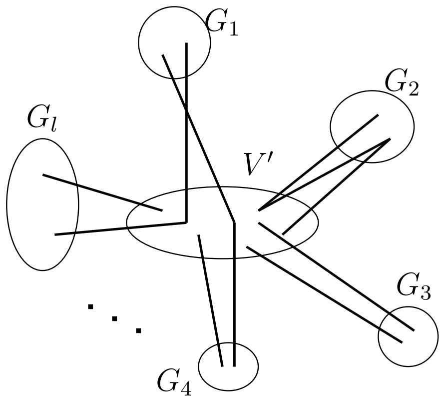
Graafide eksami ülesanded

21. jaanuar 2003

Lahendused

1. ülesanne

Olgu $G = (V, E)$ ülesandes kirjeldatud omadustega graaf ja olgu $V' \subseteq V$ vastavate omadustega tipuhulk. Olgu $k = |V'|$ ning olgu $G_1, \ldots, G_l$ graafi $G \backslash V'$ sidususkomponendid (vastavalt eeldustele siis $l > k$). Graaf G näeb siis välja järgmine:



s.t. graafis G on servad osade $G_1, \ldots, G_l, V'$ sees ning osade G_i ja V' vahel, kuid ei ole osade G_i ja G_j vahel, kus $i \neq j$.

Oletame vastuväiteliselt, et G on Hamiltoni graaf, olgu C tema Hamiltoni tsükkel.

Esimene mõttekäik. Olgu C_i tsükli C osa (s.t. tipud ja nendevahelised servad), mis asub graafi G osas G_i. Graafis $C \backslash V'$ moodustab iga osa C_i kas ühe või mitu sidususkomponenti, järelikult on graafil $C \backslash V'$ vähemalt l sidususkomponenti. Teisest küljest, kui me mingist tsüklist k tippu kustutame, siis järelejäänud osa tsüklist laguneb ülimalt k-ks komponendiks — esimese tipu eemaldamine teeb tsüklist ahela ning iga järgneva tipu eemaldamine võib ühe tekkinud ahelatest kaheks jagada. Vastuolu eeldusega $k < l$.

Teine mõttekäik. Hamiltoni tsükkel C peab läbima kõik osad $G_1, \ldots, G_l$. Seega peab ta vähemalt l korda ühest neist osadest lahkuma ja teise sisenema. Selline lahkumine/sisenemine on võimalik ainult läbi osa V', seejuures tuleb iga kord läbida osast V' vähemalt üks tipp. Kuna osas V' on k tippu ja $k < l$, siis tuleb mõnda tippu mitu korda läbida. Järelikult pole C Hamiltoni ahel.

2. ülesanne

Olgu $S' = V \backslash K$ ja $K' = V \backslash S$.

Näitame, et S' on sõltumatu hulk. Olgu $u, v \in S'$, meil tuleb näidata, et u ja v vahel ei ole serva. Tõepoolest, kui leiduks mingi serv $e \in E$ nii, et $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$, siis ei oleks K kate, sest serva e kumbki otstipp ei kuuluks hulka K. See oleks vastuolus ülesande eeldustega.

Kuna S on maksimaalse võimsusega sõltumatu hulk, siis $|S| \geqslant |S'|$. Saame

$$|K| + |S| \geqslant |K| + |S'| = |V| \ . \tag{1}$$

Näitame, et K' on kate. Olgu $e \in E$ ja olgu $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Et graaf G on silmusteta, siis $u \neq v$. Meil tuleb näidata, et vähemalt üks serva e otstippudest kuulub hulka K'. Tõepoolest, kui see nii ei oleks, siis oleksid $u, v \in S$ ning seega poleks S sõltumatu hulk — e oleks serv kahe hulka S kuuluva tipu vahel. See oleks vastuolus ülesande eeldustega.

Kuna K on minimaalne kate, siis $|K| \leqslant |K'|$. Saame

$$|K| + |S| \leqslant |K'| + |S| = |V| \ . \tag{2}$$

Võrratused (1) ja (2) annavadki tõestatava võrduse.

3. ülesanne

Otsitav kinnine ahel koosneb lahtisest ahelast, mis läbib antud graafi kõik servad (antud graaf on pool-Euleri graaf) ning lühimast ahelast kahe paarituarvulise astmega tipu vahel. Allpool on toodud üks selline ahel.