Graafid, 1. kontrolltöö

21. oktoober 2003

Töö eest saab max. 50 punkti.

1. **(10 p)** Antud $r, d \in \mathbb{N}$, nii et $1 \leqslant \lceil d/2 \rceil \leqslant r \leqslant d$. Konstrueeri graaf raadiusega r ja diameetriga d.

2. **(15 p)** Sidusa graafi G *aluspuude graafiks* nimetatakse (liht)graafi $\mathcal{T}(G)$, mille tippudeks on G aluspuud ning $T_1, T_2 \in V(\mathcal{T}(G))$ on omavahel servaga ühendatud parajasti siis, kui nad erinevad täpselt ühe serva poolest, s.t. $|E(T_1) \backslash E(T_2)| = 1$.

   Olgu G paaritu arvu tippudega Euleri graaf. Näita, et $\mathcal{T}(G)$ on Euleri.

3. **(15 p)** Olgu $G = (V, E)$ vähemalt 4 tipuga 3-sidus lihtgraaf, olgu $u, v \in V$ ning olgu $e_1, e_2 \in E$ tipuga u intsidentsed. Näita, et graafis G leidub tsükkel, millele jäävad nii tipp v kui ka servad e_1 ja e_2.

4. **(5 p)** Lihtgraafi $G = (V, E)$ *n-ndaks astmeks* nimetatakse graafi G^n, mille tipuhulgaks on V ning kus kaks tippu $u, v \in V$ on servaga ühendatud parajasti siis, kui $d_G(u, v) \leqslant n$.

   Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ja olgu G lihtgraaf. Näita, et $(G^m)^n = G^{mn}$.

5. **(10 p)** Lihtgraafide $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ *otsekorrutiseks* nimetatakse graafi $G_1 \times G_2$, mille tipuhulgaks on $V_1 \times V_2$ ning servahulgaks on

   $$\{((u_1, v), (u_2, v)) \,:\, u_1, u_2 \in V_1, v \in V_2, (u_1, u_2) \in E_1\} \cup \\ \{((u, v_1), (u, v_2)) \,:\, u \in V_1, v_1, v_2 \in V_2, (v_1, v_2) \in E_2\} \ .$$

   Näiteks on graafid Q_n defineeritud järgmiselt: $Q_0 = \bullet$ ja $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$.

   Olgu G_1 ja G_2 vähemalt kahe tipuga graafid, kus leidub Hamiltoni ahel, olgu graafis G_1 paarisarv tippe. Näita, et siis $G_1 \times G_2$ on Hamiltoni graaf.

6. **(10 p)** Olgu $G = (V, E)$ mingi sidus graaf ja $u, v \in V$ nii, et u ja v on naabertipud ja $G \backslash \{u, v\}$ (graaf G, millest on eemaldatud tipud u ja v koos nendega intsidentsete servadega) ei ole sidus. Näita, et graafis G ei leidu Hamiltoni tsükleid, mis läbiksid serva (u, v).

7. **(10 p)** Olgu T n-tipuline puu ja G mingi lihtgraaf, mille iga tipu aste on vähemalt $n-1$. Näita, et leidub $G_T \leqslant G$ (s.t. G_T on G alamgraaf) nii, et $T \cong G_T$.

8. **(5 p)** Leia märgendatud puu märgendite hulgaga $\{1, \ldots, 9\}$ ja Prüferi koodiga $(1, 5, 1, 5, 9, 8, 2)$.

9. **(5 p)** Leia järgmise märgendatud puu Prüferi kood.