Graafide eksami ülesanded

21. jaanuar 2003

Lahendused

1. ülesanne

Tarvilikkus. Olgu $M \subseteq E$ etteantud omadusega servade hulk ja olgu $S \subseteq X$.

> Toome sisse järgmise tähistuse. Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf, olgu $v \in V$, $U \subseteq V$ ja $E' \subseteq E$. Sel juhul tähistagu $N_{E'}(v)$ tipu v kõigi selliste naabertippude w hulka, mille korral serv v ja w vahel kuulub hulka E'. Teisisõnu, $N_{E'}(v)$ on tipu v naabrite hulk graafis $G = (V, E')$. Analoogiliselt tähistagu $N_{E'}(U)$ hulka U kuuluvate tippude selliste naabertippude w hulka, mille korral leidub $u \in U$, nii et serv u ja w vahel kuulub hulka E'.

Ülesande tingimuse kohaselt on servahulgal M järgmised omadused:

- iga $x \in X$ jaoks $|N_M(x)| = k$.
- kui $x, x' \in X$ ja $x \neq x'$, siis $N_M(x) \cap N_M(x') = \emptyset$.

Nüüd saame

$$|N(S)| = \left|\bigcup_{x \in S} N(x)\right| \geqslant \left|\bigcup_{x \in S} N_M(x)\right| = \sum_{x \in S} |N_M(x)| = k \cdot |S| \ .$$

Piisavus. Olgu G selline, et iga $S \subseteq X$ jaoks $k \cdot |S| \leqslant |N(S)|$. Konstrueerime kahealuselise graafi $G' = (X' \dot\cup Y, E')$ järgmisel viisil.

Hulka X' võtame „k eksemplari“ igast hulga X elemendist. Formaalselt võime seda kirja panna järgmiselt:

$$X' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x^{(i)} \,:\, x \in X, i \in \{1, \ldots, k\}\right\},$$

siin $x^{(i)}$ tähistab elemendi $x \in X$ i-ndat eksemplari. Tipu $x^{(i)}$ ühendame servaga kõigi selliste tippudega $y \in Y$, millega on ühendatud tipp x, s.t.

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x^{(i)}, y) \,:\, (x, y) \in E, i \in \{1, \ldots, k\}\right\} \ .$$

Defineerime veel ühe tähistuse. Olgu $\pi : X' \longrightarrow X$ „projektsioon“ hulgast X' hulka X, s.t. $\pi(x^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} x$. Kirjutusviis $\pi(Z')$, kus $Z' \subseteq X'$, tähistab hulka $\{\pi(z) \,:\, z \in Z'\} \subseteq X$.

On ilmne, et iga $S' \subseteq X'$ jaoks kehtib $|S'| \leqslant k \cdot |\pi(S')|$, sest hulka S' kuulub ülimalt k „eksemplari“ mingist elemendist $x \in \pi(S')$. Peale selle $N_{E'}(S') = N(\pi(S'))$ vastavalt graafi G' konstruktsioonile.

Kokkuvõttes oleme saanud, et iga $S' \subseteq X'$ jaoks kehtib

$$|S'| \leqslant k \cdot |\pi(S')| \leqslant |N(\pi(S'))| = |N_{E'}(S')| \ .$$

Siin parempoolne võrratus tuleb meie eeldusest $k \cdot |S| \leqslant |N(S)|$, kus võtame $S = \pi(S')$. Vastavalt Halli teoreemile leidub graafis G' mingi vastavus M', nii et iga $z \in X'$ jaoks $\deg_{M'}(z) = 1$.

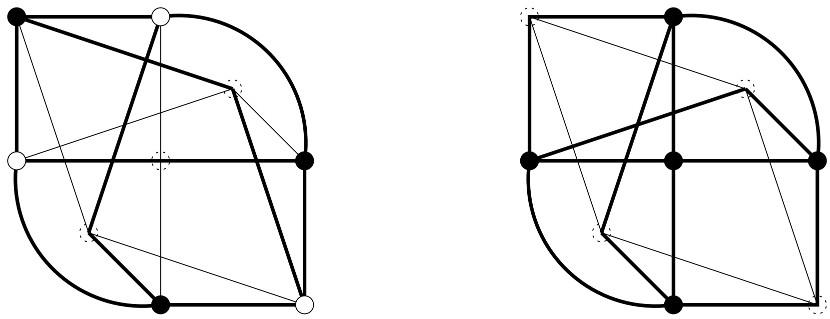
Vastavus M' seab iga $x \in X$ igale eksemplarile vastavusse mingi elemendi $y \in Y$, need y-d on kõik erinevad. Seega seab M' igale elemendile $x \in X$ vastavusse k elementi $y \in Y$, mis on kõik erinevad. Siit saamegi kätte otsitud servahulga M. Defineerime

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \ : \ (x^{(i)}, y) \in M'\},$$

on ilmne, et M rahuldab nõutud tingimusi.

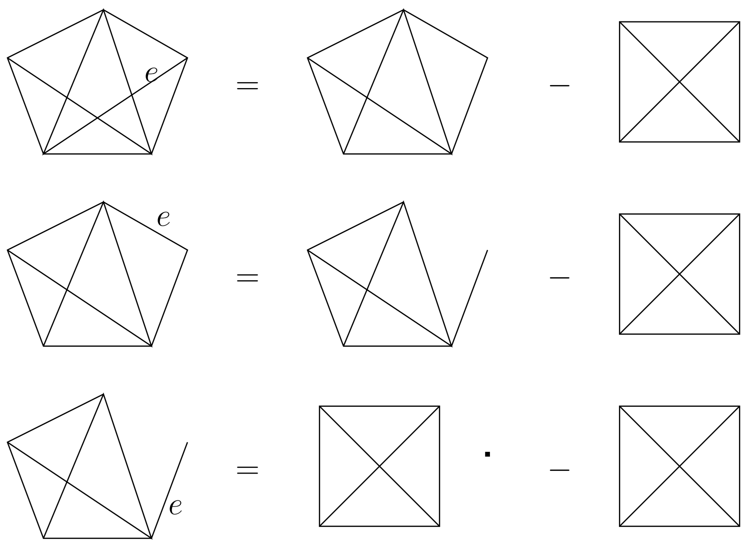
2. ülesanne

Vastus: see graaf ei ole tasandiline.
Esimene tõestus. Alloleva joonise vasak pool kujutab selle graafi üht alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$.
Teine tõestus. Alloleva joonise parem pool kujutab selle graafi üht alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga K_5.



3. ülesanne

Vastus: $P_{K_5-e}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)^2 = k^5 - 9k^4 + 29k^3 - 39k^2 + 18k$.
Esimene lahendus. Rakendame graafile $G = K_5 - e$ korduvalt valemit $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$. Seejuures püüame ärajäetava / kokkutõmmatava serva e valida selliselt, et graaf G/e osutuks graafiks K_4 — selle graafi kromaatilist polünoomi me juba teame. Saame



ja seega

$$P_{K_5-e}(k) = k \cdot P_{K_4}(k) - 3 \cdot P_{K_4}(k) = k \cdot k(k-1)(k-2)(k-3) - 3 \cdot k(k-1)(k-2)(k-3) \;.$$

Teine lahendus. Kuna $P_{K_5}(k) = P_{K_5-e}(k) - P_{K_5/e}(k)$, siis $P_{K_5-e}(k) = P_{K_5}(k) + P_{K_5/e}(k)$. On ilmne, et kui me graafis K_5 mõne serva kokku tõmbame, saame graafi K_4, seega $K_5/e = K_4$. Nüüd

$$P_{K_5-e}(k) = P_{K_5}(k) + P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) + k(k-1)(k-2)(k-3) \;.$$