

# Graafid, 1. kontrolltöö järeltöö

25. november 2003

Töö eest saab max. 50 punkti.

- (10 p) Leia servade arv graafis  $L(K_n)$ .
- (10 p) Olgu  $G$   $k$ -serviti sidus Euleri graaf, olgu  $P$  mingi lihtahel selles graafis pikkusega ülimalt  $(k - 1)$ . Näita, et  $G$ -s leidub Euleri ahel, mis alamahelana sisaldab ahelat  $P$ .
- (15 p) Olgu  $G = (V, E)$  mingi graaf ja  $E_1, E_2 \subseteq E$  tsükliavad servade hulgad, s.t. graafi  $G$  ükski tsükkel (kui servade hulk) pole  $E_1$  ega  $E_2$  alamhulgaks. Näita, et kui  $|E_1| < |E_2|$ , siis leidub  $e \in E_2 \setminus E_1$  nii, et ka  $E_1 \cup \{e\}$  on tsüklivaba.
- (10 p) Olgu  $G$  selline graaf, et tema kõik tsüklid on paarituurvulise pikkusega. Näita, et graafis  $G$  ei leidu tsükleid  $C_1$  ja  $C_2$ , millel on vähemalt üks ühine serv.
- (5 p) Olgu  $G$  mingi sidus lihtgraaf, nii et ka  $\overline{G}$  on sidus. Millised järgmistest olukordadest on võimalikud ja millised mitte (too näide või tõesta võimatus)?
  - $G$  on blokk,  $\overline{G}$  on blokk;
  - $G$  on blokk,  $\overline{G}$  ei ole blokk;
  - $G$  ei ole blokk,  $\overline{G}$  ei ole blokk.
- (10 p ( $\Rightarrow$ )) + 5 p ( $\Leftarrow$ )) Graaf  $G = (V, E)$  on  $k$ -aluseline, kui tema tipuhulk on võimalik tükeldada  $k$ -ks mittetühjaks tükiks (aluseks)  $V_1, \dots, V_k$  nii, et mitte ühegi  $e \in E$  jaoks ei kuulu tema mõlemad otstipud samasse tükki.  $G$  on täielik  $k$ -aluseline, kui ta on  $k$ -aluseline ja iga kahe erinevasse alusesse kuuluva tipu vahel on serv.  
Näita, et täielik  $k$ -aluseline ( $k \geq 2$ ) vähemalt kolme tipuga graaf  $G$  on Hamiltoni parajasti siis, kui  $|V(G)| \geq 2\alpha(G)$ , kus  $\alpha(G)$  on  $G$  suurima aluse tippude arv.
- (15 p) Olgu  $T$  mingi vähemalt kolme tipuga puu ja olgu  $T'$  saadud temast kõigi tema lehtede kustutamisel. Näita, et  $v \in V(T')$  on puu  $T'$  tsenter parajasti siis, kui ta on puu  $T$  tsenter.
- (10 p) Leia minimaalse kaaluga aluspuu järgmises graafis.

