Kooskõlad

(üks tarvilik ja piisav tingimus nende leidumiseks)

31. oktoober 2002

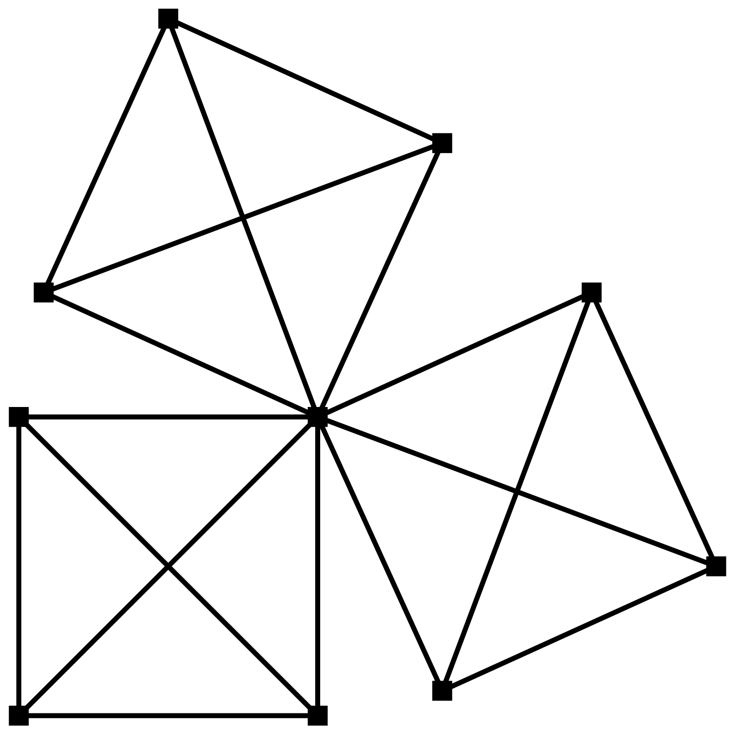
Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. *Vastavus* graafis G on selline servade hulk $M \subseteq E$, et iga $v \in V$ jaoks $\deg_M(v) \leq 1$.

Kooskõla on selline vastavus M, mille korral $\deg_M(v) = 1$ iga $v \in V$ jaoks.

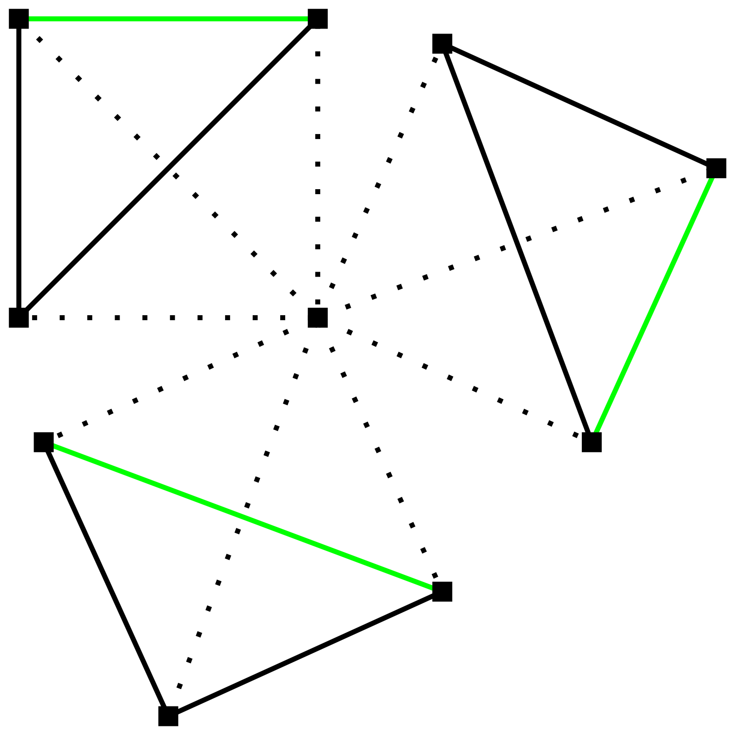
Tänases loengus anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse kooskõla leidumiseks graafis.

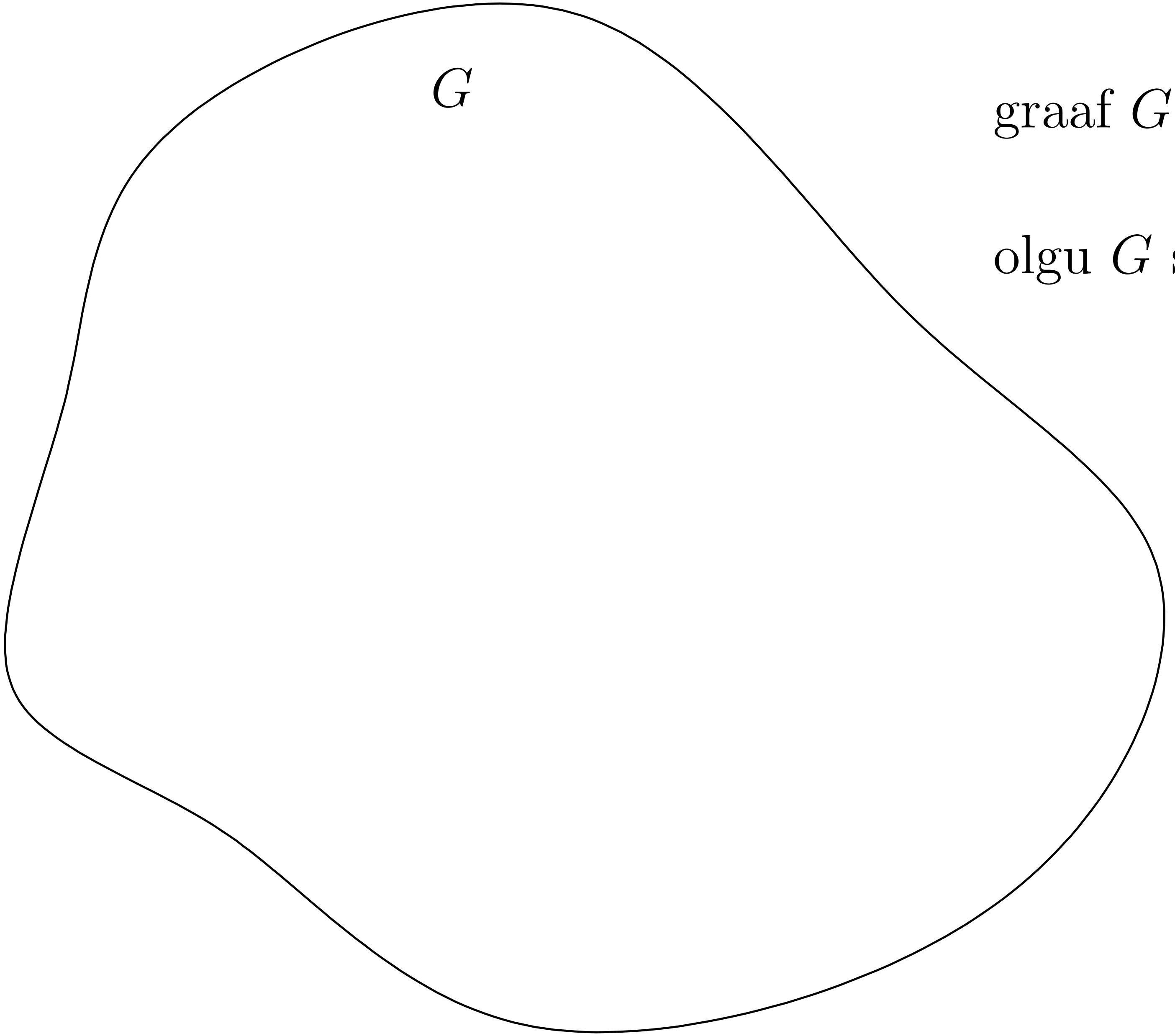
Ilmne on, et graafis on kooskõla parajasti siis, kui tema igas sidususkomponendis on kooskõla. Seepärast vaatame selles loengus ainult sidusaid graafe.

Hästi lihtne tarvilik tingimus — graafis peab olema paarisarv tippe.



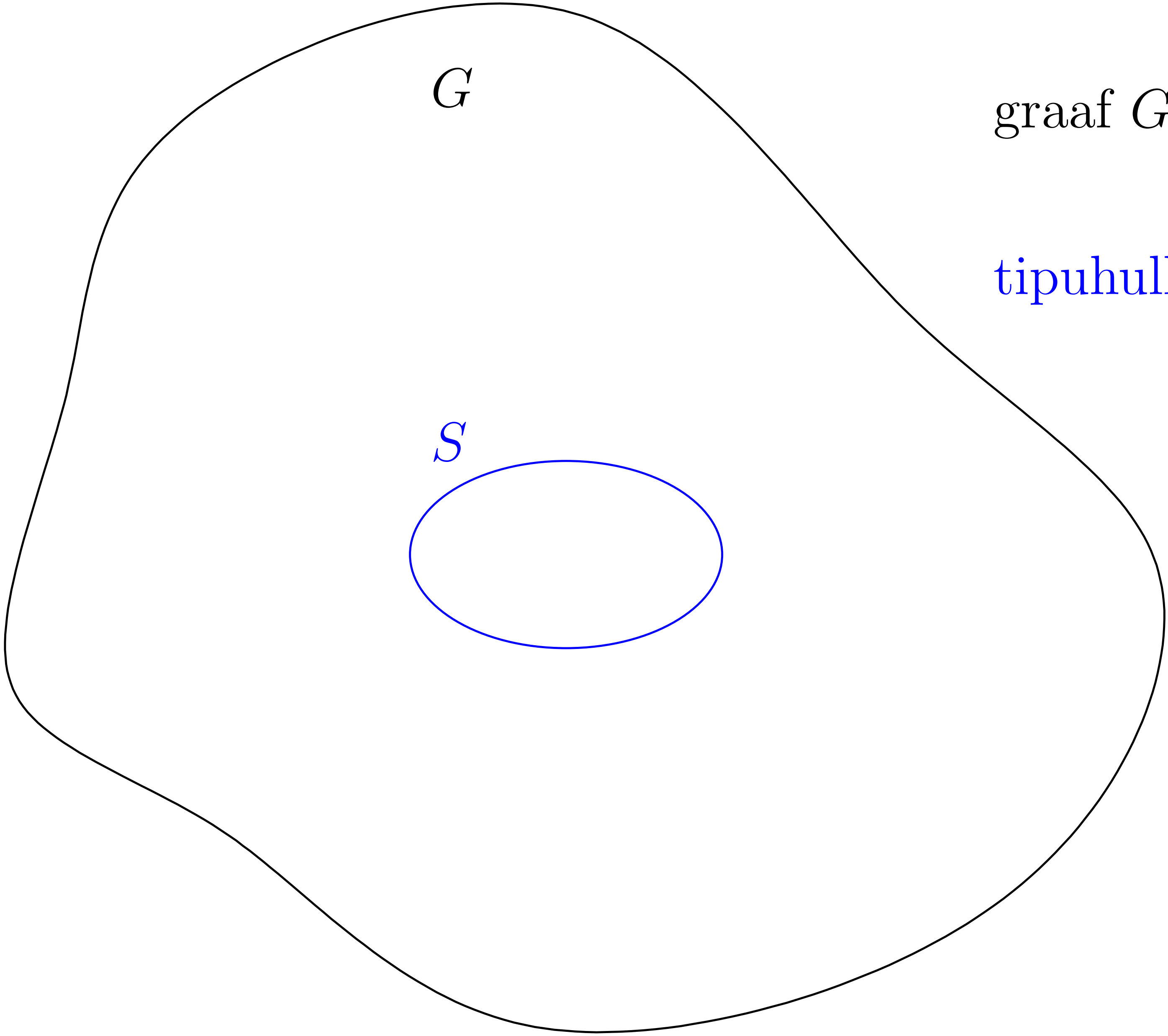
Selles graafis ei ole kooskõla





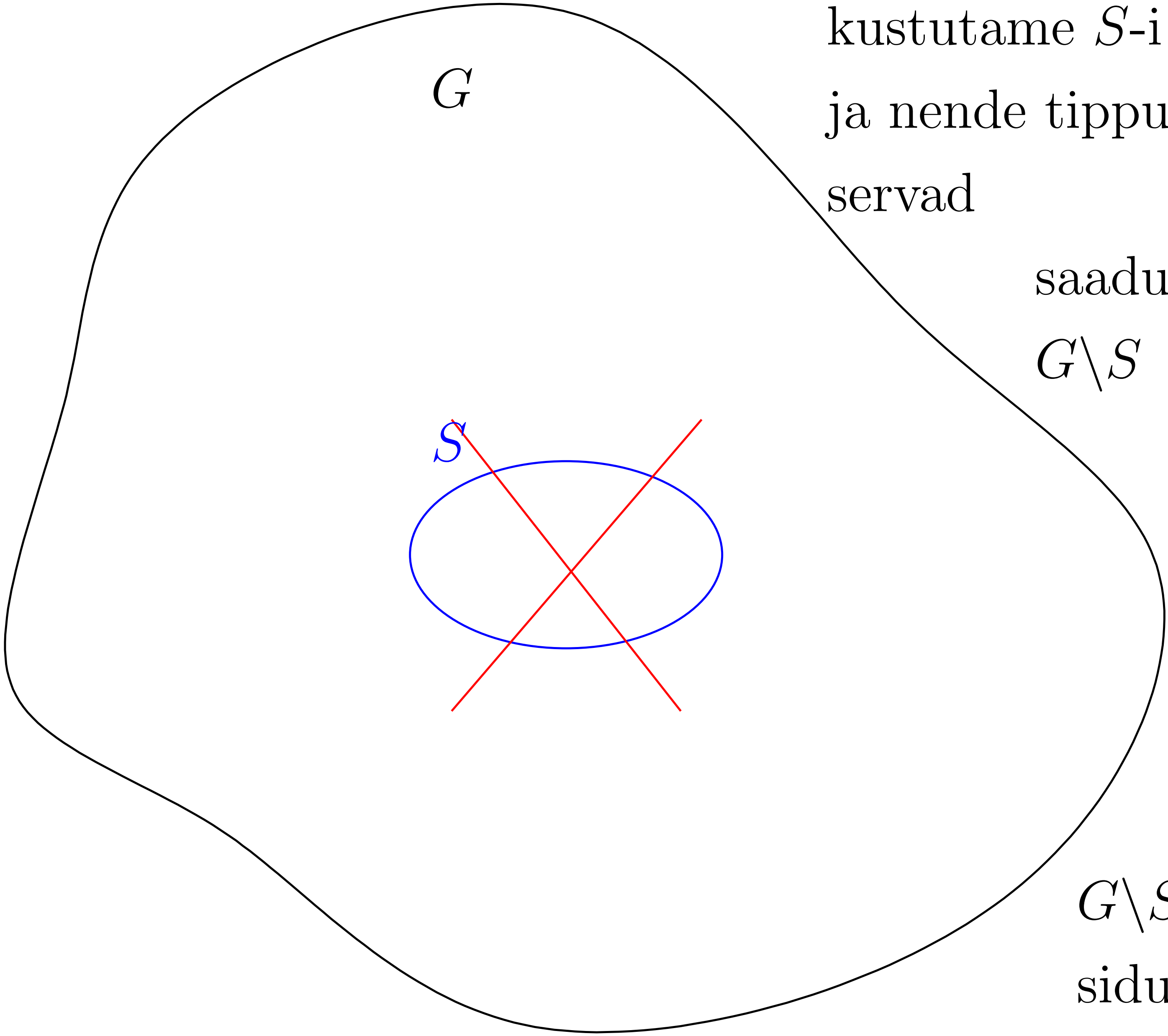
graaf $G = (V, E)$

olgu G sidus



graaf $G = (V, E)$

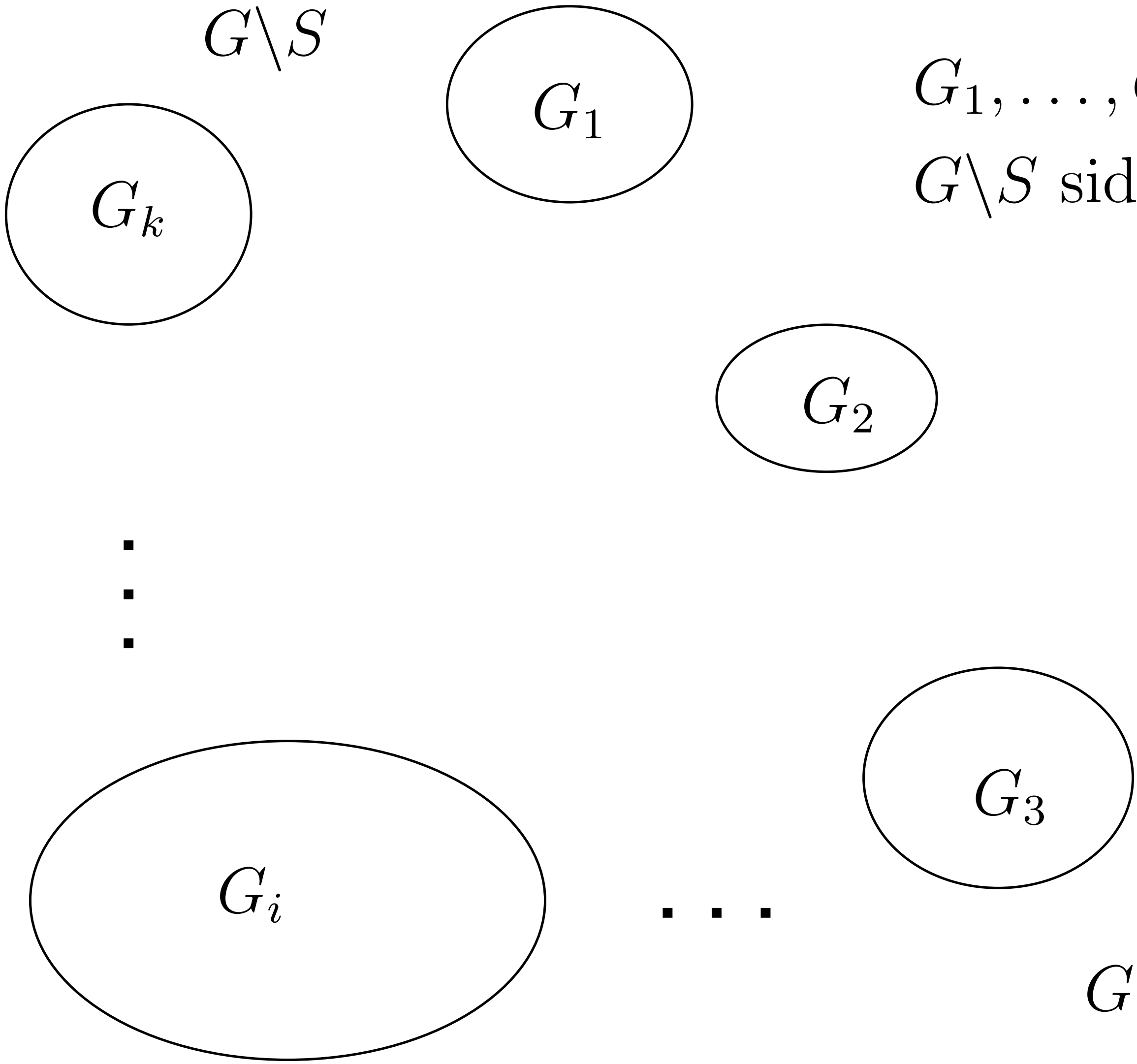
tipuhulk $S \subseteq V$



kustutame S-i kuuluvad tipud
ja nende tippudega intsidentsed
servad

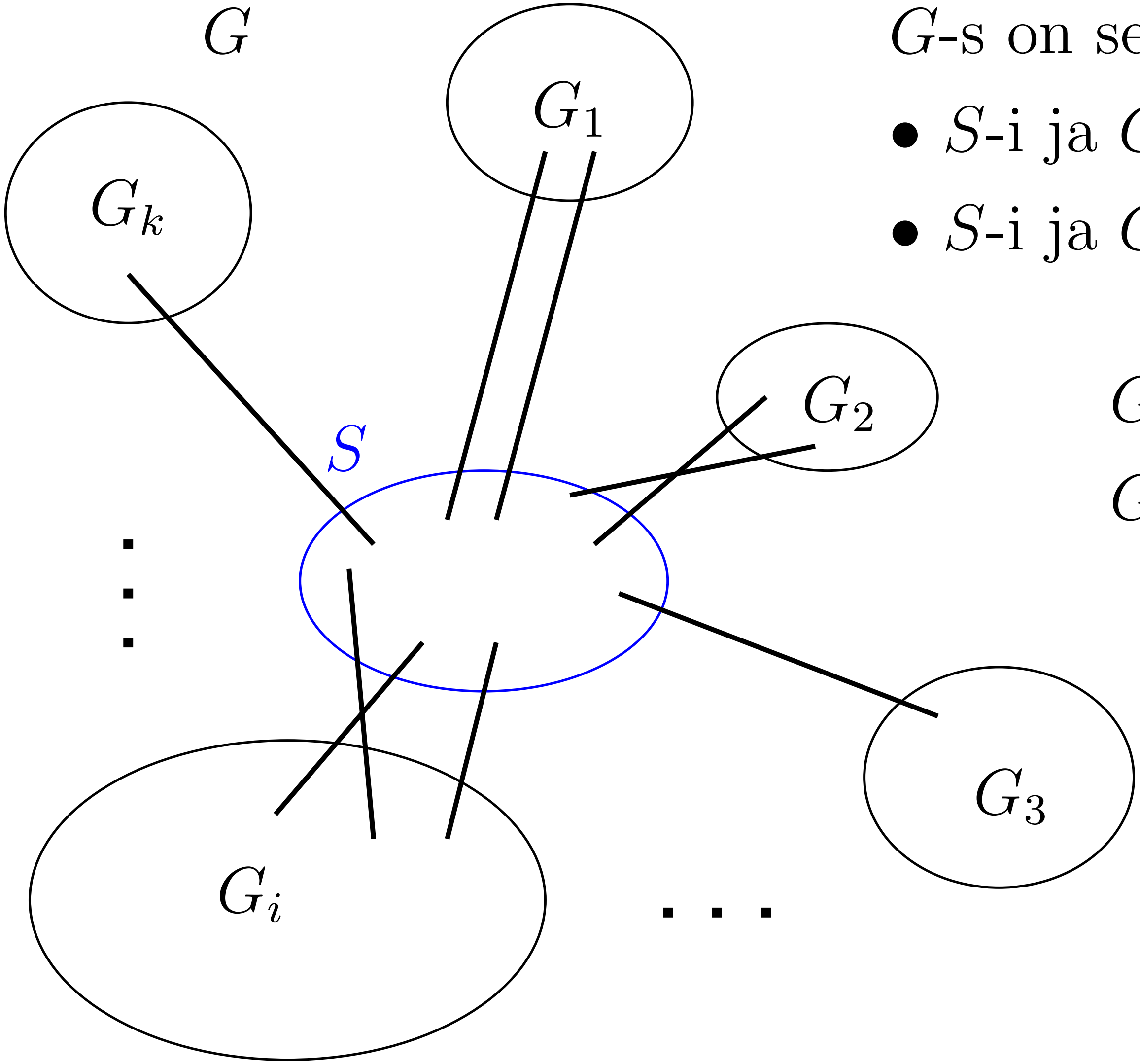
saadud graafi tähistame
$G \setminus S$

$G \setminus S$ ei pruugi
sidus olla



$G_1, \ldots, G_k$:
$G \setminus S$ sidususkomponendid

$G \setminus S$ ei pruugi
sidus olla

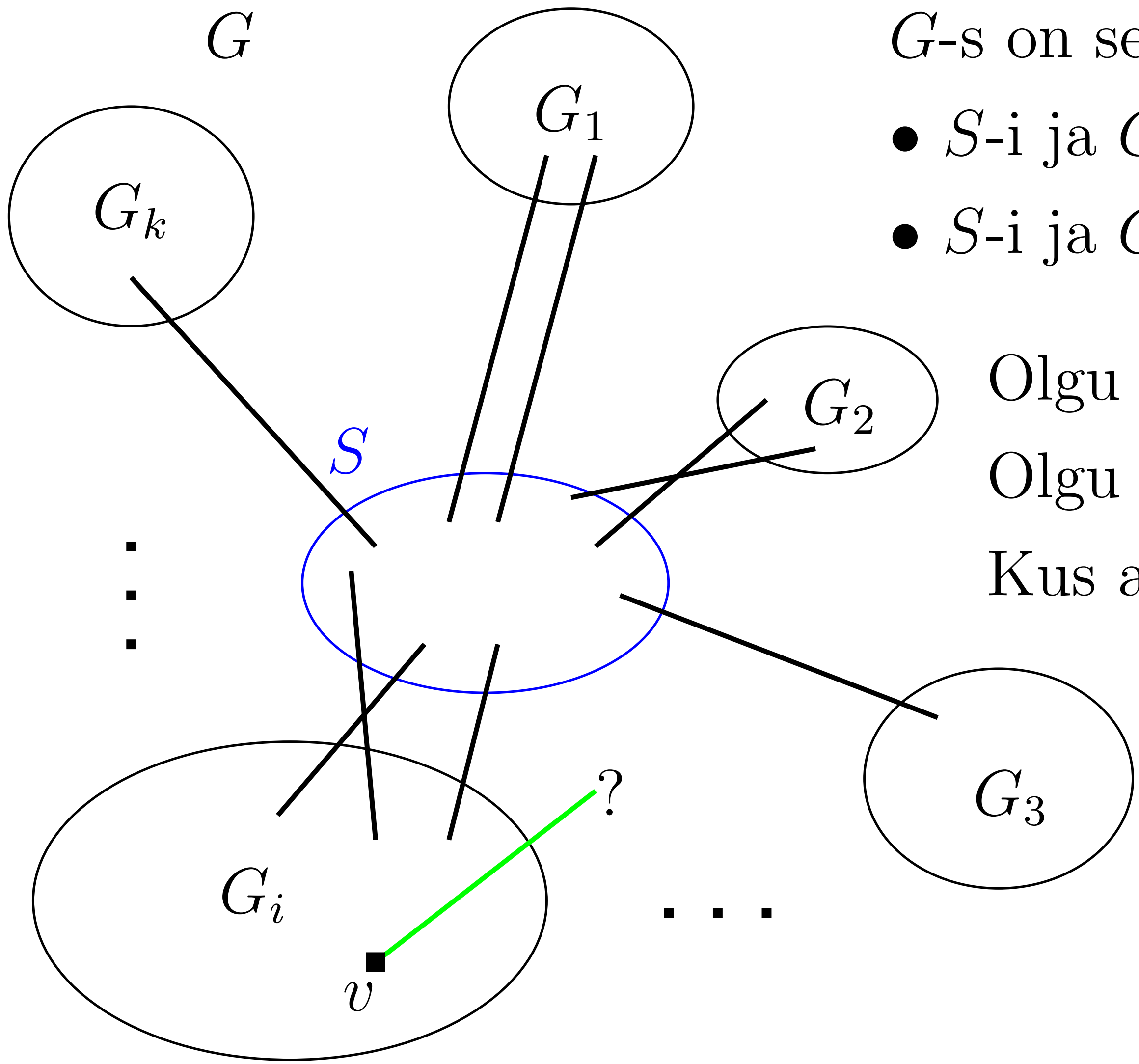


G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

G-s pole servi

G_i-de vahel



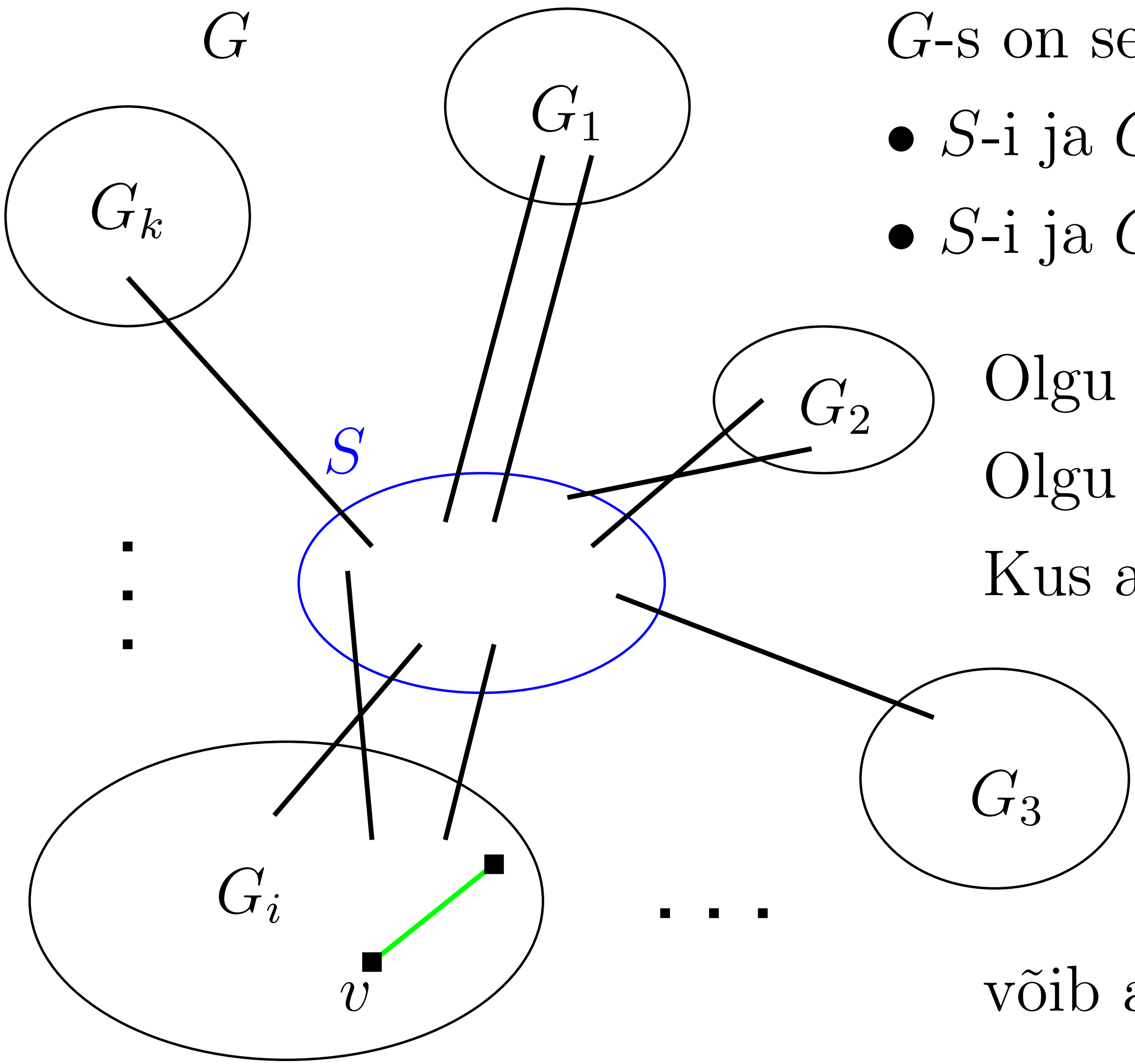
G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?



G-s on servad:

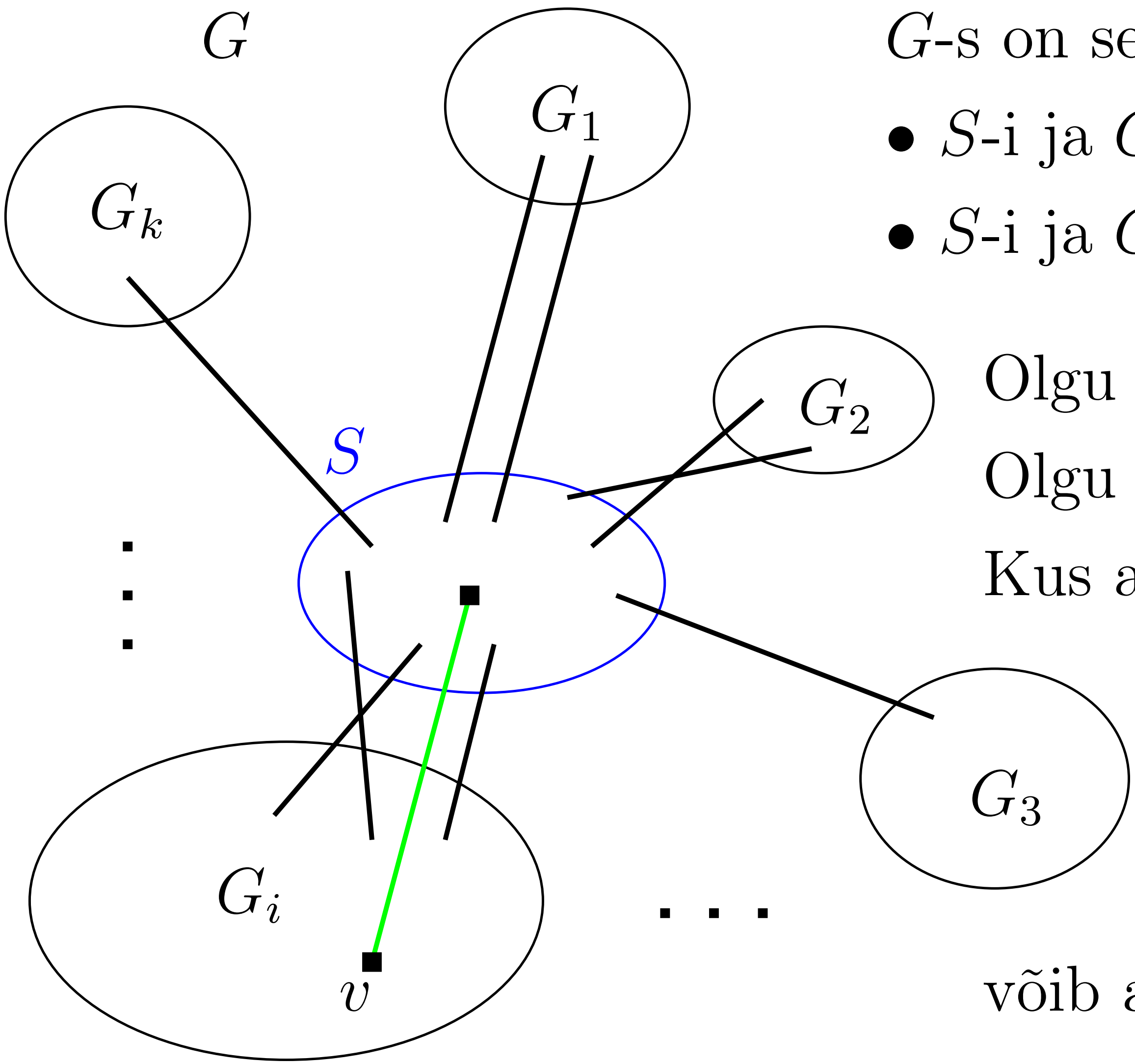
- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda G_i-s



G-s on servad:

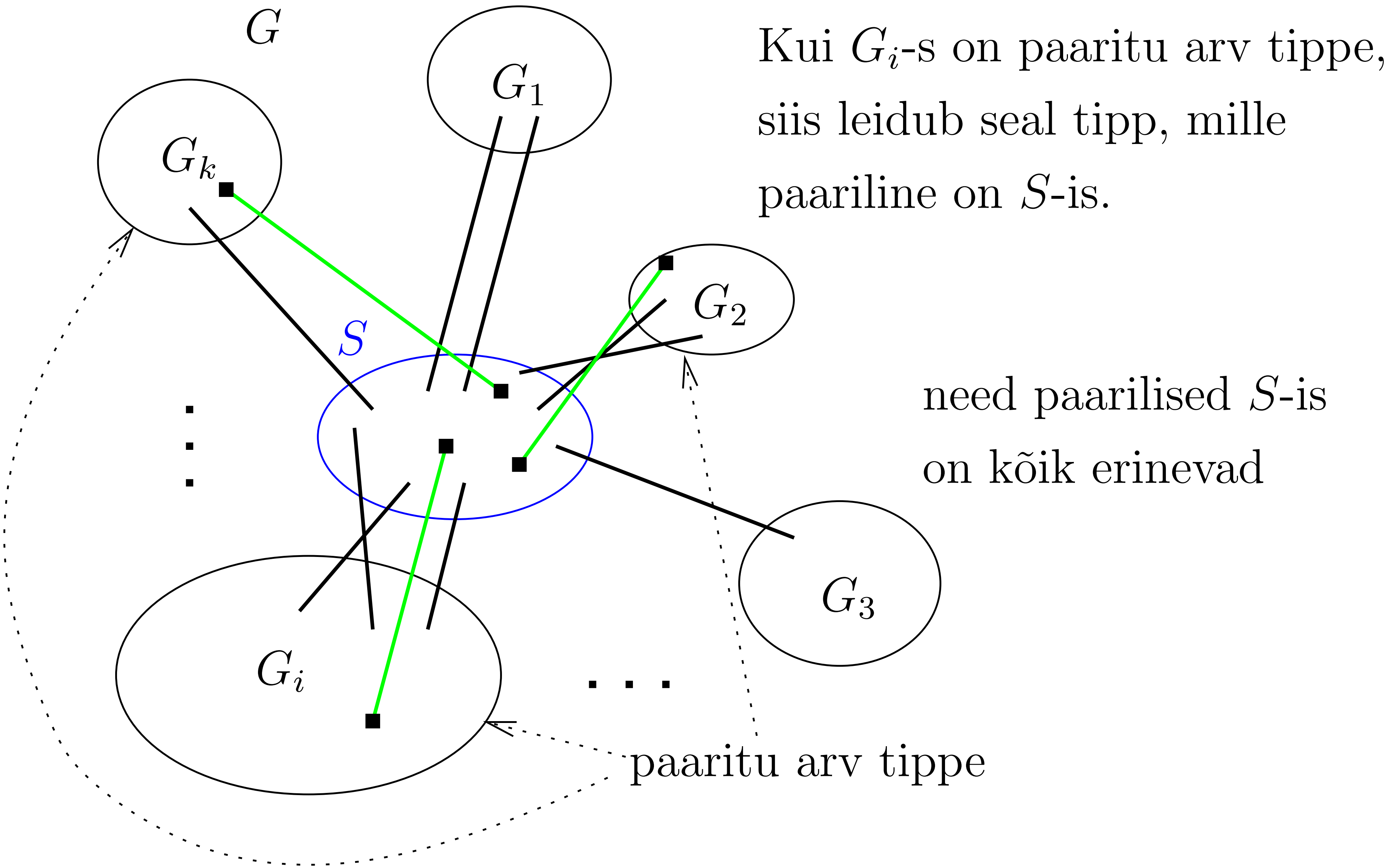
- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda S-is



G
G_1
G_k
G_2
S
G_3
G_i
Kui G_i-s on paaritu arv tippe,
siis leidub seal tipp, mille
paariline on S-is.
need paarilised S-is
on kõik erinevad
paaritu arv tippe

Tähistagu $odd(G)$ sidususkomponentide arvu G-s, millel on paaritu arv tippe.

Näitasime, et kui graafis $G = (V, E)$ leidub kooskõla, siis $odd(G \backslash S) \leq |S|$. Seda iga $S \subseteq V$ jaoks.

Teoreem (Tutte). Graafis $G = (V, E)$ leidub kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G \backslash S) \leq |S|$.

Tõestus. Tarvilikkust juba näitasime. Näitame piisavust ka.

Vastuväiteliselt oletame, et leidub graaf G, kus iga $S \subseteq V$ jaoks $odd(G \backslash S) \leq |S|$, aga G-s ei leidu kooskõla.

Muuhulgas siis $odd(G) = odd(G \backslash \emptyset) \leq 0$, seega on G-s paarisarv tippe.

Lisame G-le mingil viisil servi senikaua, kuni jõuame mingi graafini G^*, kus ei ole kooskõla, aga millele ükskõik millise serva lisamisel saaksime graafi, kus on kooskõla.

Kuna K_{2n}-s on kooskõla, siis me jõuame sellise G^*-ni.

Näitame, et iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib ka $odd(G^* \backslash S) \leq |S|$.

Piisab, kui näitame $odd(G^*\backslash S) \leq odd(G\backslash S)$.

Graaf $G^*\backslash S$ on saadud graafile $G\backslash S$ mingeid servi lisades. Uurime, kuidas muutub $odd(\cdot)$ graafile servi lisades.

Kui lisame graafile mingi serva, siis võib ta ühendada 2 tippu

- samast sidususkomponendist. Sel juhul $odd(\cdot)$ ei muutu.
- kahest erinevast sidususkomponendist. Sel juhul saab neist kahest komponendist üks.

- Kui mõlemis komponendis oli paarisarv tippe, siis on uues komponendis ka paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.

- Kui ühes komponendis oli paaris- ja teises paaritu arv tippe, siis on uues komponendis ka paaritu arv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.

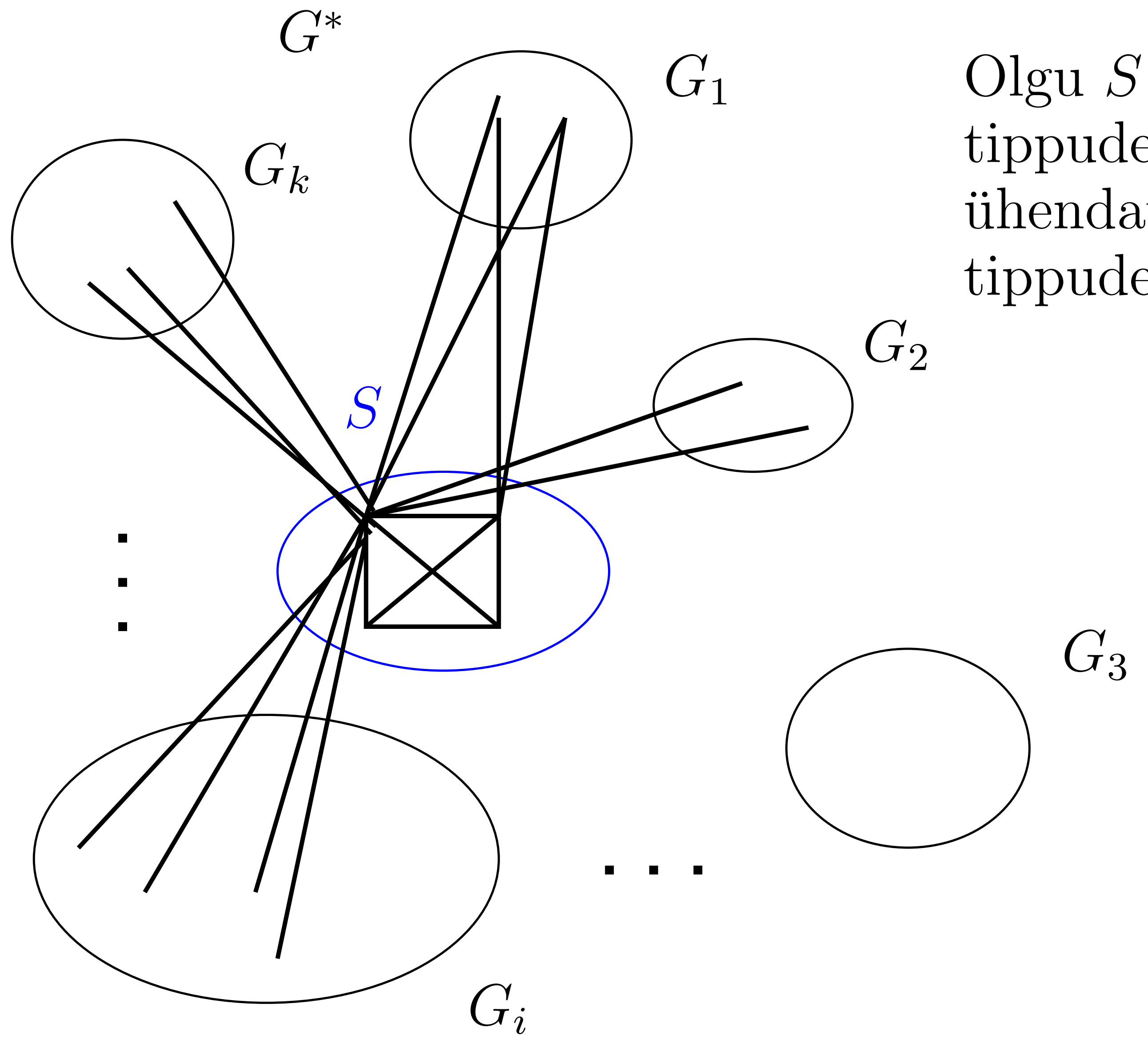
- Kui mõlemis komponendis oli paaritu arv tippe, siis on uues komponendis paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ väheneb 2 võrra.

Seega saab graafile servi lisades $odd(\cdot)$ ainult väheneda. Järelikult $odd(G^*\backslash S) \leq odd(G\backslash S) \leq |S|$.

Oleme näidanud, et teoreemi tõestamiseks piisab, kui tuletada vastuolu järgmisest väitest:

Leidub graaf $G^* = (V, E^*)$, kus

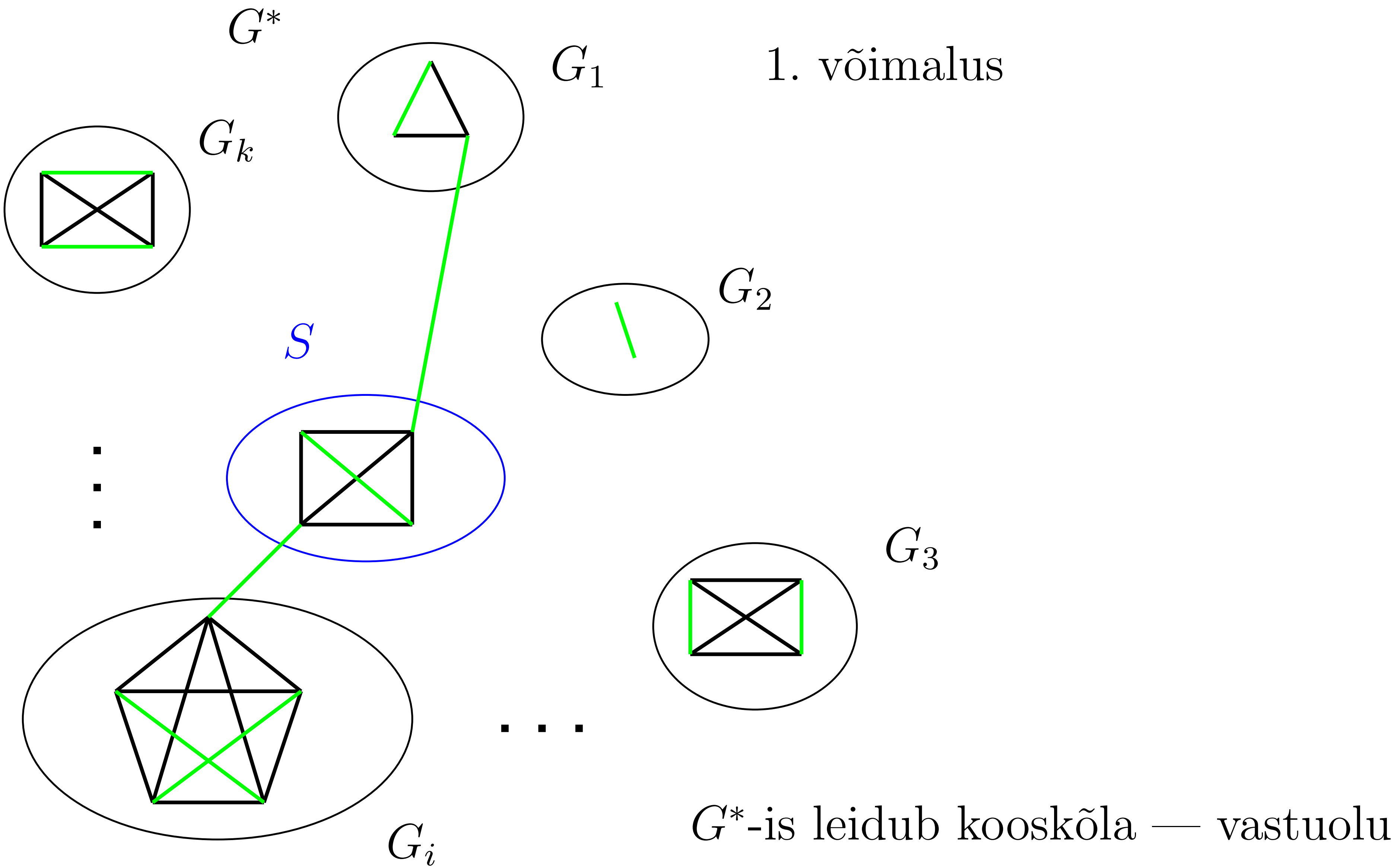
- ei leidu kooskõla;
- suvalise serva lisamisel tekib kooskõla;
- iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G^* \backslash S) \leq |S|$.



Olgu S kõigi selliste tippude hulk, mis on ühendatud kõigi teiste tippudega

On kaks võimalust:

1. Graafi $G^*\backslash S$ kõik sidususkomponendid on täisgraafid.
2. Leidub $G^*\backslash S$ sidususkomponent, mis ei ole täisgraaf.



G^*
G_1
1. võimalus
G_k
G_2
S
G_3
G_i
G^*-is leidub kooskõla — vastuolu

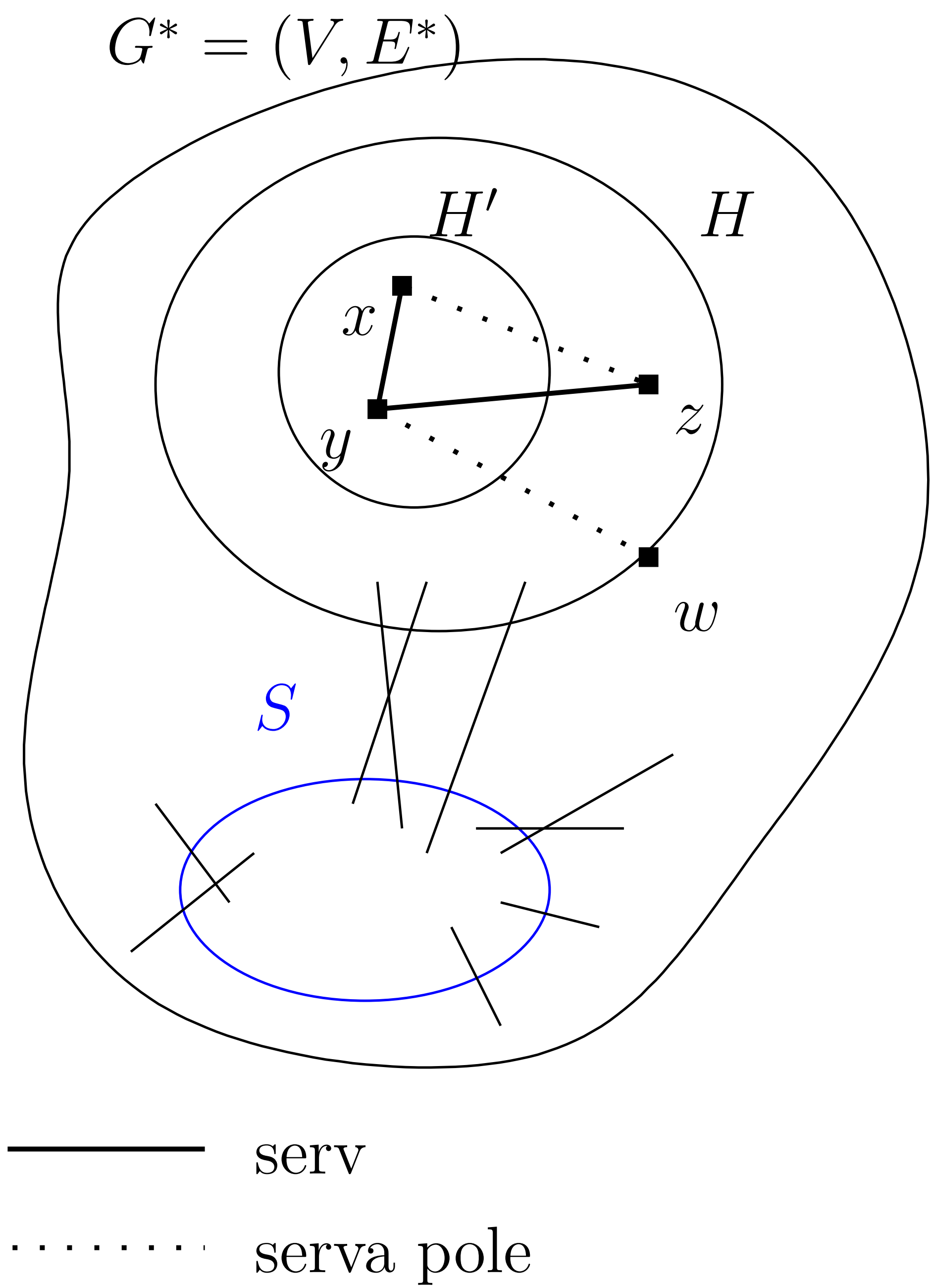
Konstrueerime kooskõla G^*-s:

- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n} nende komponentide piires.
- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n+1} nende komponentide piires, nii et üks tipp üle jääks.
- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n+1} üksikud ülejäänud tipud seame igaühe vastavusse mõne S-i tipuga.

  Komponente K_{2n+1} pole rohkem kui $|S|$.

- S-i ülejäänud tipud seame omavahel vastavusse.

  Üle jääb paarisarv, sest G^*-s on paarisarv tippe.



2. võimalus

H — $G^* \backslash S$ sidususkomponent
H pole täisgraaf

H' — H max. täisalamgraaf

$y \in V(H')$ ja $z \in V(H) \backslash V(H')$

$x \in V(H')$

$w \in V \backslash S$

$G_1 = (V, E^* \cup \{(x, z)\})$

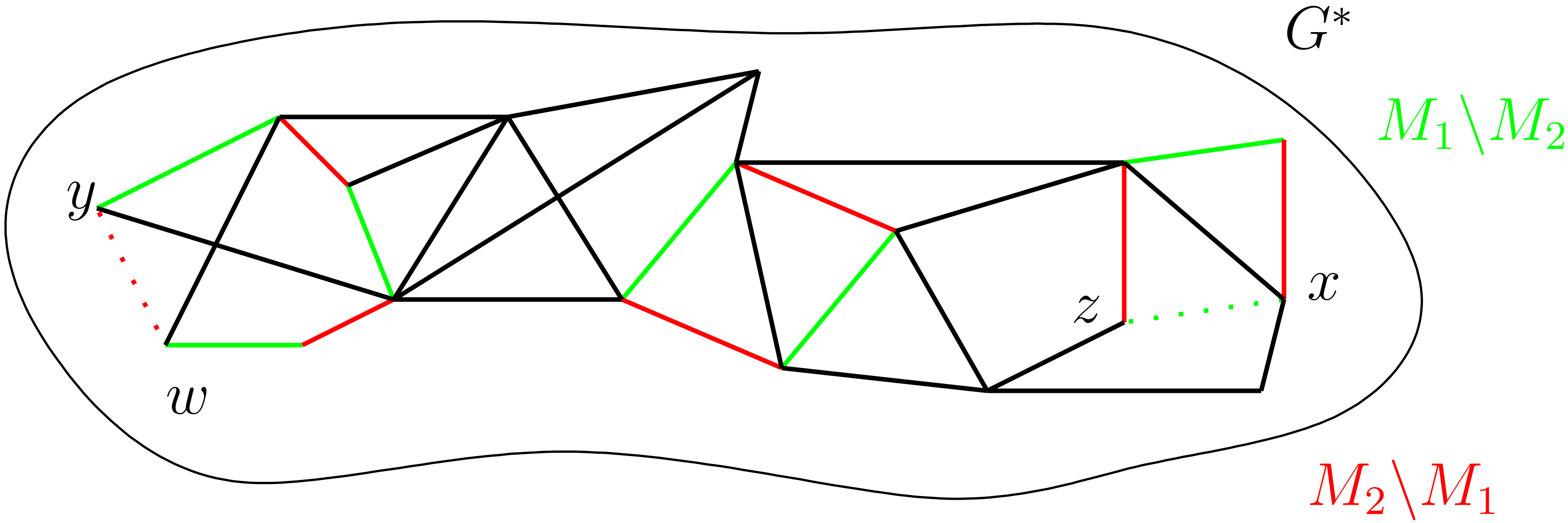
$G_2 = (V, E^* \cup \{(y, w)\})$

Graafides G_1 ja G_2 leiduvad kooskõlad.

Olgu M_1 graafi G_1 kooskõla. Siis $(x, z) \in M_1$, muidu oleks M_1 graafi G^* kooskõla.

Olgu M_2 graafi G_2 kooskõla. Siis $(y, w) \in M_2$.

Olgu $G' = (V, (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1))$.



Olgu $v \in V$. Mis on $\deg_{G'}(v)$ võimalikud väärtused?

Leidub täpselt üks $e_1 \in M_1$ ja $e_2 \in M_2$, nii et e_1 ja e_2 on v-ga intsidentsed.

- Kui $e_1 = e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 0$.
- Kui $e_1 \neq e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 2$.

Seega on G' sidususkomponentideks isoleeritud tipud ja tsük-lid.

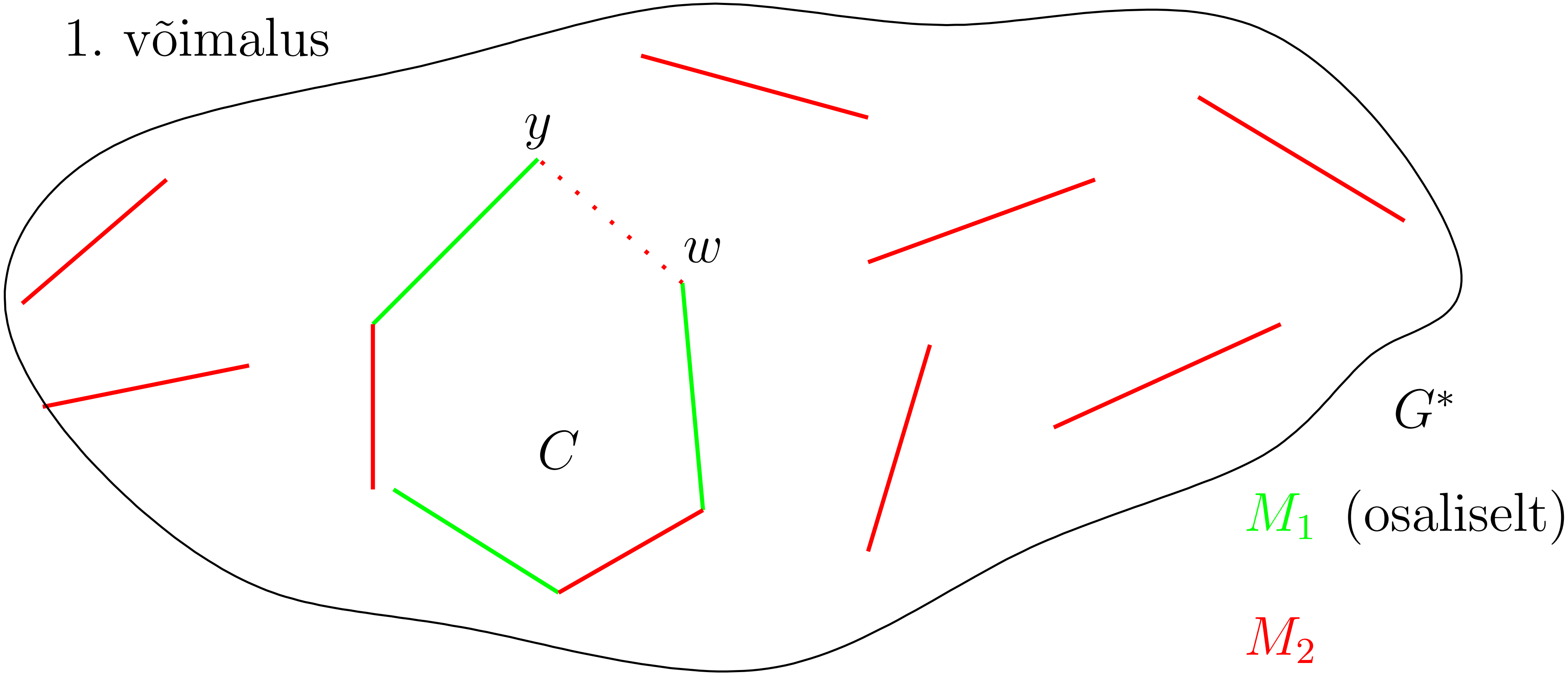
Tsüklid on paarisarvulise pikkusega — vaheldumisi serv M_1-st ja serv M_2-st.

On kaks võimalust:

1. Servad (x, z) ja (y, w) kuuluvad G' erinevatesse sidusus-komponentidesse.
2. Servad (x, z) ja $y, w)$ kuuluvad G' samasse sidususkom-ponenti.

Mõlemal juhul näitame, et G^*-s ikkagi leidub kooskõla.

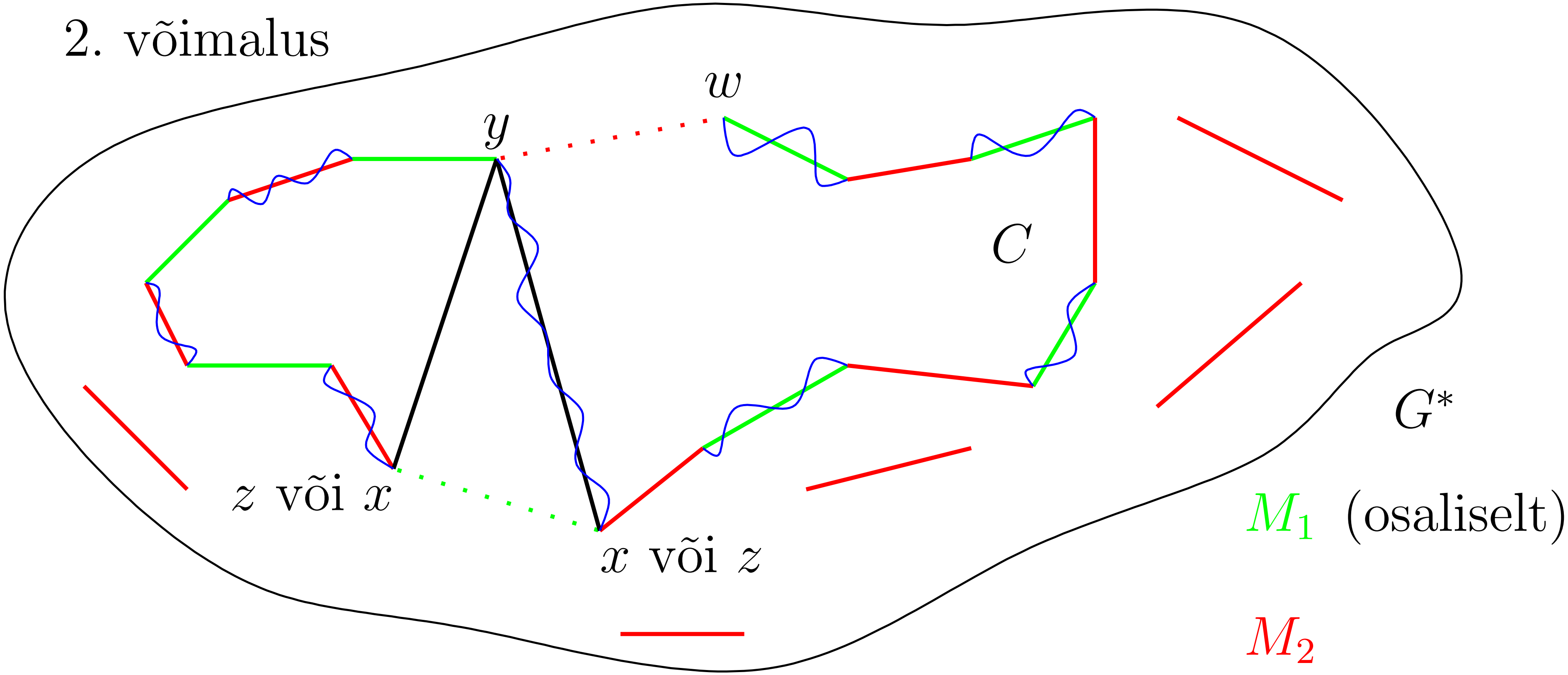
1. võimalus



Kooskõla G^*-il:

- M_1 tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C

2. võimalus



Kooskõla G^*-il:

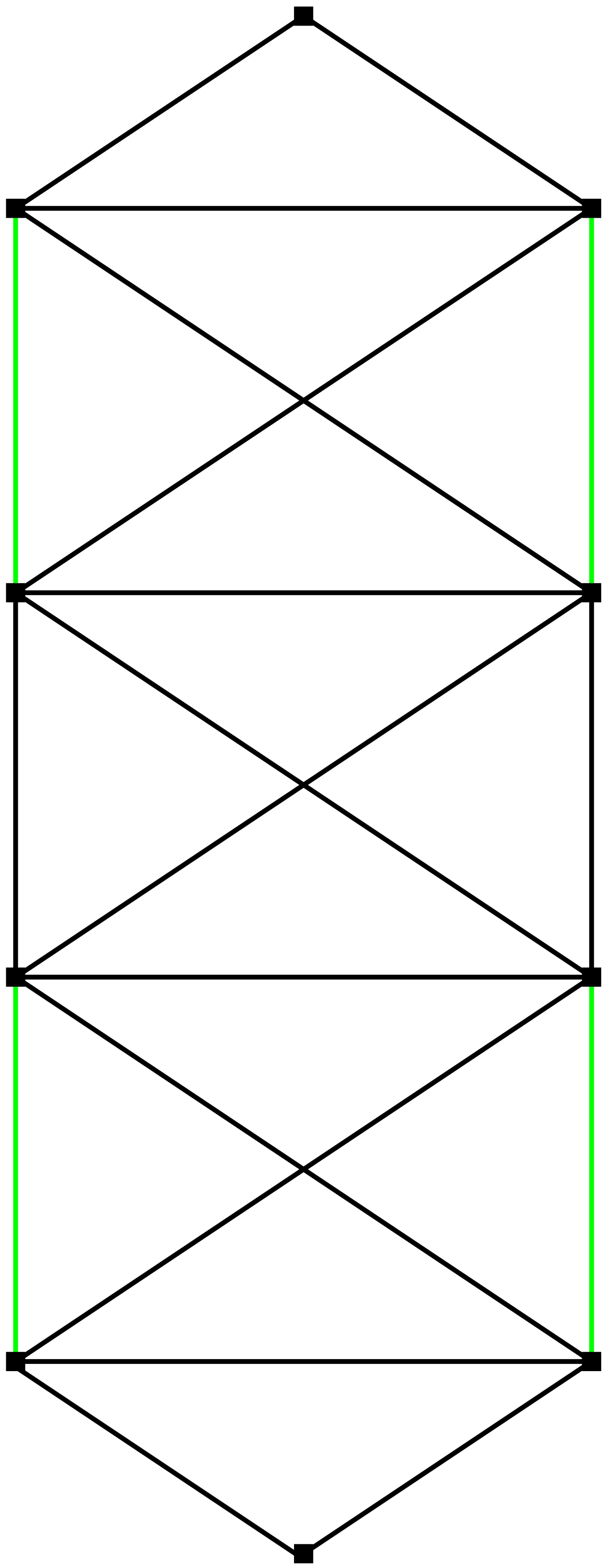
- sinised servad tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C $\square$

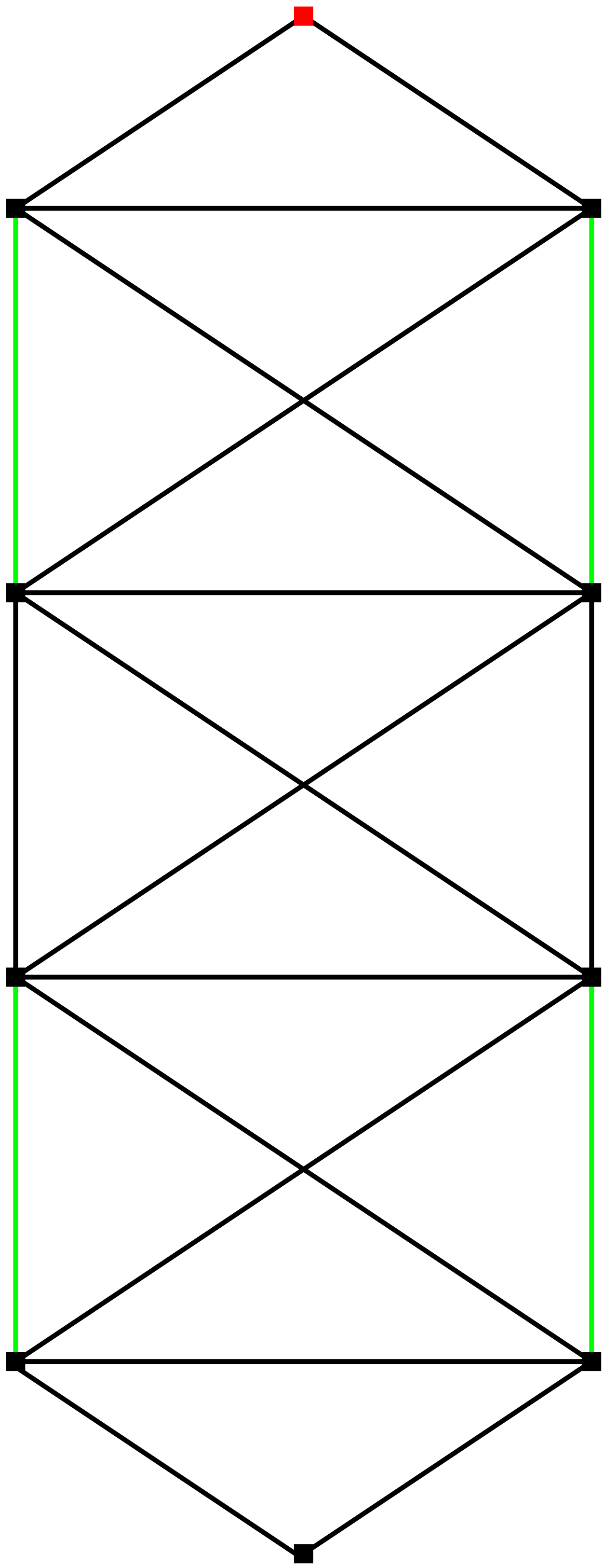
Kuidas leida graafis kooskõla? Või üldisemalt, maksimaalset vastavust?

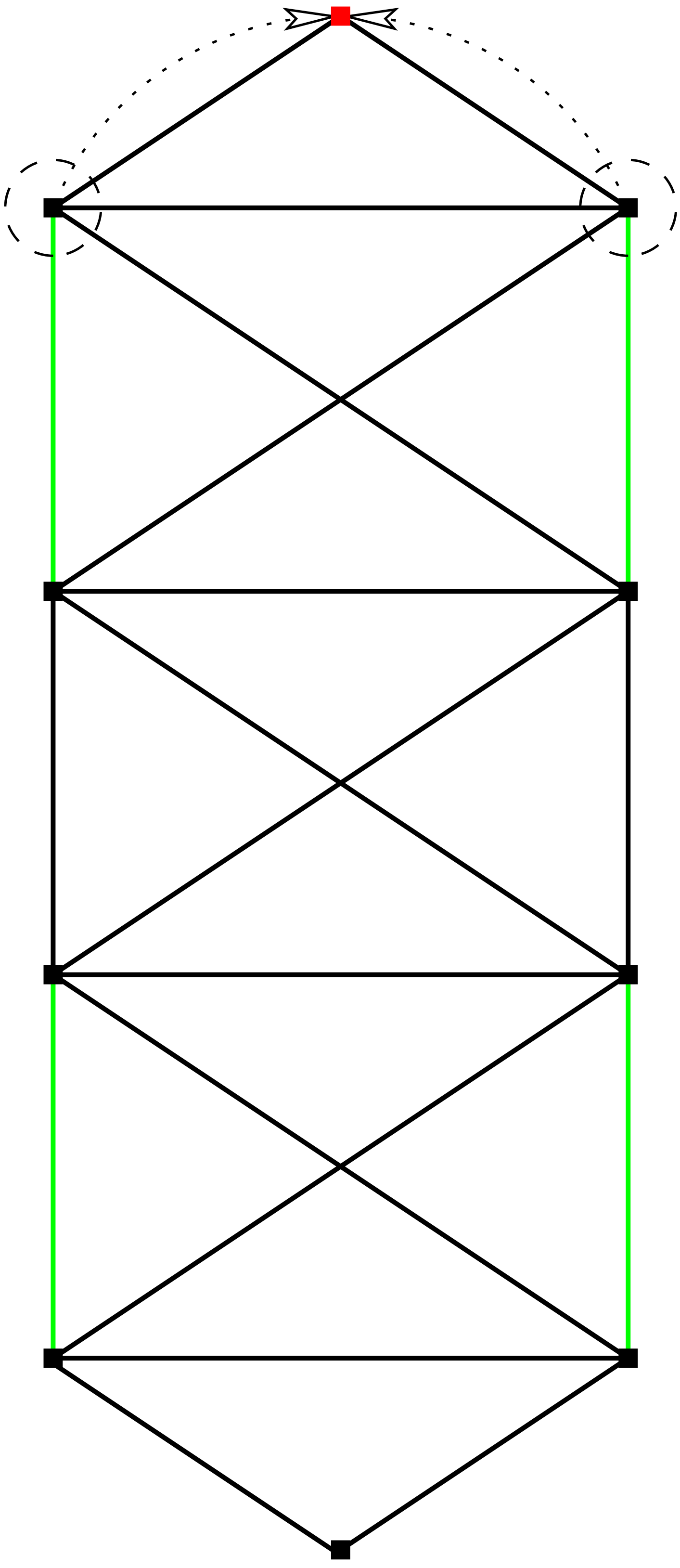
Berge'i teoreemi abil. Kui meil on antud suvaline vastavus M, siis püüame leida M-laienevat teed.

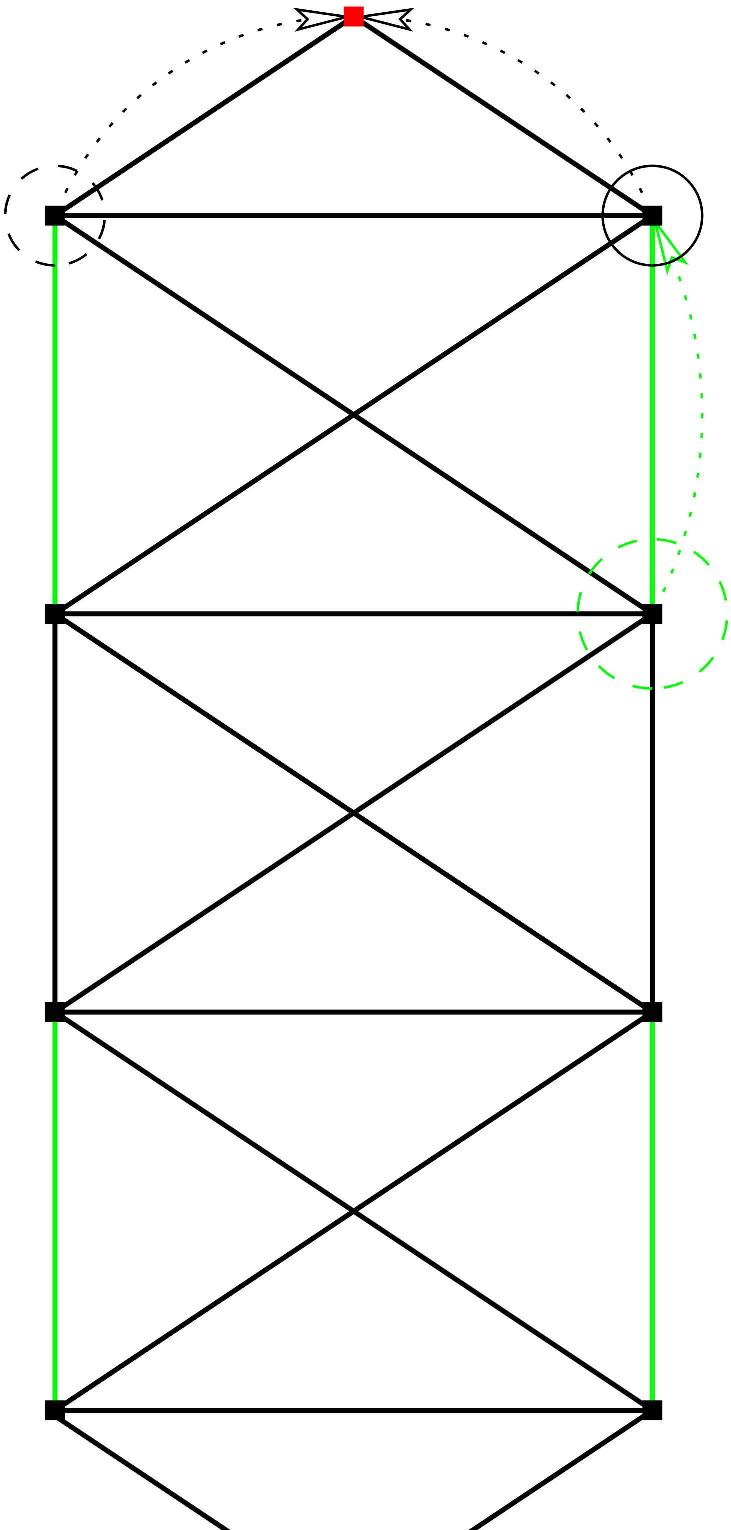
M-laieneva tee leidmiseks leiame, milliste tippude vahel leidub M-vahelduv tee.

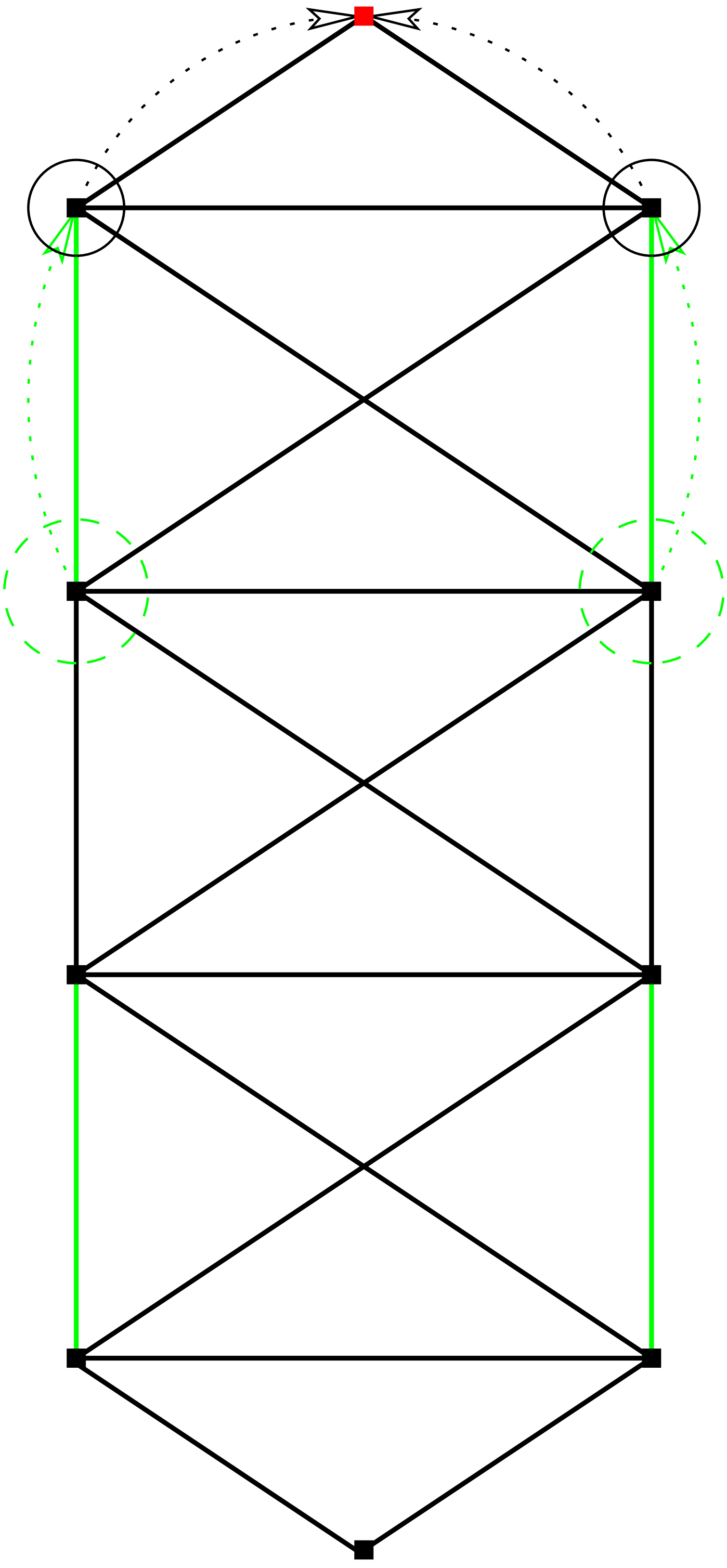
Seda saab leida graafi (laiuti / sügavuti) läbides.

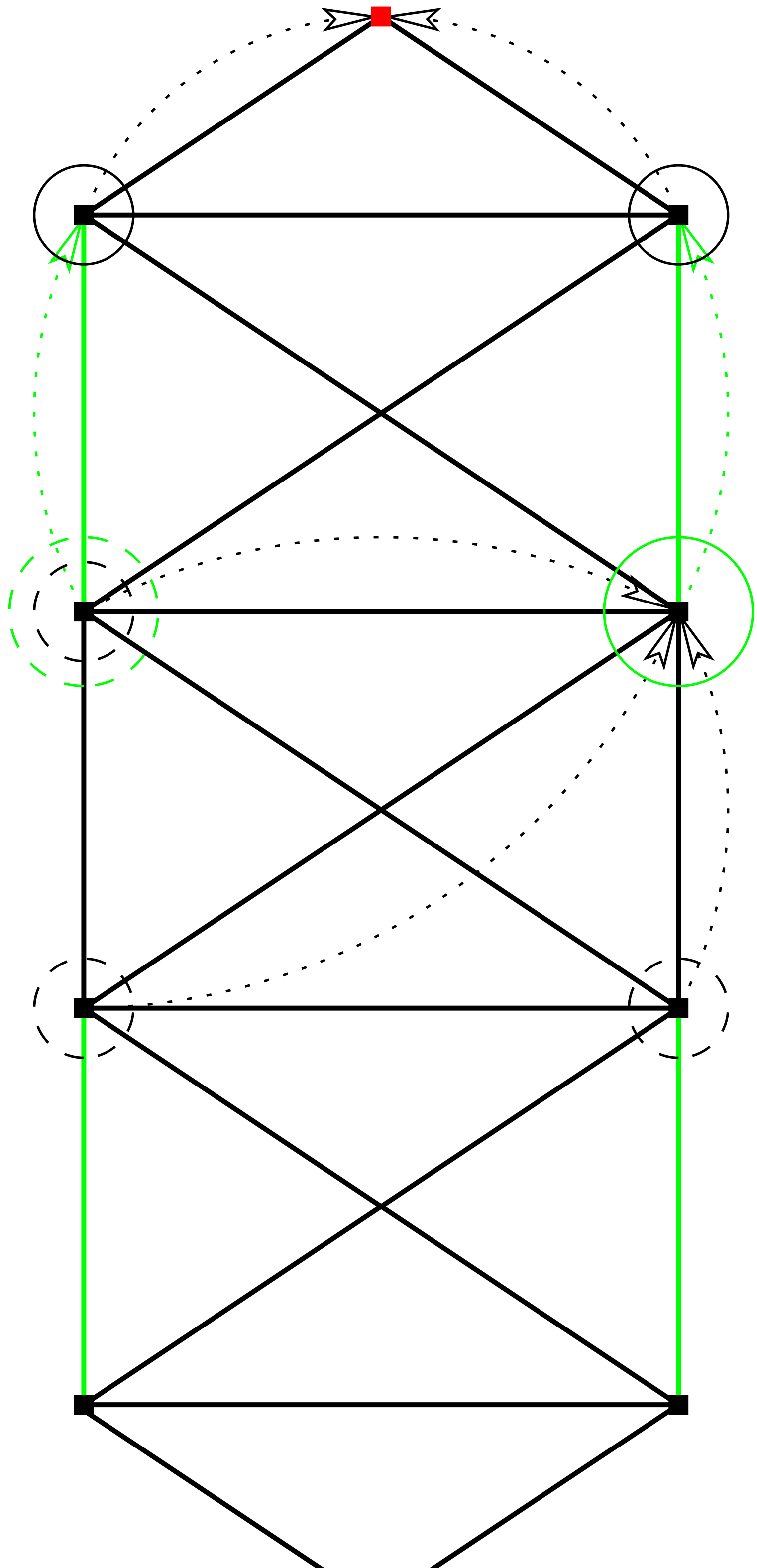


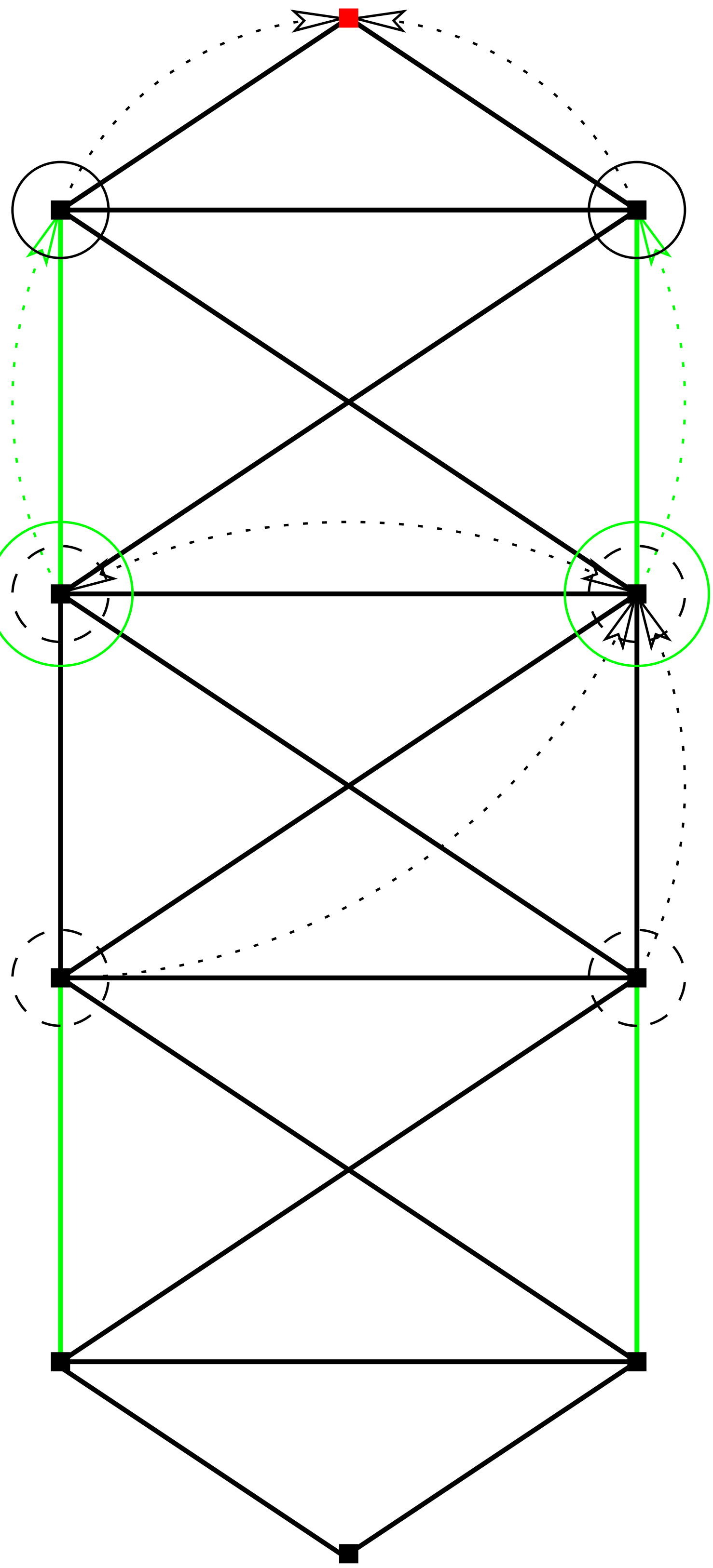


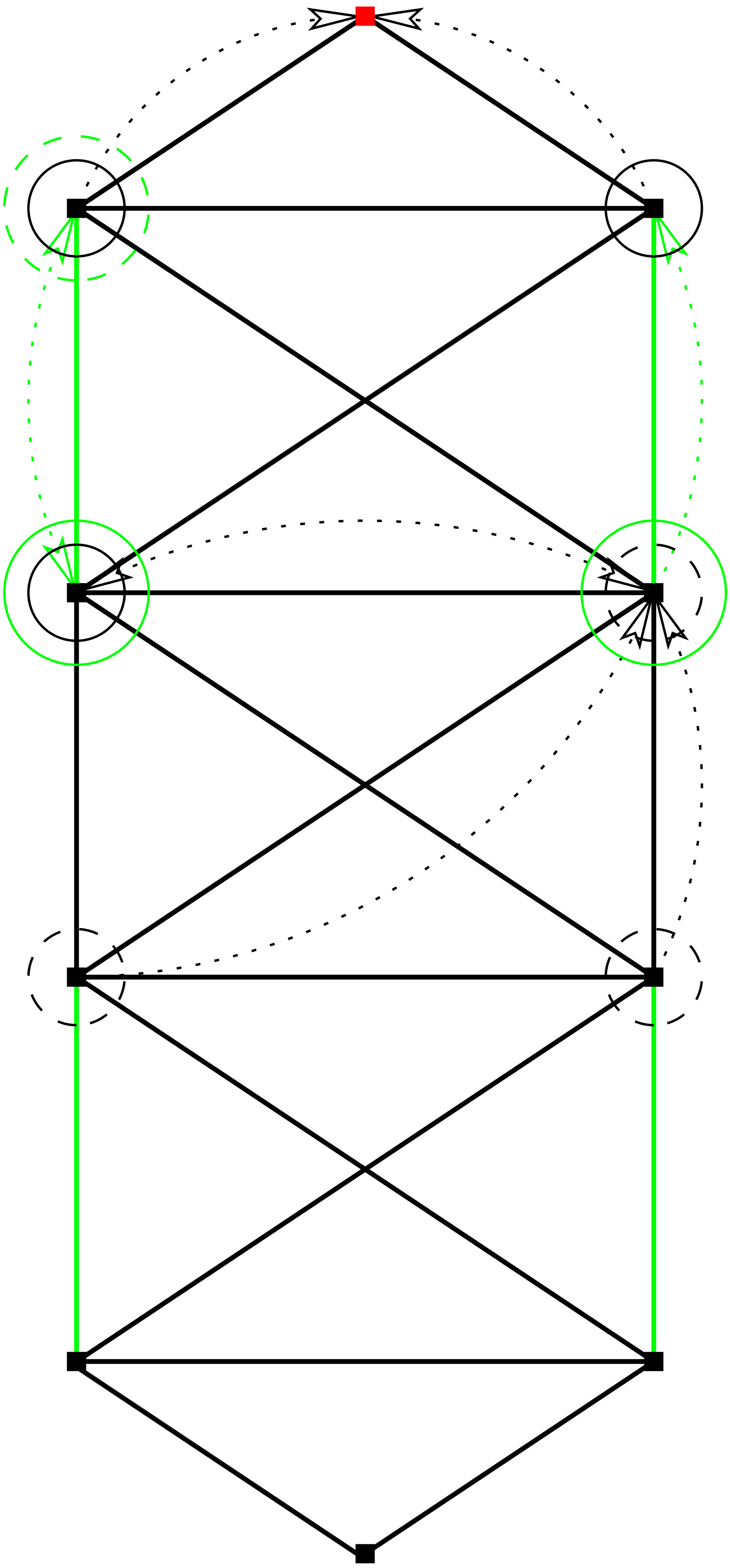


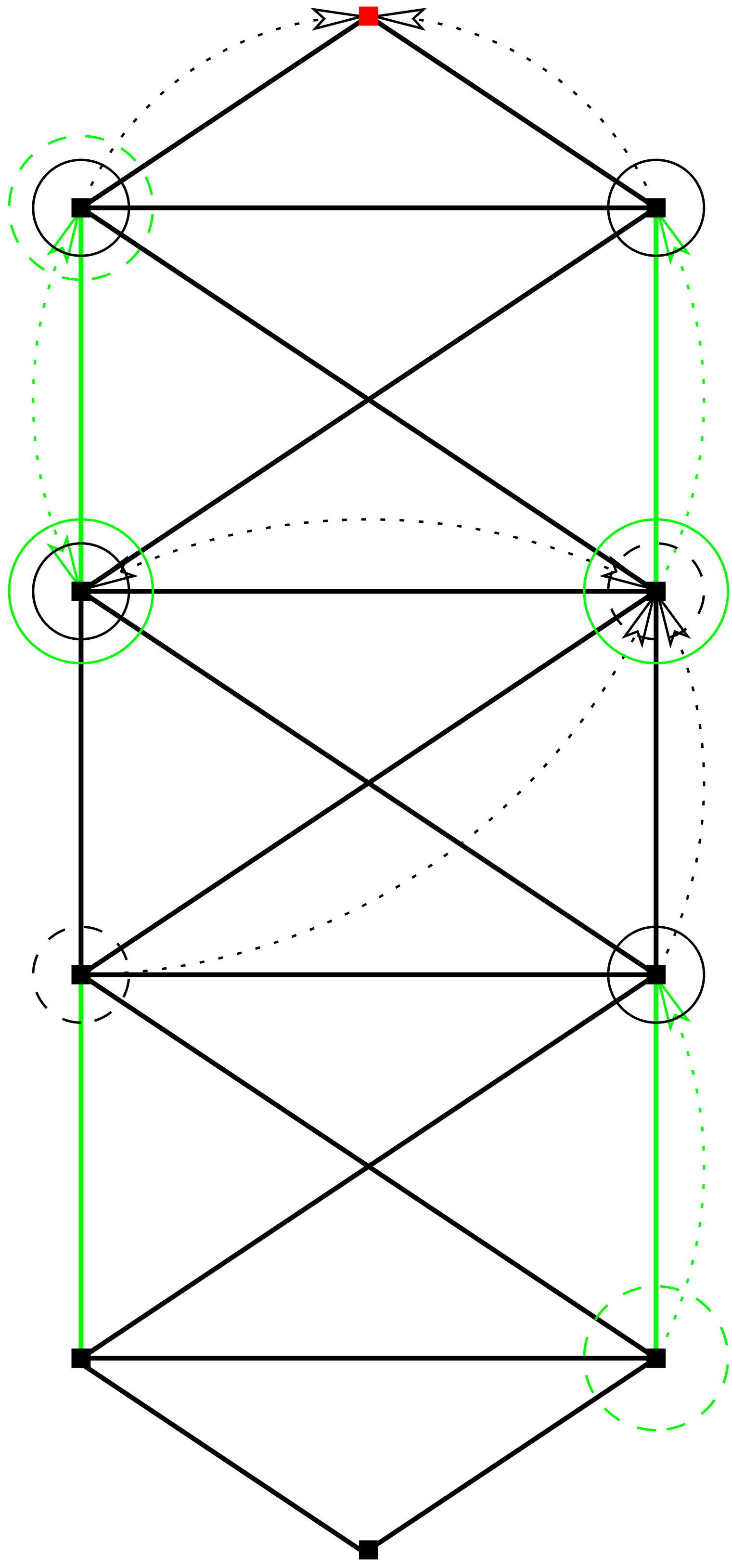


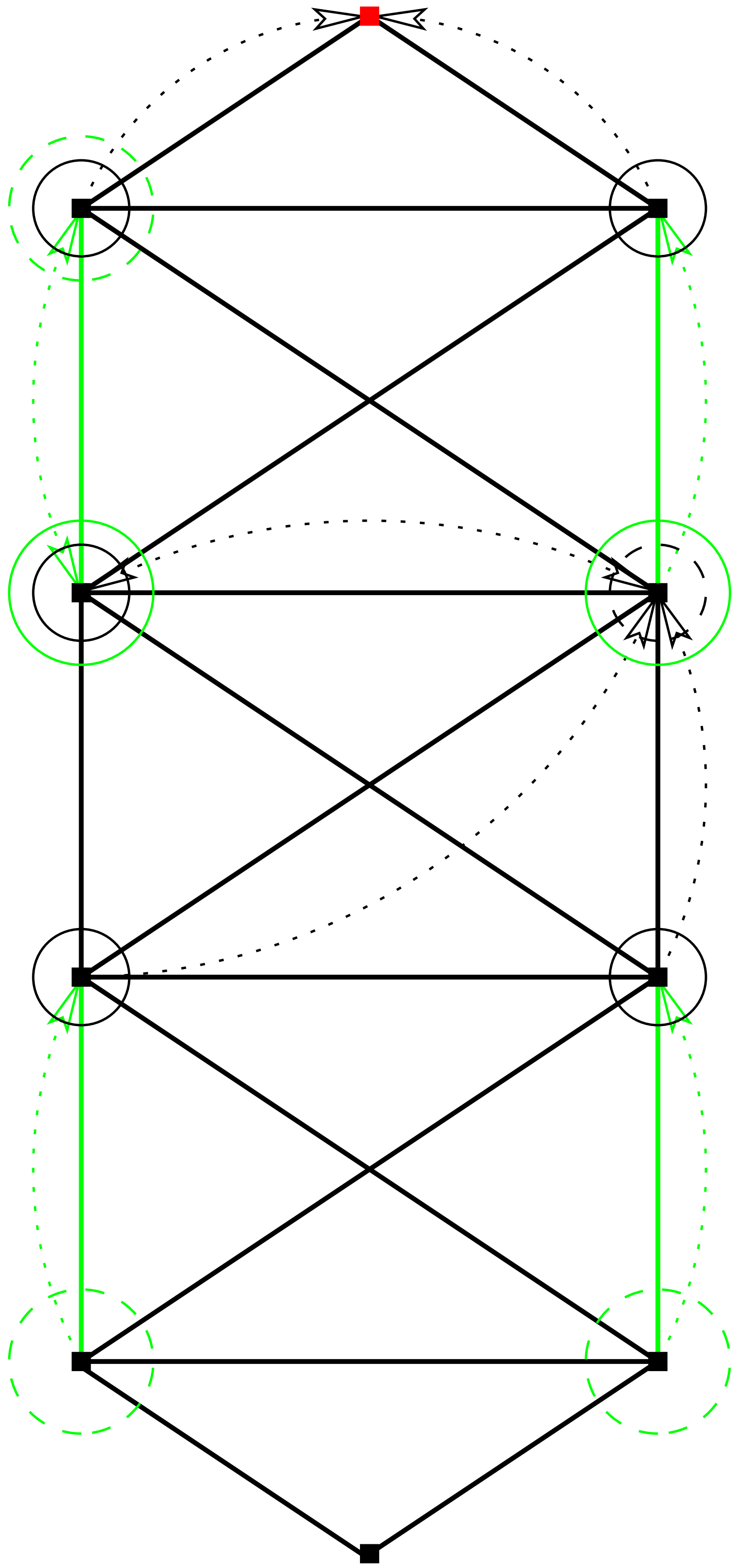


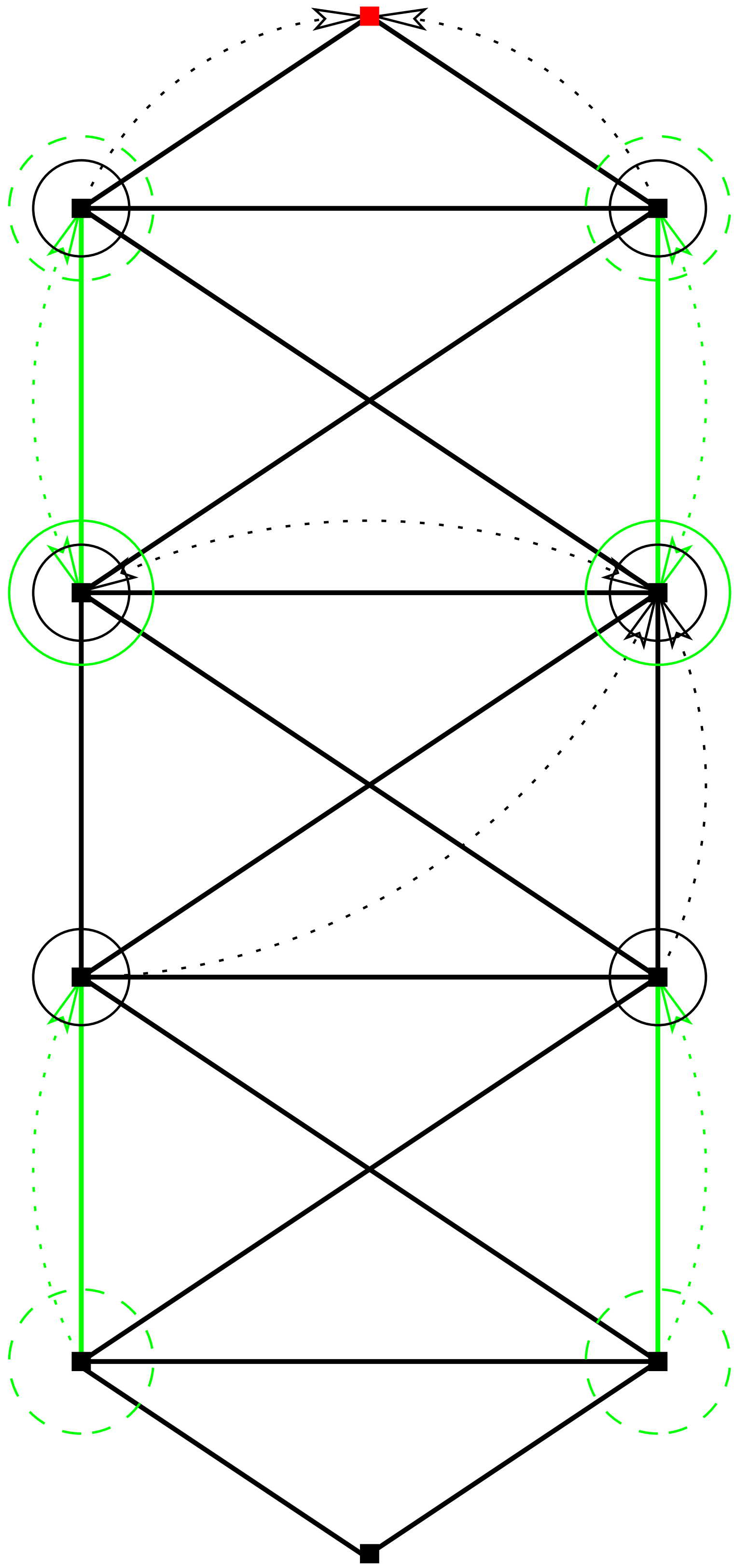


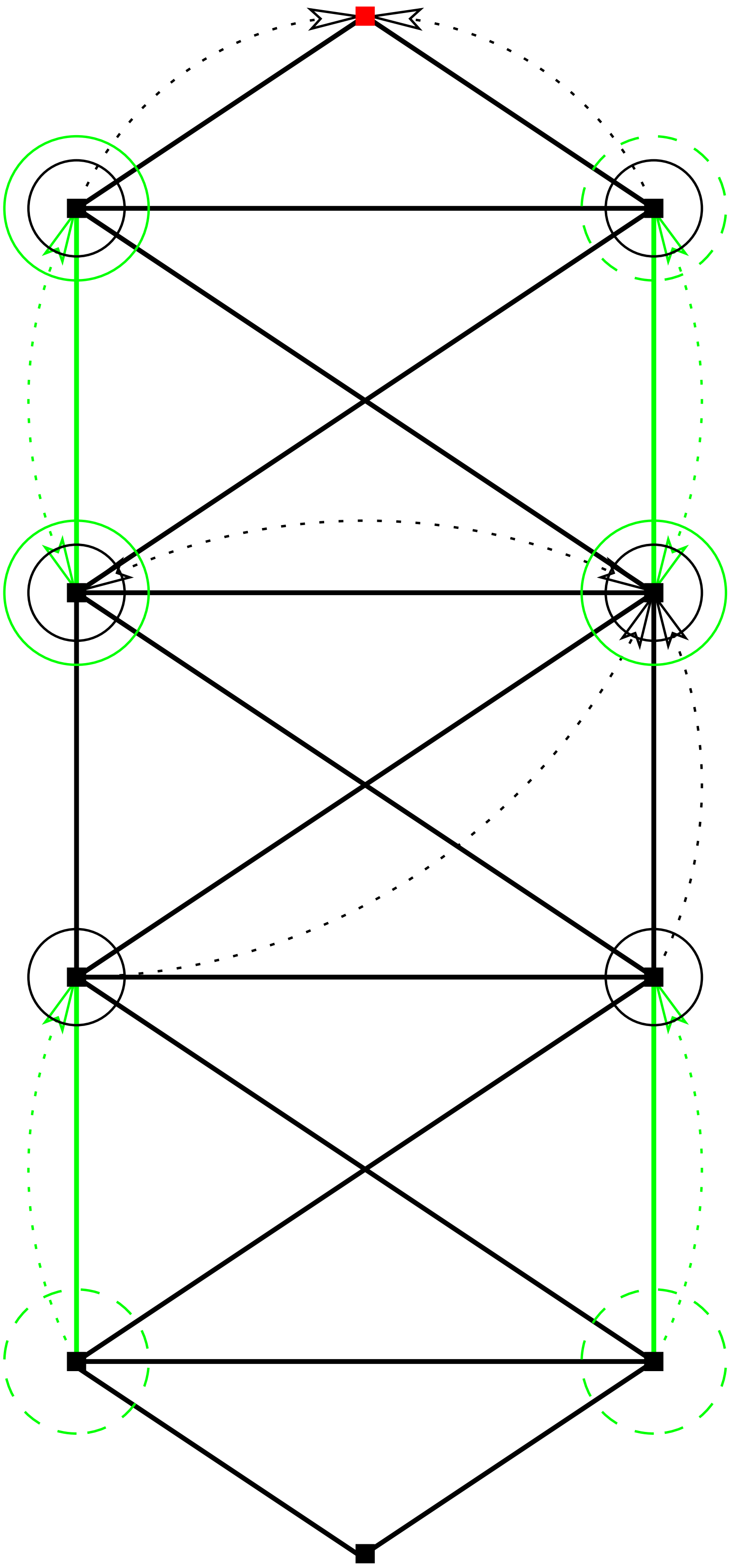


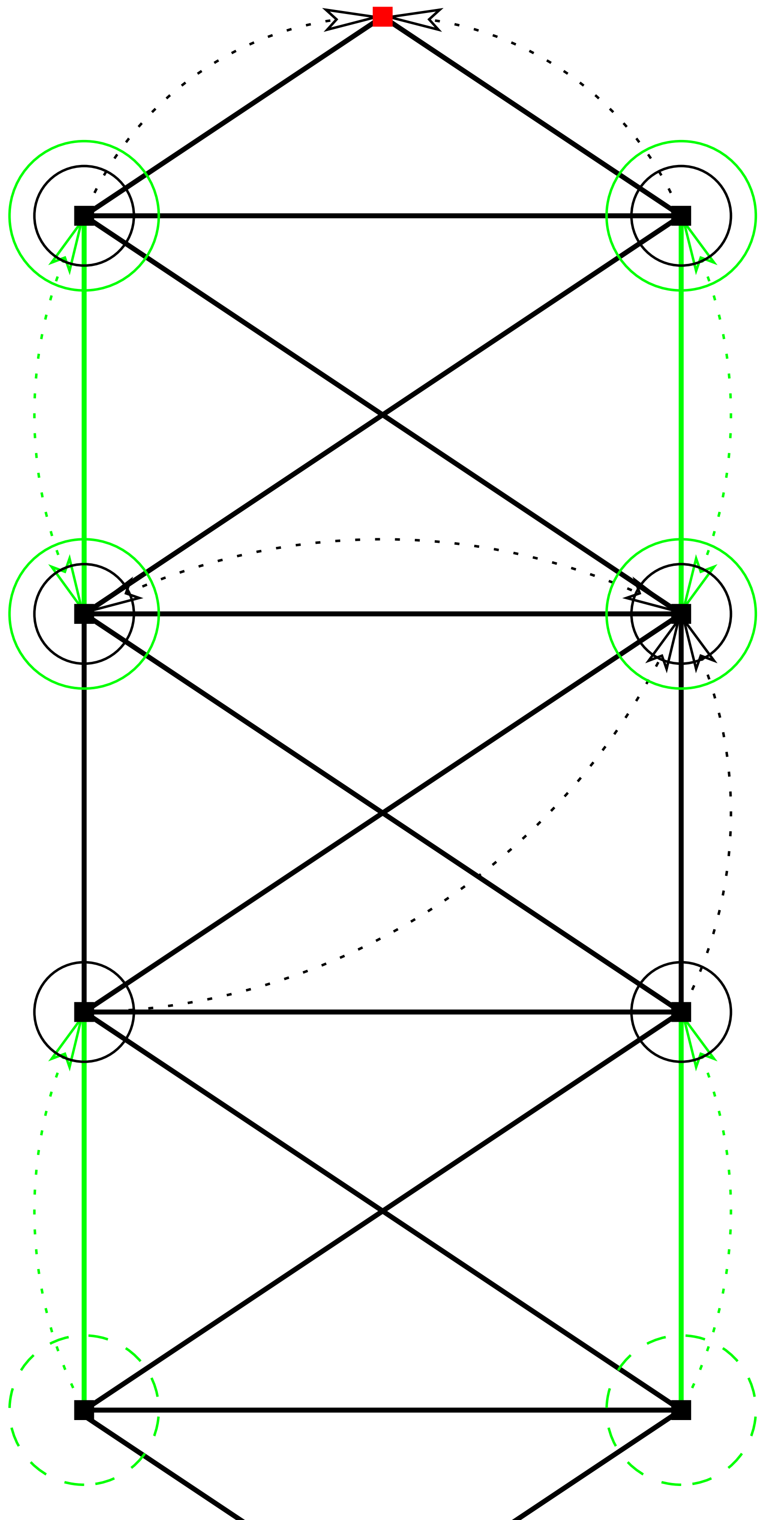


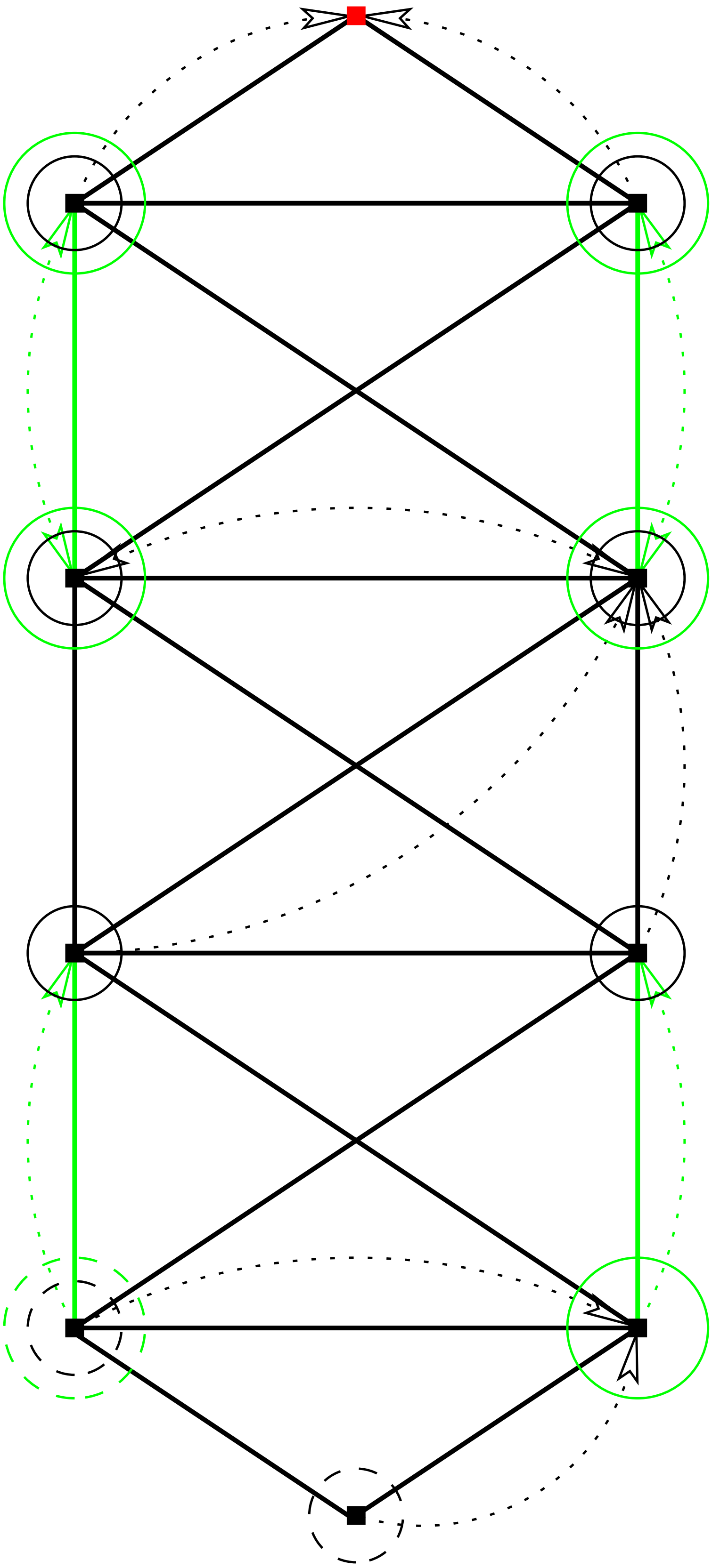


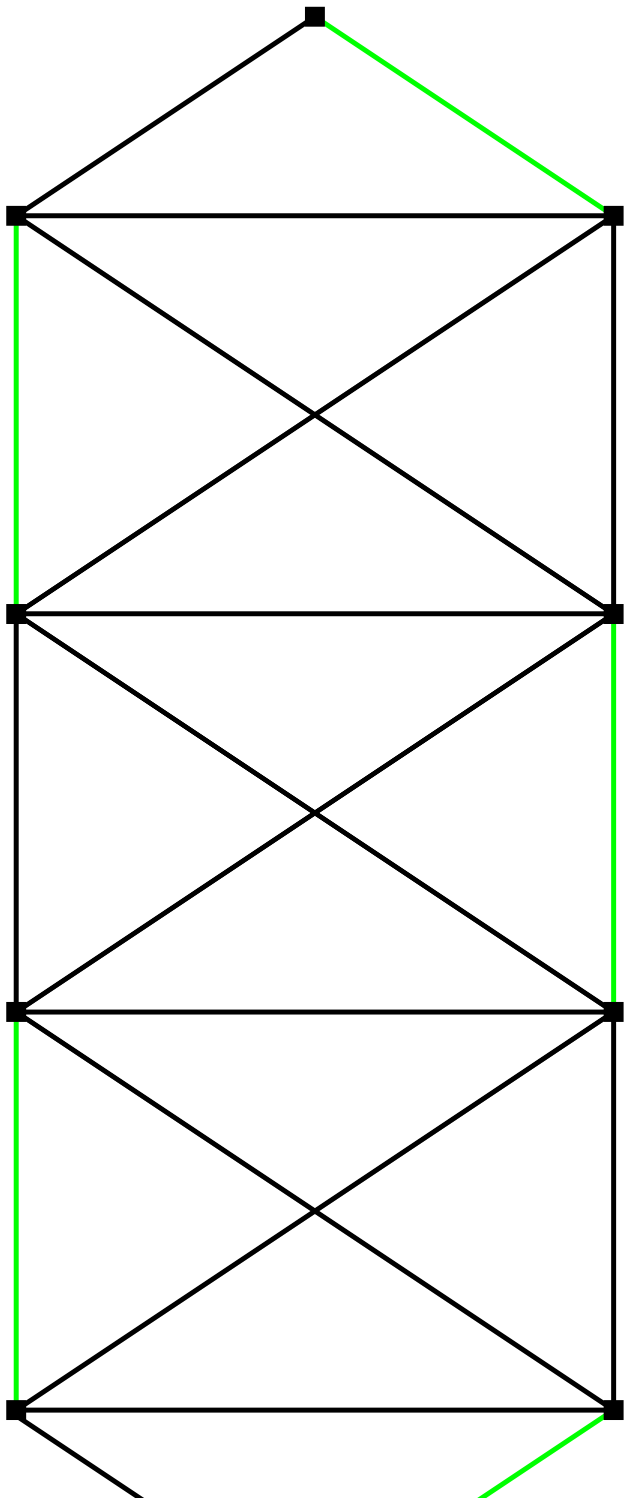












- 7. novembril loengut ei toimu.
- 8. novembril praktikumi ei toimu.
- 14. / 15. novembril loeng / praktikum toimub.
- 21. novembril ei toimu mitte loeng, vaid järeltöö.
- 22. novembril praktikumi ei toimu.