste* $\overrightarrow{\deg}(v)$ ja *väljundaste* $\overleftarrow{\deg}(v)$.

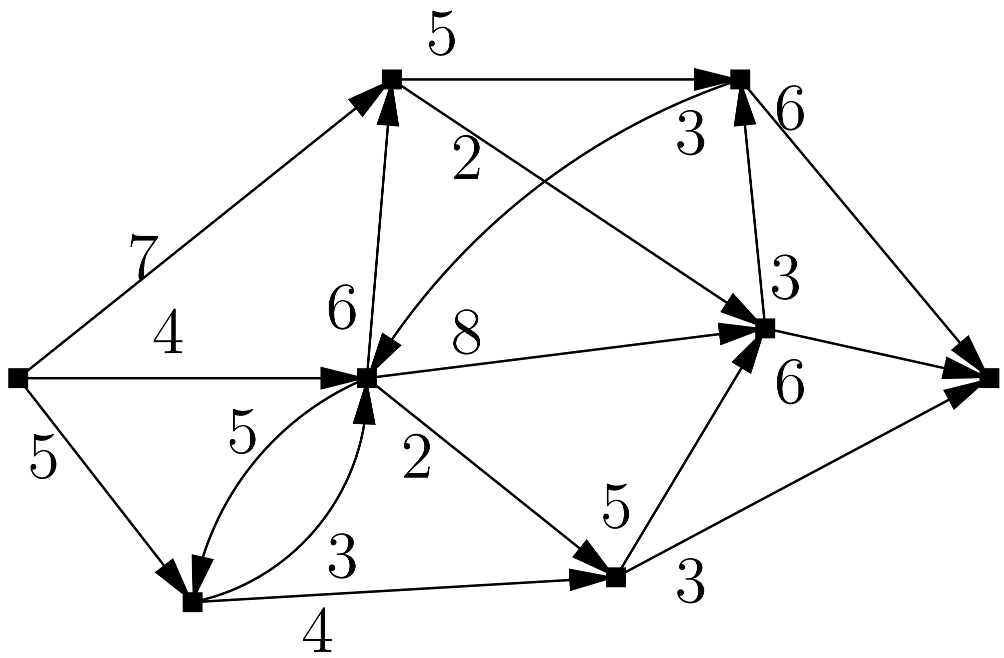
Kui $\overrightarrow{\deg}(v) = 0$, siis on v graafi G *lähe*. Kui $\overleftarrow{\deg}(v) = 0$, siis on v graafi G *suue*.

Läbilaskevõime G-l on mingi funktsioon $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Tipu $v \in V$ *ψ-sisendaste* on $\overrightarrow{\deg_\psi}(v) = \sum\limits_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(u,v)}} \psi(e)$.

ψ-väljundaste on $\overleftarrow{\deg_\psi}(v) = \sum\limits_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(v,u)}} \psi(e)$.

Võrk on paar (G, ψ), kus G on mingi suunatud graaf ja ψ mingi läbilaskevõime sellel.


5
6
3
2
7
3
6
4
8
5
6
5
2
5
3
3
4

Lause. Graafi $G = (V, E)$ kõigi tippude ψ-sisendastmete summa on võrdne G kõigi tippude ψ-väljundastmete summaga.

Tõestus.

$$\sum_{v\in V} \overrightarrow{\deg_\psi}(v) = \sum_{v\in V} \sum_{\substack{e\in E \\ \mathcal{E}(e)=(u,v)}} \psi(e) = \sum_{e\in E} \psi(e) =$$

$$\sum_{v\in V} \sum_{\substack{e\in E \\ \mathcal{E}(e)=(v,u)}} \psi(e) = \sum_{v\in V} \overleftarrow{\deg_\psi}(v) \ .$$

$\square$

Olgu (G,ψ) võrk. Loeme, et G-l on täpselt üks lähe s ja täpselt üks suue t.

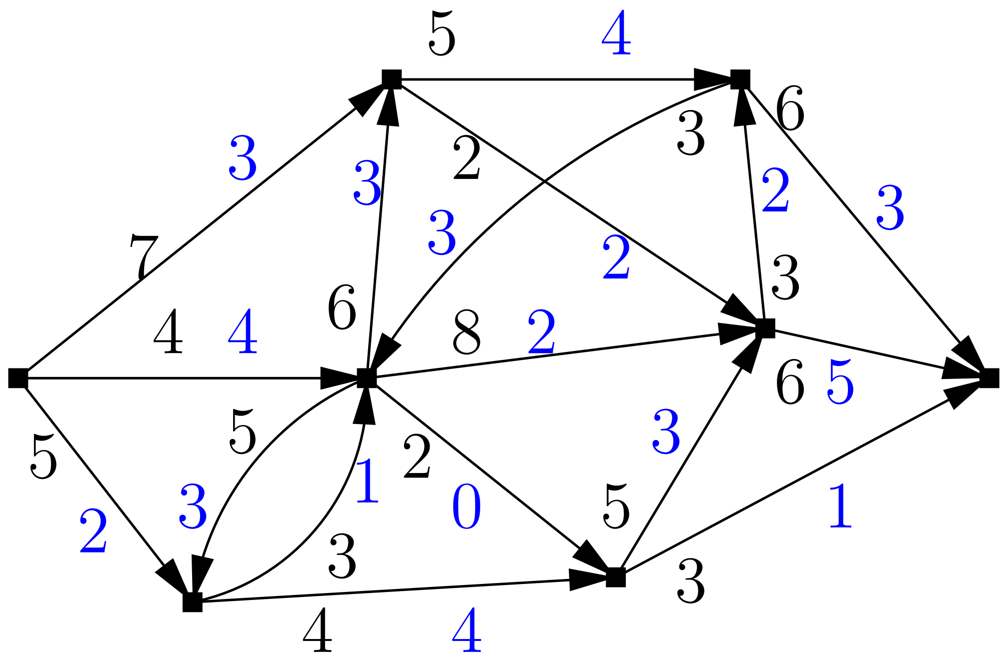
Voog võrgul (G,ψ) on mingi funktsioon $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, nii et

- $\varphi(v) \leq \psi(v)$ iga $v \in V$ jaoks.
- $\overrightarrow{\deg_\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg_\varphi}(v)$ iga $v \in V \backslash \{s,t\}$ jaoks.

Eelmisest lausest järeldub $\overleftarrow{\deg_\varphi}(s) = \overrightarrow{\deg_\varphi}(t)$. Seda suurust nimetame voo φ *väärtuseks* ja tähistame $|\varphi|$.

Voog on *maksimaalne*, kui tema väärtus on maksimaalne võimalik.

Tänases loengus loeme, et graafis $G = (V,E)$ pole silmuseid ja kordseid suunatud servi. Siis võime lugeda $E \subseteq V \times V$.


5
4
6
3
2
3
3
7
3
2
2
3
6
4
4
8
2
5
5
6
5
2
3
3
1
2
0
5
3
3
1
4
4
3

Lemma. Olgu (G, ψ) võrk, kus $G = (V, E)$. Olgu $V = V_s \dot{\cup} V_t$, nii et $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Olgu

$$\Phi(V_s, V_t) = \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \varphi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_t \times V_s)} \varphi(e) \ .$$

Siis on $\Phi(V_s, V_t)$ võrdne φ väärtusega.

Tõestus. Induktsioon üle $|V_s|$.

Baas. $|V_s| = 1$. Siis $V_s = \{s\}$. Hulk $V_s \times V_t$ sisaldab parasjagu kõik s-st väljuvad servad ja hulk $V_t \times V_s$ on tühi.

Samm. Kehtigu lause väide mingite hulkade V_s ja V_t jaoks. Olgu $x \in V_t \backslash \{t\}$, $V_s' = V_s \cup \{x\}$ ja $V_t' = V_t \backslash \{x\}$. Piisab, kui näitame, et $\Phi(V_s, V_t) = \Phi(V_s', V_t')$.

$\Phi(V_s, V_t)$:

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s		$+\varphi$	$+\varphi$
x	$-\varphi$		
V_t'	$-\varphi$		

$\Phi(V_s', V_t')$:

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s			$+\varphi$
x			$+\varphi$
V_t'	$-\varphi$	$-\varphi$	

$$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') =$$

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s		$+\varphi$	
x	$-\varphi$		$-\varphi$
V_t'		$+\varphi$	

$$= \overrightarrow{\deg}_\varphi(x) - \overleftarrow{\deg}_\varphi(x) = 0 \quad . \qquad \square$$

Võrgu (G, ψ), kus $G = (V, E)$, *lõige* on mingi servade hulk $L \subseteq E$, nii et iga suunatud tee G lähtest suudmesse kasutab mõnda serva hulgast L.

Alternatiivselt: $L \subseteq E$ on lõige, kui graafis $(V, E \backslash L)$ ei leidu ühtki suunatud teed tipust s tippu t.

Lõike L *läbilaskevõime* on summa $\sum_{e \in L} \psi(e)$. Tähistame $\psi(L)$.

Lõige on *minimaalne*, kui tema läbilaskevõime on minimaalne võimalik.

Teoreem (Ford ja Fulkerson). Võrgu maksimaalsete voogude väärtus on võrdne selle võrgu minimaalsete lõigetete läbilaskevõimega.

Tõestus. Olgu (G, ψ) võrk, olgu $G = (V, E)$. Olgu s tema lähe ja t tema suue. Näitame, et

I. Ühegi voo väärtus pole suurem kui ühegi lõike läbilaskevõime.

II. Maksimaalse voo jaoks leidub lõige, mille läbilaskevõime on võrdne selle voo väärtusega.

I osa. Olgu φ mingi voog ja L mingi lõige.

Olgu $V_s \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, kuhu leidub tipust s suunatud tee, kasutamata servi hulgast L. Olgu $V_t = V \backslash V_s$. Kuna $E \cap (V_s \times V_t) \subseteq L$, siis

$$\psi(L) \geq \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \psi(e) \geq \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \varphi(e) \geq \Phi(V_s, V_t) = |\varphi| \ .$$

II osa. Olgu φ mingi maksimaalne voog.

Olgu $V_s \subseteq V$ kõigi selliste tippude v hulk, et:
Leidub *suunamata* tee $s = v_0 \overset{e_1}{\text{——}} v_1 \overset{e_2}{\text{——}} \cdots \overset{e_m}{\text{——}} v_m = v$, nii et

- Kui $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, siis $\varphi(e_i) < \psi(e_i)$.
- Kui $e_i = (v_i, v_{i-1})$, siis $\varphi(e_i) > 0$.

Ütleme, et tippude v_{i-1} ja v_i vahel on voog *küllastamata*.

Sellist teed nimetame *suurendavaks*.

Olgu $V_t = V \backslash V_s$. Näitame, et $t \in V_t$. Tõepoolest, kui $t \in V_s$, siis pole φ maksimaalne:

Olgu $s = v_0 \overset{e_1}{\text{---}} v_1 \overset{e_2}{\text{---}} \cdots \overset{e_m}{\text{---}} v_m = t$ mingi suurendav tee. Defineerime positiivsed reaalarvud δ_i järgmiselt:

$$\delta_i = \begin{cases} \psi(e_i) - \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases} .$$

Olgu $\varepsilon = \min_i \delta_i$. Olgu φ' järgmine voog:

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e), & \text{kui } e \notin \{e_1, \dots, e_m\} \\ \varphi(e) + \varepsilon, & \text{kui } e = e_i = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e) - \varepsilon, & \text{kui } e = e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases} .$$

Siis φ' on voog ja $|\varphi'| = |\varphi| + \varepsilon$.

Hulkade V_s ja V_t konstruktsioon annab:

- Kui $e \in E \cap (V_s \times V_t)$, siis $\varphi(e) = \psi(e)$.
- Kui $e \in E \cap (V_t \times V_s)$, siis $\varphi(e) = 0$.

Olgu $L = E \cap (V_s \times V_t)$. Siis L on lõige ja $\psi(L) = |\varphi|$. $\square$

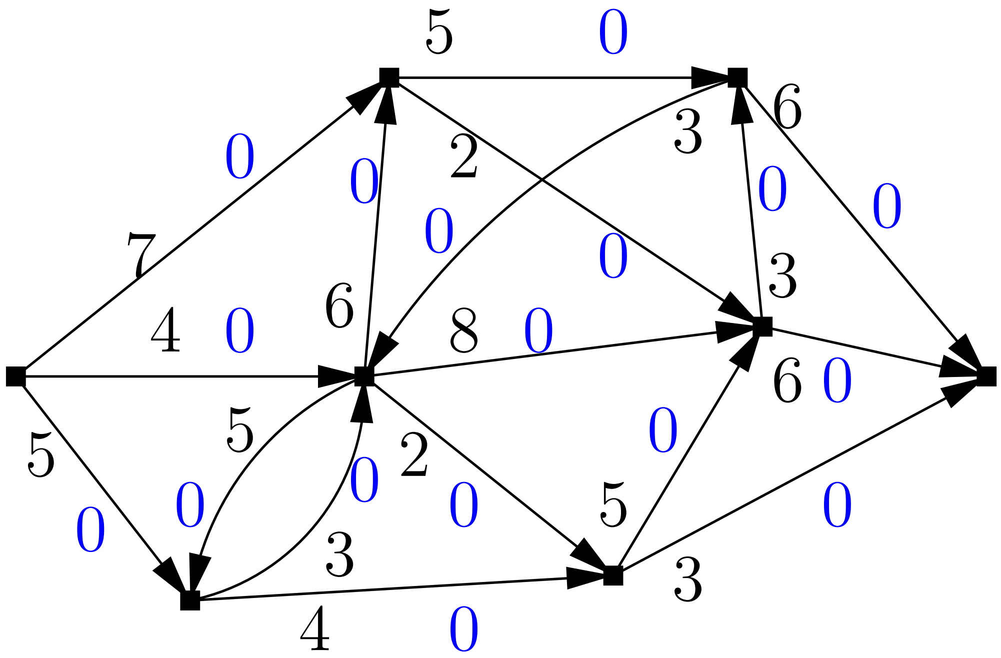
Algoritm max. voo leidmiseks (Ford-Fulkerson). Olgu (G, ψ) võrk, kus $G = (V, E)$.

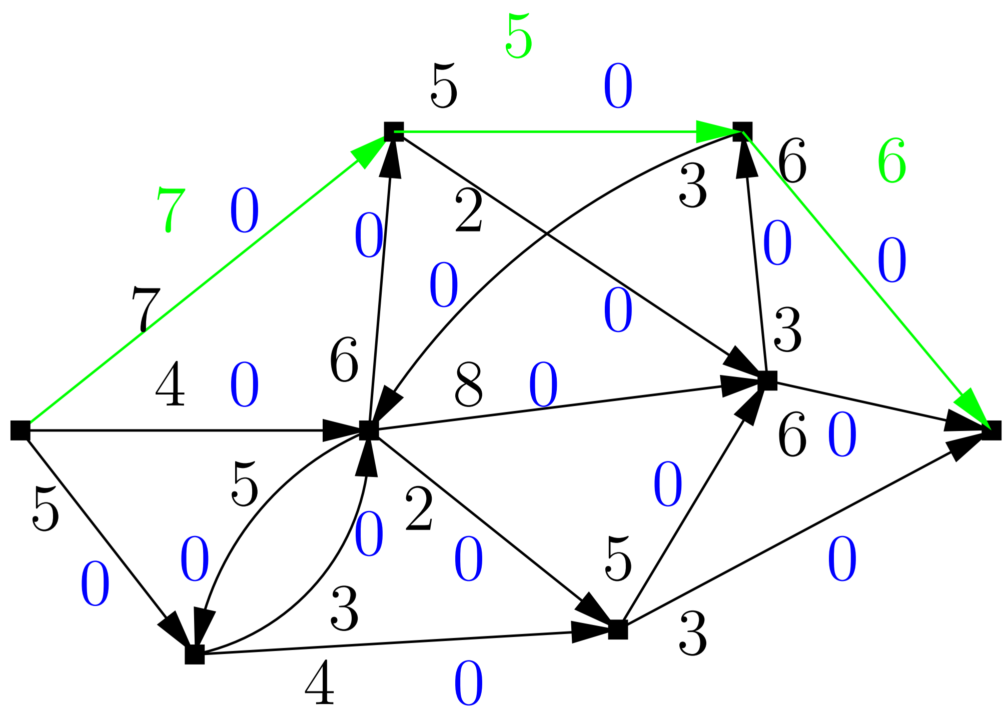
Olgu φ mingi voog võrgul (G, ψ), näiteks $\forall e : \varphi(e) = 0$.

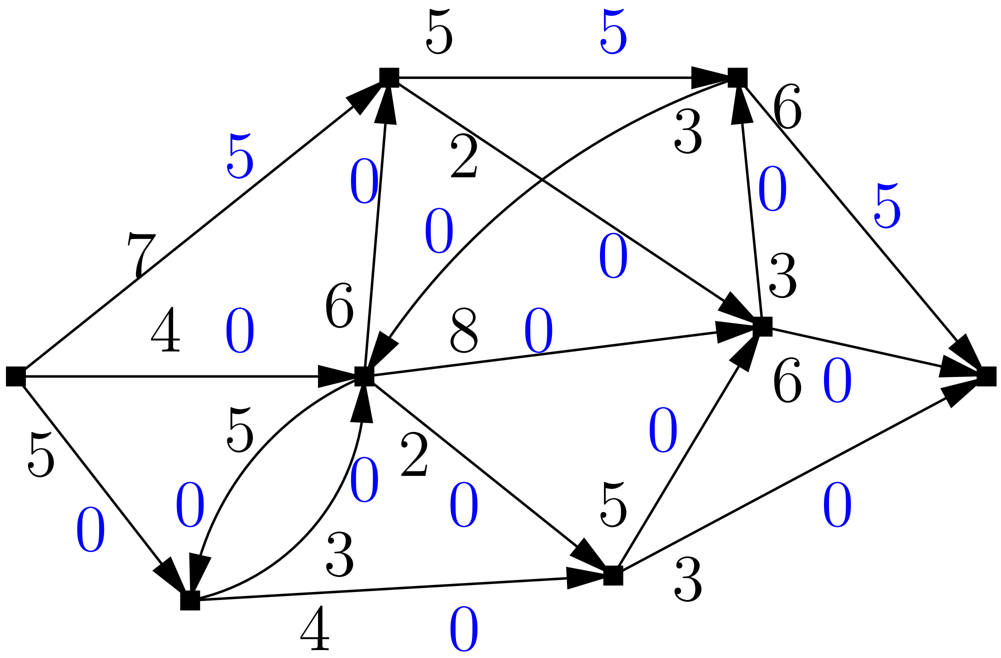
Korda:

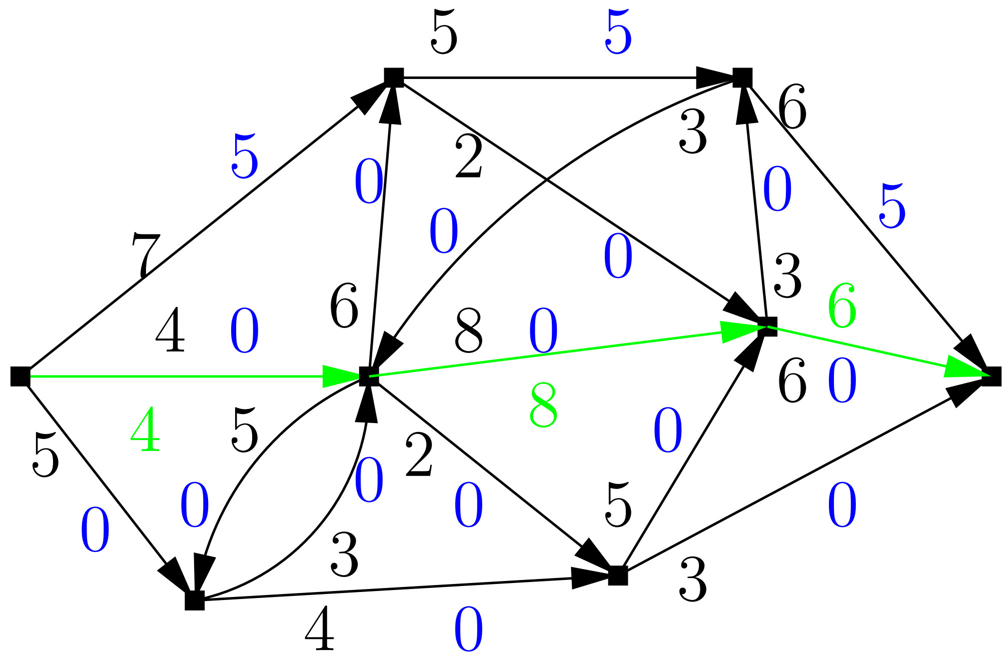
1. Leia mingi suurendav tee $s = v_0 \overset{e_1}{\text{——}} v_1 \overset{e_2}{\text{——}} \cdots \overset{e_m}{\text{——}} v_m = t$. Kui sellist teed ei leidu, siis lõpeta ja väljasta φ.
2. Konstrueeri φ' nagu kujutatud 2 slaidi tagasi.
3. Omista $\varphi := \varphi'$.

Mingi suurendav tee leitakse graafi mingil viisil läbides.

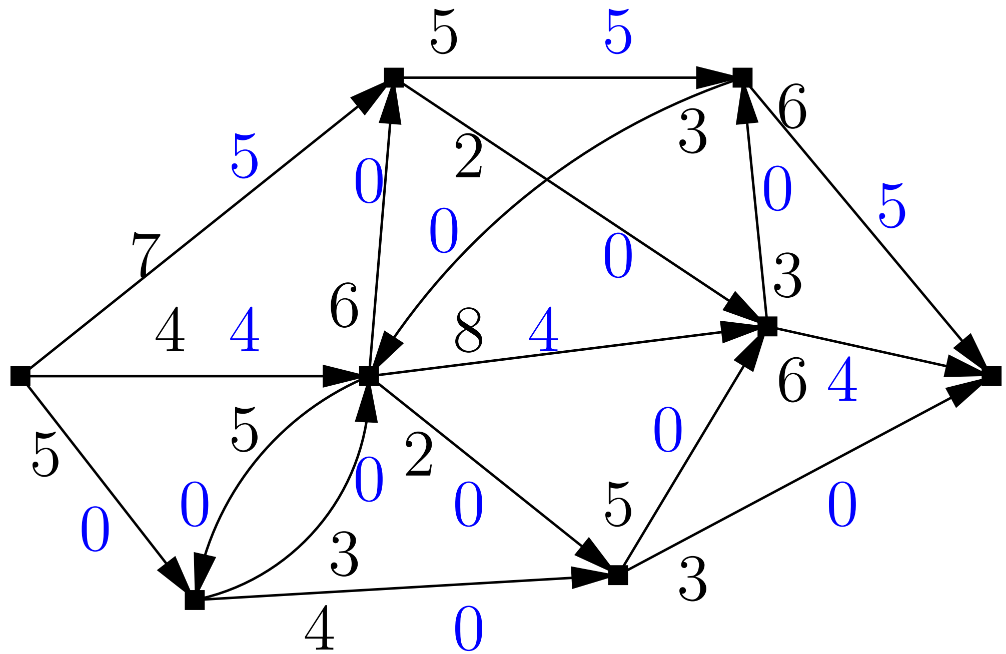

5
0
0
6
3
2
0
0
0
0
7
3
6
4
0
8
0
6
0
5
0
5
0
2
0
0
5
0
3
3
4
0

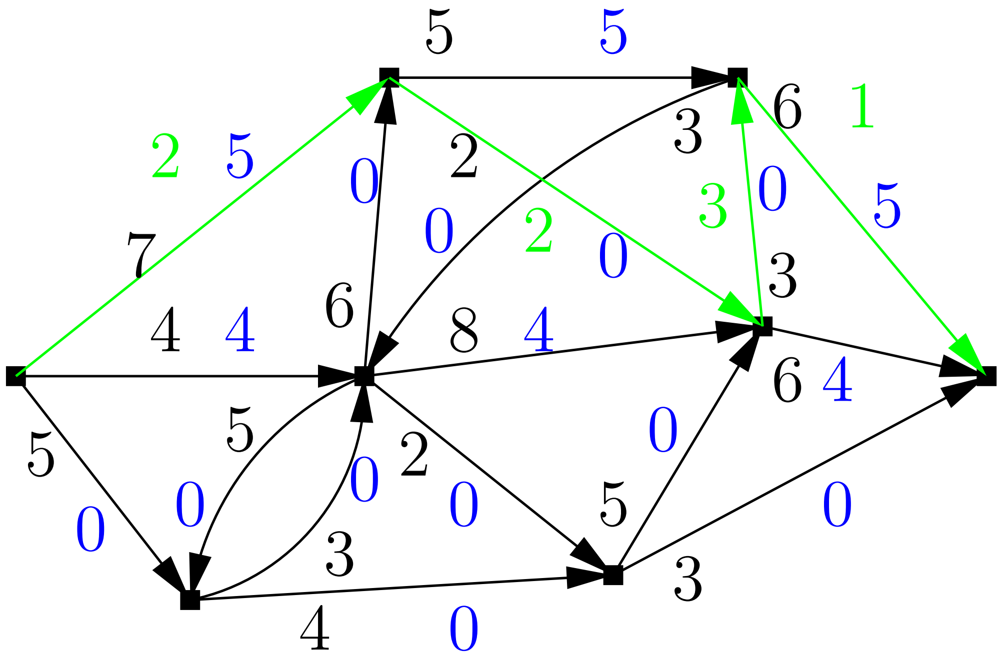

5
5
0
6
6
7
0
3
0
2
0
0
0
7
3
0
4
0
6
8
0
6
0
5
0
5
2
0
0
0
5
0
3
3
4
0

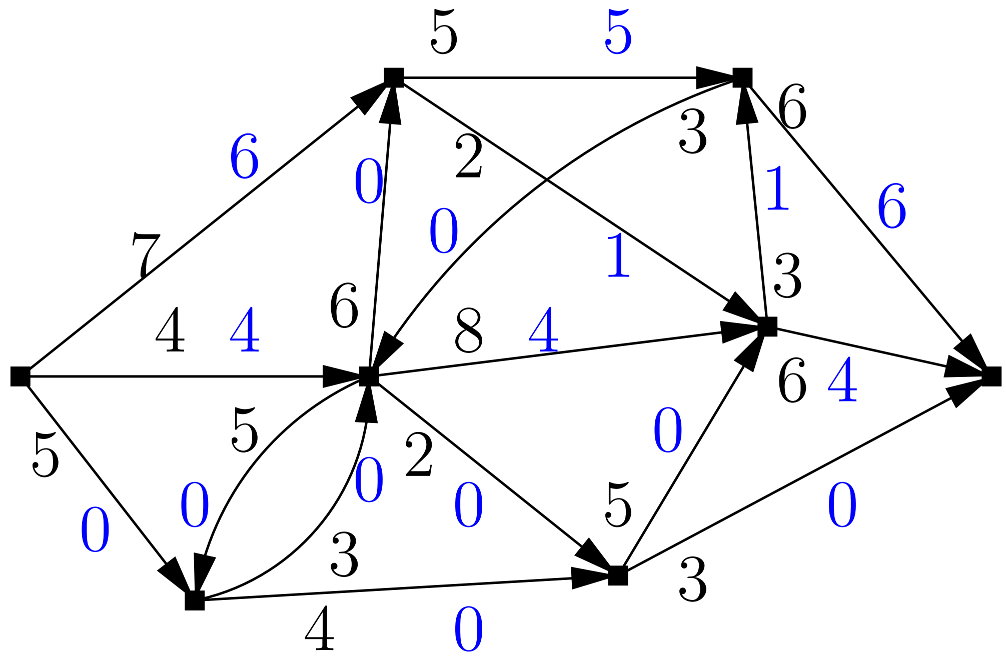

5
5
5
7
0
2
3
6
0
0
5
0
3
6
4
0
8
0
6
0
5
2
0
0
0
0
5
0
3
3
4
0

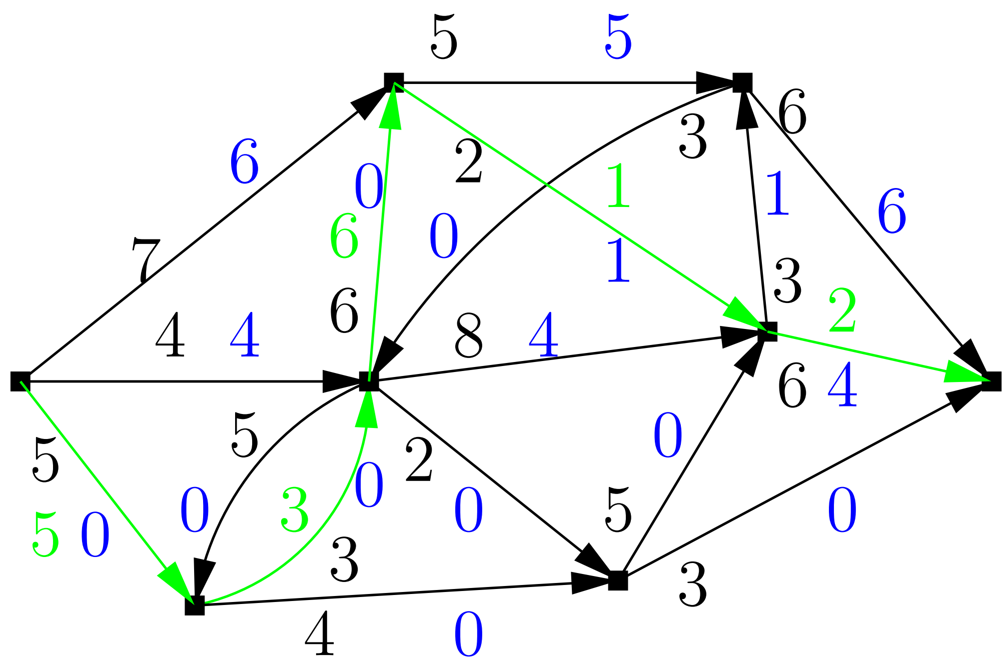


5
5
7
5
0
2
3
6
0
0
0
5
4
0
6
8
0
3
6
5
4
5
8
6
0
0
0
2
0
0
5
3
0
3
4
0

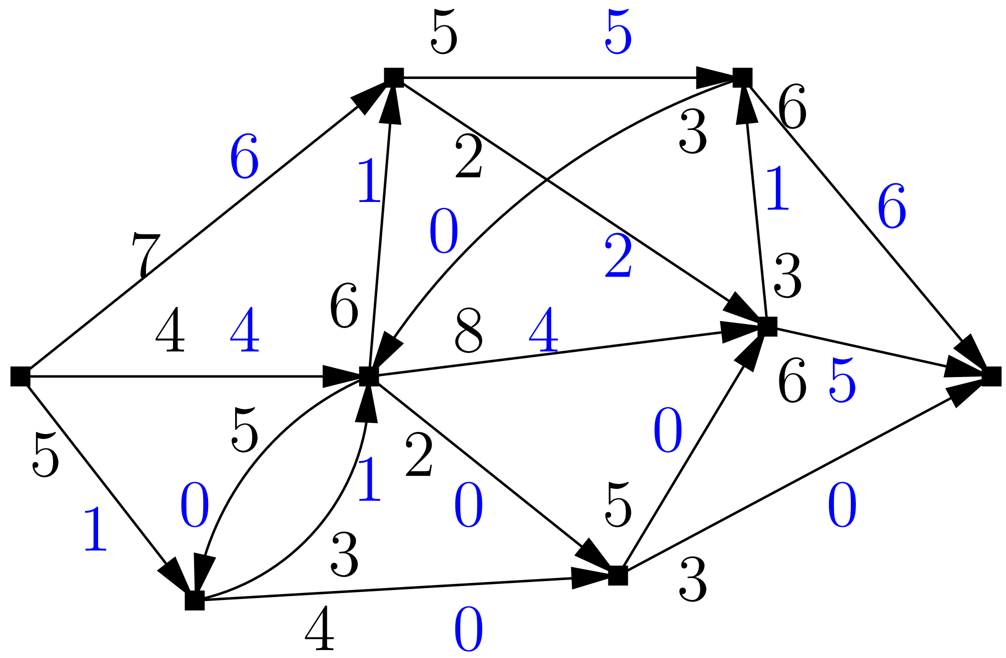

5
5
6
5
7
0
3
2
0
5
0
0
3
6
4
4
8
4
6
4
5
5
2
0
0
0
0
0
5
3
4
0
3
0


5
5
6
1
2
5
0
3
2
0
3
0
5
7
0
2
0
3
6
4
4
8
4
6
4
5
5
2
0
0
0
0
5
0
0
3
3
4
0

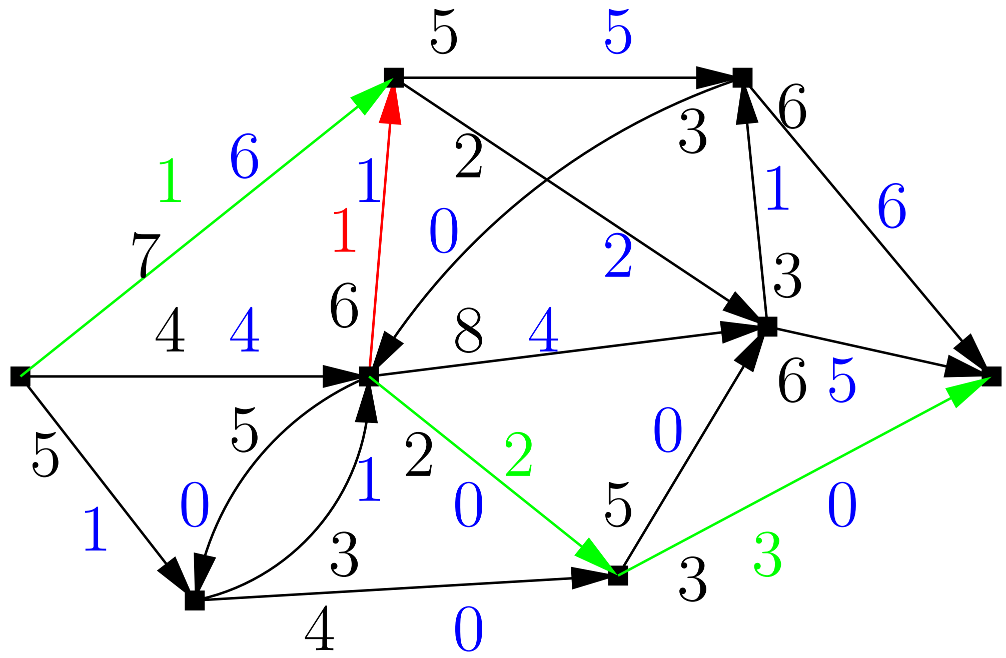

5
5
6
3
6
2
0
1
0
6
7
1
3
4
4
6
8
4
6
4
5
5
2
0
0
0
0
0
5
0
3
3
4
0



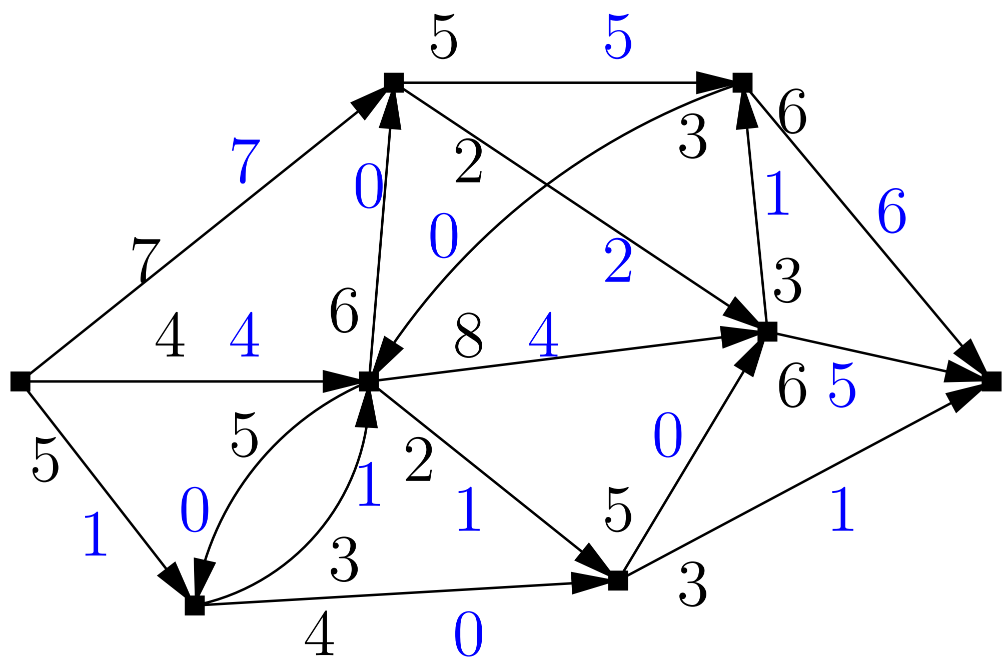
5
5
6
6
3
0
2
1
6
7
0
1
6
3
2
4
4
8
4
6
4
5
5
2
0
0
0
0
5
5
0
3
3
4
0



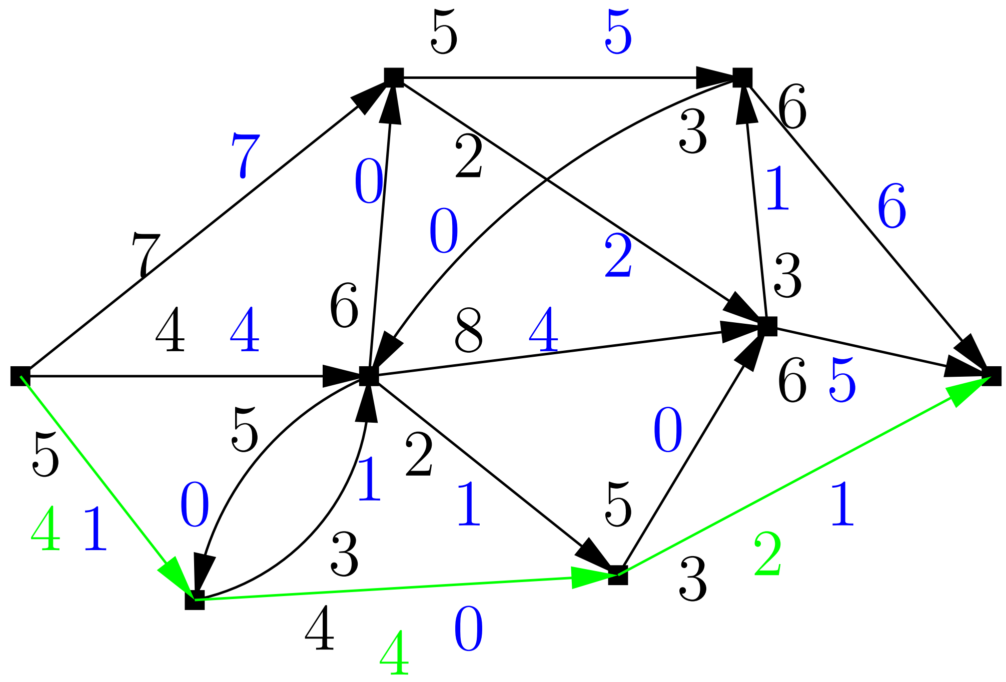
5
5
6
7
6
1
2
3
0
2
1
6
3
4
4
6
8
4
6
5
5
5
0
2
0
1
0
1
3
5
0
3
4
0

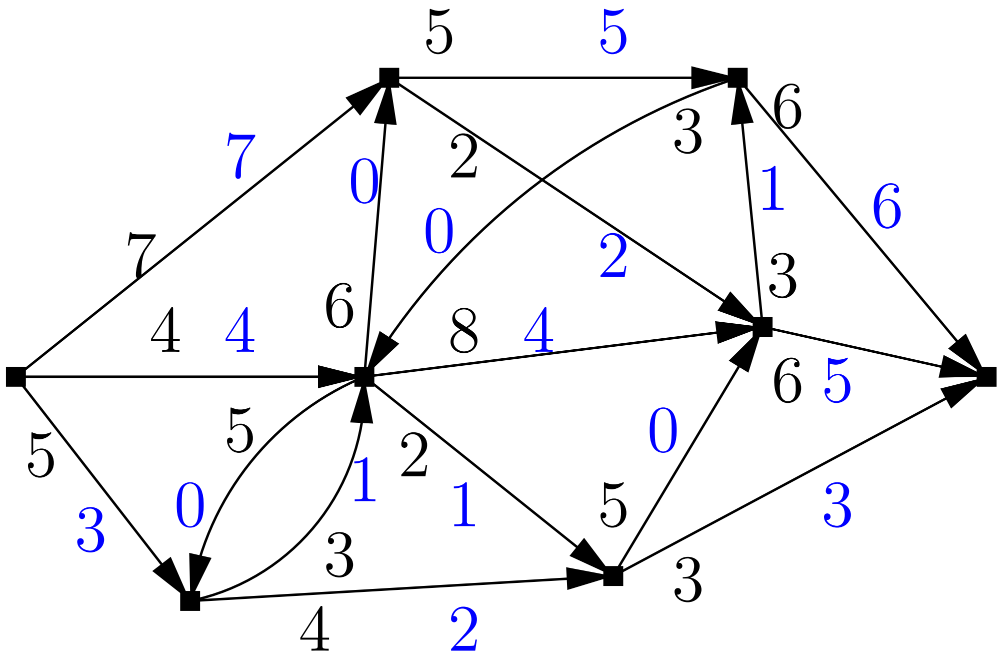


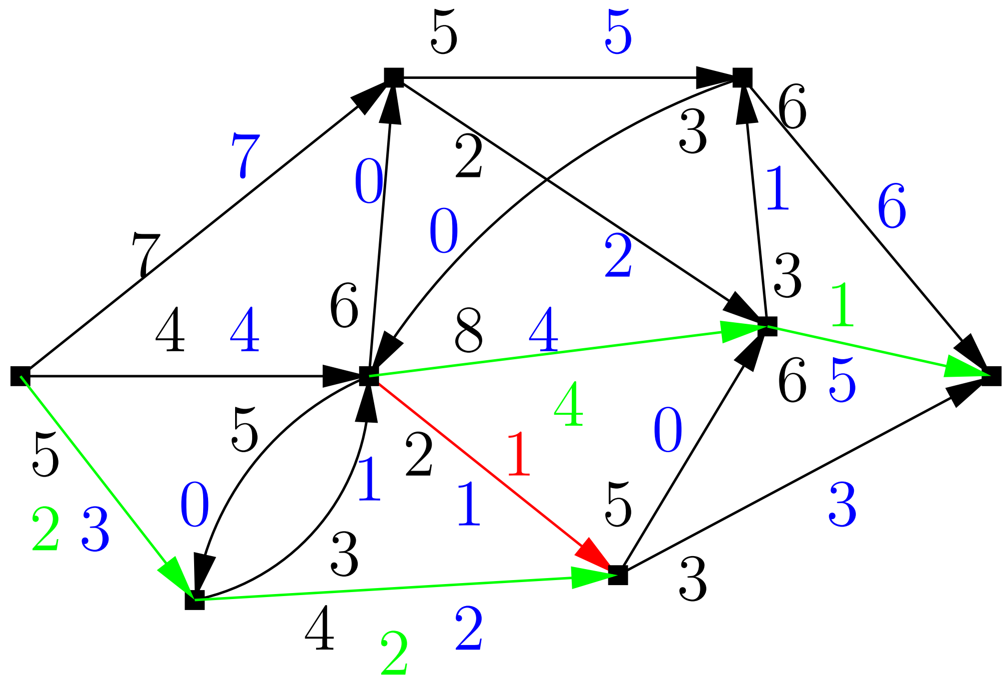
5
5
6
3
1
6
2
1
6
7
1
0
2
3
6
4
4
8
4
6
5
5
0
5
2
2
5
0
1
0
1
0
3
3
3
0
4
0



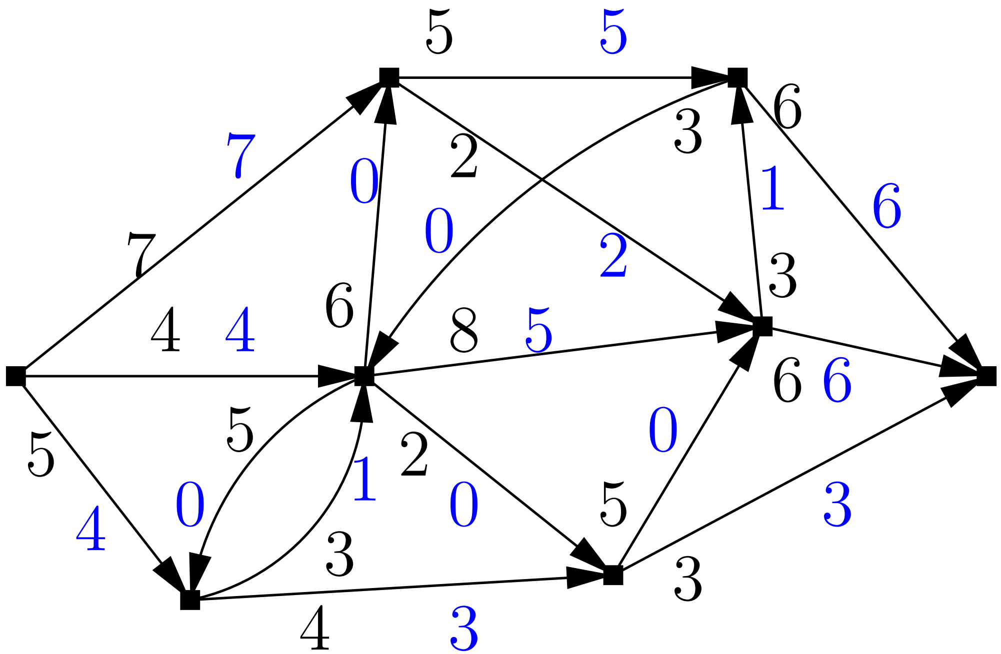
5
5
6
3
7
0
2
1
6
0
2
7
3
4
4
6
8
4
6
5
5
0
5
2
0
1
1
5
1
3
3
4
0


5
5
7
6
3
2
0
1
6
0
7
2
3
6
4
4
8
4
6
5
5
2
0
5
0
1
1
5
4
1
3
1
3
2
4
4
0


5
5
6
7
3
2
0
1
6
0
7
2
3
6
4
4
8
4
6
5
5
2
0
5
0
1
1
3
5
3
3
4
2



5
5
7
6
3
2
0
1
6
0
7
2
3
1
4
4
6
8
4
6
5
5
4
0
5
2
1
2
1
0
5
2
3
1
3
3
4
2
2



5
5
6
3
2
7
0
1
6
0
2
3
7
6
4
4
8
5
6
6
5
0
5
2
1
0
0
5
4
3
3
3
4
3

Suurendava tee leidmine:

Olgu $V_s = \{s\}$, $W = \{s\}$.

Korda, seni kuni $W \neq \emptyset$ ja $t \notin V_s$.

1. Vali mingil viisil $v \in W$. Eemalda ta hulgast W.
2. Iga $e \in E$ jaoks, mille üks otspunkt on v: kui v ja serva e teise otspunkti w vahel on voog küllastamata ning kui $w \notin V_s$, siis
   (a) lisa w hulkadesse V_s ja W.
   (b) Jäta meelde, et w-le „eelnev tipp“ on v.

Kui $t \notin V_s$, siis ei leidu suurendavat teed. Kui $t \in V_s$, siis konstrueeri suurendav tee, liikudes t-st mööda „eelnevaid tippe“ tippu s.

Lause. Kui võrgu kõigi servade läbilaskevõimed on täisarvulised, siis täidetakse max. voo leidmise algoritmis tsüklit ülimalt $|\varphi|$ korda, kus φ on mingi maksimaalne voog.

Tõestus. Igal iteratsioonil suureneb juba leitud voo väärtus. Kuna murdarvud ei saa mitte kuskilt sisse tulla, siis suureneb ta iga kord vähemalt 1 võrra. $\square$

Loeme nüüd, et suurendav tee lähtest suudmesse leitakse graafi laiuti läbides (Edmonds-Karpi täiendus).

Siis on leitud suurendaval teel $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$ järgmine omadus:
Iga i jaoks on $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_i} v_i$ lühima pikkusega suurendav tee lähtest tippu v_i.

Kui (G, ψ), kus $G = (V, E)$ on mingi võrk ja φ mingi voog sellel, siis tähistagu $\delta_\varphi(v)$, kus $v \in V$, lühima suurendava tee pikkust lähtest tippu v.

Lemma. Olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ voogude jada, mis tekivad max. voo leidmise algoritmi järjestikustel iteratsioonidel. Siis on suvalise $v \in V$ jaoks jada $\delta_{\varphi_i}(v)$ mittekahanev.

Tõestus. Vaatame mingeid vooge φ_n ja φ_{n+1} selles voogude jadas, olgu $B = \{v \mid \delta_{\varphi_{n+1}}(v) < \delta_{\varphi_n}(v)\}$. Oletame vastuväiteliselt, et B pole tühi. Olgu $v \in B$ selline, mille jaoks $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ on minimaalne.

Olgu P' lühim suurendav tee lähtest tippu v voo φ_{n+1} järgi. Olgu u selle tee eelviimane tipp. Kuna $\delta_{\varphi_{n+1}}(u) < \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$, siis $u \notin B$.

Vaatame voogu φ_n tippude u ja v vahel.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastamata, siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) + 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja seega $v \notin B$, vastuolu.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastatud, siis olgu P_n suurendav tee lähtest suudmesse, nii et φ_{n+1} on konstrueeritud φ_n-st, lisades talle täiendava voo läbi tee P_n.

Kuna lisamisel muutub voog u ja v vahel küllastamatuks, siis leidub tees P_n serv $\cdots — v — u — \cdots$. Vastavalt P_n omadustele $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1$. Saame

$$\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 2 < \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja seega $v \notin B$, vastuolu. $\square$

Teoreem. Max. voo leidmise algoritm teeb ülimalt $(|V|-2)\cdot|E|$ iteratsiooni.

Tõestus. Vaatame algoritmi mingit iteratsiooni (olgu ta järjekorranumber n). Sel iteratsioonil konstrueeritakse suurendav tee $P_n : s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$. Ütleme, et tipupaar (v_{i-1}, v_i) on *kriitiline*, kui talle vastav suurus δ_i (mis näitab, kui palju tuleb voogu tippude v_{i-1} ja v_i vahel suurendada, et ta küllastuks) on minimaalne (s.t. $\delta_i = \varepsilon$).

Igal iteratsioonil on vähemalt üks kriitiline tipupaar. Järgmisel iteratsioonil on see tipupaar küllastatud.

Loeme, mitmel iteratsioonil korda saab mingi tipupaar (u, v) kriitiline olla. Kui ta on kriitiline n-ndal iteratsioonil, siis $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) + 1$.

Et (u, v) saaks kunagi hiljem jälle kriitiline olla, peab millalgi olema iteratsioon nr. $n' > n$, millel leitav suurendav tee $P_{n'}$ sisaldab serva $\cdots — v — u — \cdots$. Siis

$$\delta_{\varphi_{n'}}(u) = \delta_{\varphi_{n'}}(v) + 1 \geq \delta_{\varphi_n}(v) + 1 = \delta_{\varphi_n}(u) + 2,$$

seega iga kord, kui (u, v) saab kriitiliseks, on $\delta_\varphi(u)$ eelmise korraga võrreldes vähemalt kahe võrra suurem.

Suurus $\delta_\varphi(u)$ ei saa olla suurem kui $|V| - 2$ (kui (u, v) on kriitiline). Seega on (u, v) kriitiline ülimalt $\frac{|V|-2}{2}$ korral. Meid huvitavaid paare (u, v) on ülimalt $2 \cdot |E|$ tükki. $\square$

Järgmise loengu ajal toimub kontrolltöö. Ta katab esimeses viies loengus (ja praktikumides) räägitu. Töö ajal on materjalide kasutamine lubatud. Ürituse viib läbi Meelis Roos.

Järgmises praktikumis (homme või järgmise nädala alguses) tegeleme me veel kontrolltöösse tulevate teemadega (ja mitte võrkude ja voogudega).

Palun leppige omavahel kokku veel üks aeg nädalas, mil me võiksime loenguid teha. Ma pole veel nii mõnelgi neljapäeval (näiteks 07.11, 21.11) Tartus ja seetõttu võib loengukordadest puudu tulla.