Graafid

(MTAT.05.069, 3 AP)

Loengud:	T 10:15, aud. 404
Praktikumid:	K 8:15, aud. 402 ja 512 (homme ainult 402)
	N 8:15 (või 10:15?), aud. 315

koduleht:

`http://www.ut.ee/~peeter_l/teaching/graafid03s`

(sisaldab loengumaterjale)

Hinde saamiseks: 2 kontrolltööd **või** eksam.

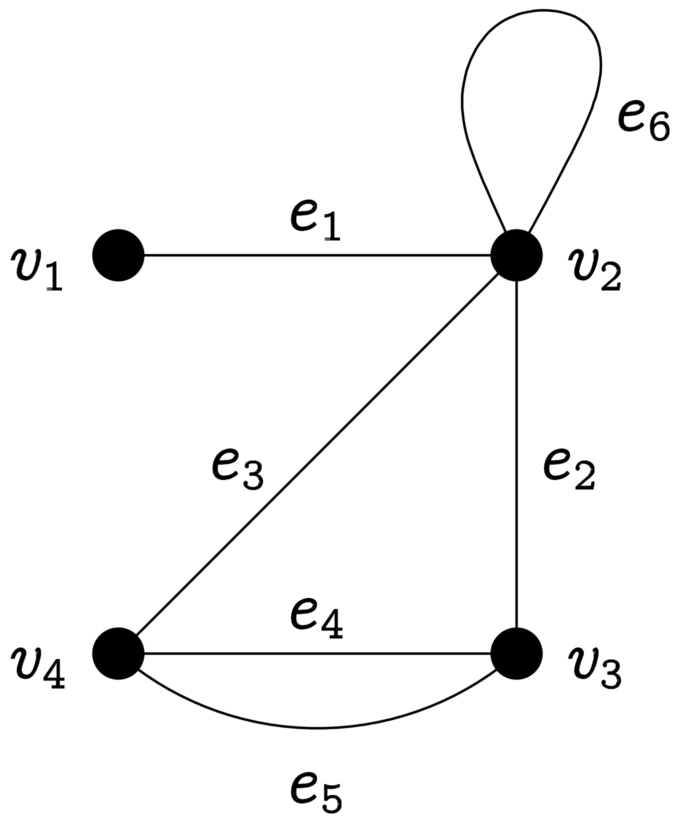
(Mittesuunatud) graaf on objekt G, millel on järgmised osad:

- Tippude hulk V (tähistame ka $V(G)$).
- Servade hulk E (tähistame ka $E(G)$).
- Intsidentsusfunktsioon $\mathcal{E} : E \longrightarrow \mathcal{P}(V)$, nii et iga $e \in E$ jaoks on $\mathcal{E}(e)$ kas 1- või 2-elemendiline.

Käesolevas kursuses vaatleme graafe, kus V ja E on lõplikud hulgad ning $V \neq \emptyset$.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ning

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$
e_5	$\{v_3, v_4\}$
e_6	$\{v_2\}$



Graafi võib illustreerida joonisega.

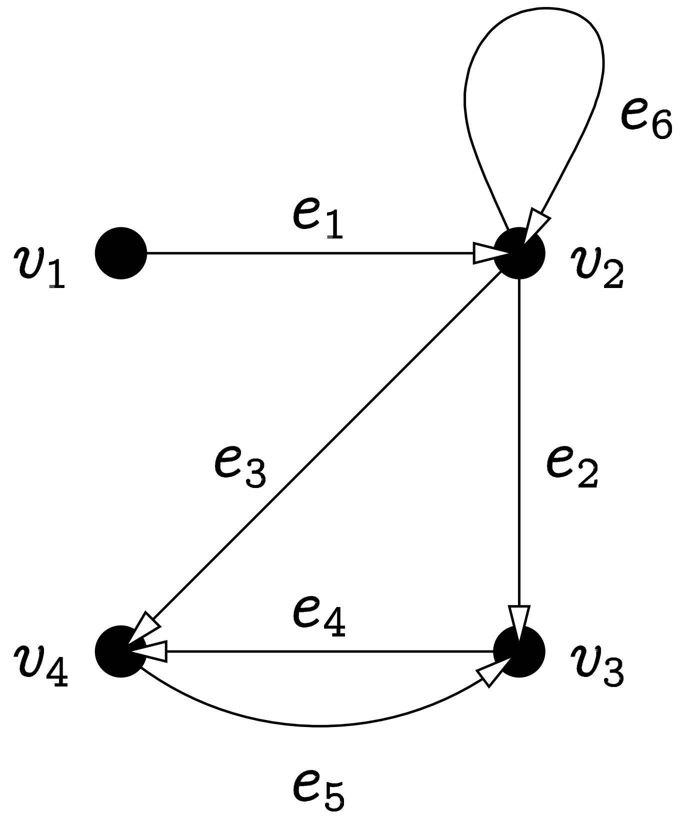
Käesolevas kursuses mõistame graafi all objekti $(V, E, \mathcal{E})$.

Suunatud graaf koosneb tipuhulgast V, servahulgast E ja intsidentsusfunktsioonist $\mathcal{E} : E \longrightarrow V \times V$.

Suunatud graafi servi nimetatakse ka *kaarteks*.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ning

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	(v_1, v_2)
e_2	(v_2, v_3)
e_3	(v_2, v_4)
e_4	(v_3, v_4)
e_5	(v_4, v_3)
e_6	(v_2, v_2)



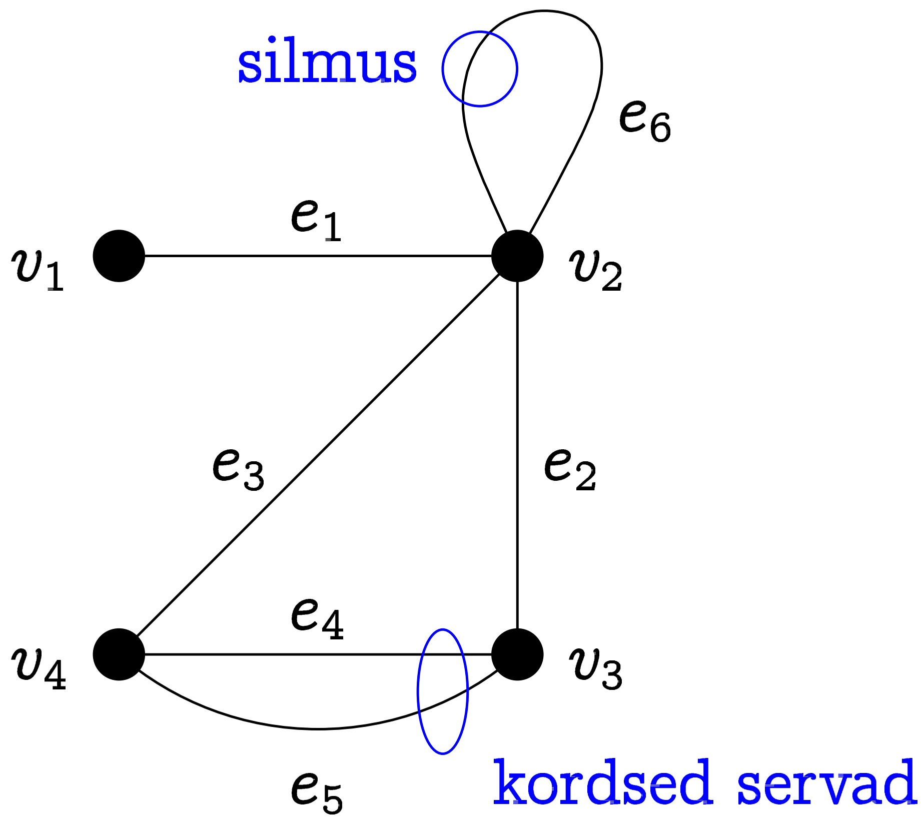
Olgu $G = (V, E, \mathcal{E})$ mingi graaf. Nimetusi:

- Kui $v \in \mathcal{E}(e)$, siis v ja e on *intsidentsed*.
- Kui leidub e, et $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, siis v_1 ja v_2 on *naabertipud*.
- Kui $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, siis tipud v_1 ja v_2 on serva e *otstipud*. Tähistame ka $v_1 \overset{e}{—} v_2$.

Olgu $G = (V, E, \mathcal{E})$ mingi suunatud graaf. Nimetusi:

- Kui $\mathcal{E}(e) = (v_1, v_2)$, siis v_1 on serva e *algtipp* ja v_2 serva e *lõpptipp*.

$e \in E$ on *kordne serv*, kui leidub serv $e' \in E \backslash \{e\}$, nii et $\mathcal{E}(e) = \mathcal{E}(e')$. $e \in E$ on *silmus*, kui $|\mathcal{E}(e)| = 1$.



Lihtgraaf on graaf ilma kordsete servade ja silmusteta.

Suunatud lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$.

Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = (v_1, v_2)$, vastab $(v_1, v_2) \in V \times V$.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	(v_1, v_2)
e_2	(v_2, v_3)
e_3	(v_2, v_4)
e_4	(v_3, v_4)

Siis võime lugeda, et $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$.

Ka suunamata lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$.
Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, vastab $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq V \times V$.

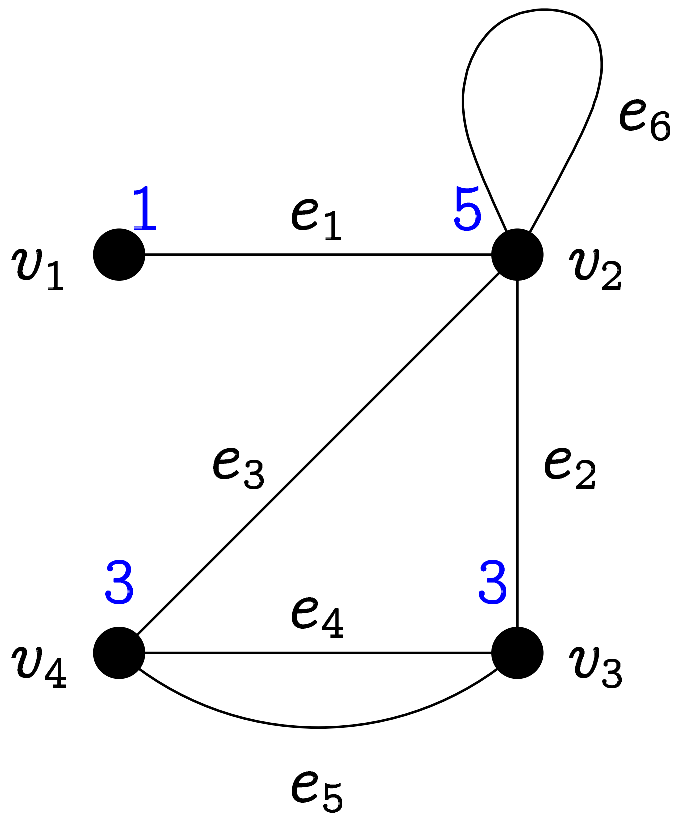
Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning

e	$\mathcal{E}(e)$
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_2, v_4\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$

Siis võime lugeda, et $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$.

Graafi $(V, E, \mathcal{E})$ tipu v *aste* ehk *valents* on selle tipuga intsidentsete servade arv, kusjuures silmuseid loetakse kahekordselt. Tähistus: $\deg(v)$.

$$\deg(v) = |\{e \in E \mid v \in \mathcal{E}(e)\}| + |\{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v\}\}|$$

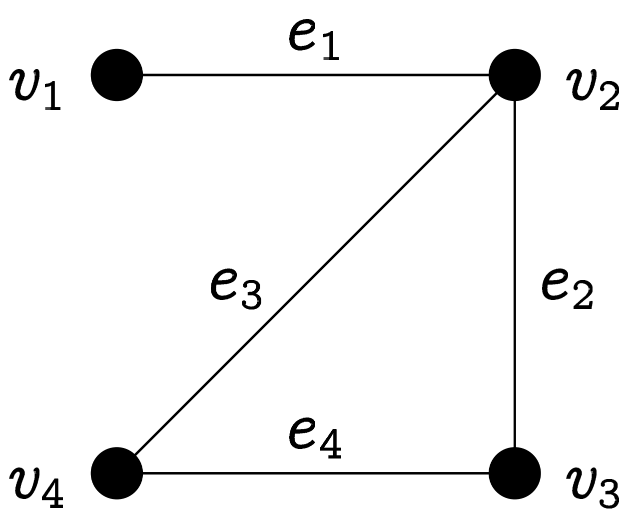


Olgu $G = (V, E)$ mittesuunatud lihtgraaf. Olgu $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Graafi G *naabrusmaatriks* on $n \times n$ maatriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, kus

- Kui $(v_i, v_j) \in E$, siis $a_{ij} = 1$.
- Kui $(v_i, v_j) \notin E$, siis $a_{ij} = 0$.

Naabrusmaatriks on sümmeetriline ja tema peadiagonaalil on nullid.

Näide:



	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0

Teoreem. Mittesuunatud lihtgraafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

Tõestus. Loeme, mitu ühte on $G = (V, E)$ naabrusmaatriksis.

- Neid on $2 \cdot |E|$.
- Neid on $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

Need kaks suurust on võrdsed. Järelikult on kõigi tippude astmete summa paarisarv. Täisarvude summa on paarisarv parajasti siis, kui paarisarv liidetavaid on paaritud. $\square$

Analoogiliselt: suvalises graafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

Tõestus. Olgu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Vaatame hulki

$$\begin{array}{ll}
\{e \in E \mid v_1 \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_1\}\} \\
\{e \in E \mid v_2 \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_2\}\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\{e \in E \mid v_n \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_n\}\}
\end{array}$$

Iga $e \in E$ kuulub täpselt kahte hulka.

Seega $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$, mis on paarisarv. $\square$

Suunatud graafis $(V, E, \mathcal{E})$ võib tipu v jaoks defineerida:

- *sisendastme* $\overrightarrow{\deg}(v)$ — tippu v suubuvate servade (s.t. servade, mille lõpptipp on v) arvu;
- *väljundastme* $\overleftarrow{\deg}(v)$ — tipust v lähtuvate servade arvu.

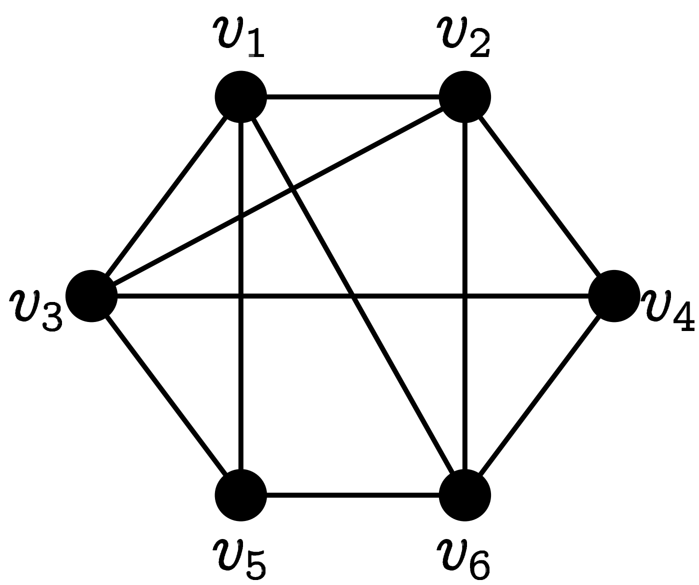
Analoogiline teoreem: $\sum_{v \in V} \overrightarrow{\deg}(v) = \sum_{v \in V} \overleftarrow{\deg}(v)$.

- *Tee* ehk *ahel* graafis $G = (V, E)$ (tipust x tipuni y) on jada

$$P : x = v_0 \stackrel{e_1}{\text{---}} v_1 \stackrel{e_2}{\text{---}} v_2 \stackrel{e_3}{\text{---}} v_3 \stackrel{e_4}{\text{---}} \ldots v_{k-1} \stackrel{e_k}{\text{---}} v_k = y \ .$$

- Arvu k nimetatakse tee P pikkuseks ja tähistatakse $|P|$.
- Seda, et P on tee tipust x tipuni y, tähistame $x \stackrel{P}{\rightsquigarrow} y$.
- Teed, kus tipud on kõik erinevad (erandina võivad x_0 ja x_k võrdsed olla), nimetame *lihtahelaks*.
- Teed, kus $v_0 = v_k$, nimetame *kinniseks* ahelaks.
- Kinnist lihtahelat nimetame *tsükliks*.
- Graaf on *sidus*, kui tema iga kahe tipu vahel leidub ahel.
- *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude $u, v \in V$ vahel nimetatakse neid ühendava lühima lihtahela pikkust.

Näiteid:



Ahel: $v_1 - v_2 - v_4 - v_6 - v_2 - v_3$

Lihtahel: $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$

Kinnine ahel: $v_1 - v_2 - v_3 - v_1 - v_5 - v_6 - v_1$

Tsükkel: $v_1 - v_2 - v_6 - v_5 - v_1$

$d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_1) = 0$.

Teoreem. Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

Tõestus. Silmus on tsükkel. Kordsed servad moodustavad tsükli.

Eeldame, et $G = (V, E)$ on lihtgraaf. Olgu $v_1 \in V$. Leidub $v_2 \in V$ nii, et $v_1 — v_2$. Leidub $v_3 \in V$ nii, et $v_1 — v_2 — v_3$. See on lihtahel.

Olgu meil lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k$. Leidub $v_{k+1} \in V$ nii, et $v_{k+1} \neq v_{k-1}$ ja $v_k — v_{k+1}$.

Kui $v_{k+1} = v_i$ mõne $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ jaoks, siis on meil tsükkel.

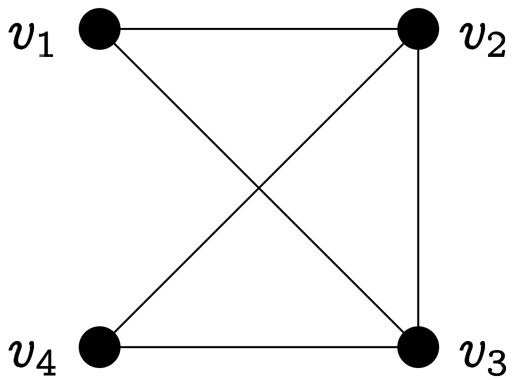
Vastasel juhul on meil pikem lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k — v_{k+1}$.

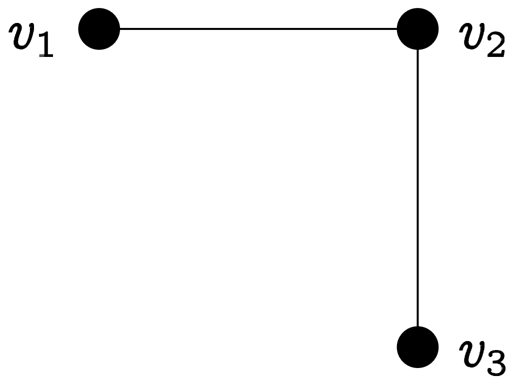
Lihtahela pikkus on piiratud hulga V võimsusega. $\square$

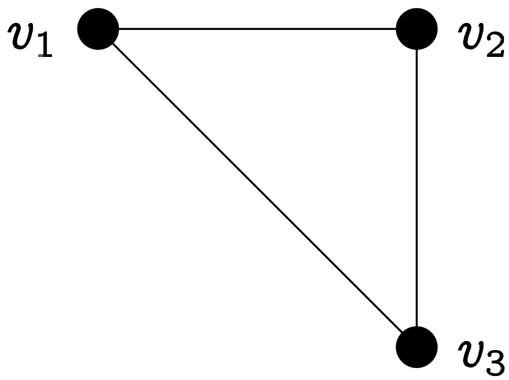
Graafi $G = (V, E)$ *alamgraafiks* nimetame graafi $G' = (V', E')$, kus $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ ja iga $e \in E'$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V'$. Tähistame $G' \leqslant G$.

Alamgraafi (V', E') nimetame *indutseerituks* (hulga V' poolt), kui hulk E' on suurim võimalik, s.t. iga $e \in E$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V' \Rightarrow e \in E'$.

Näide:







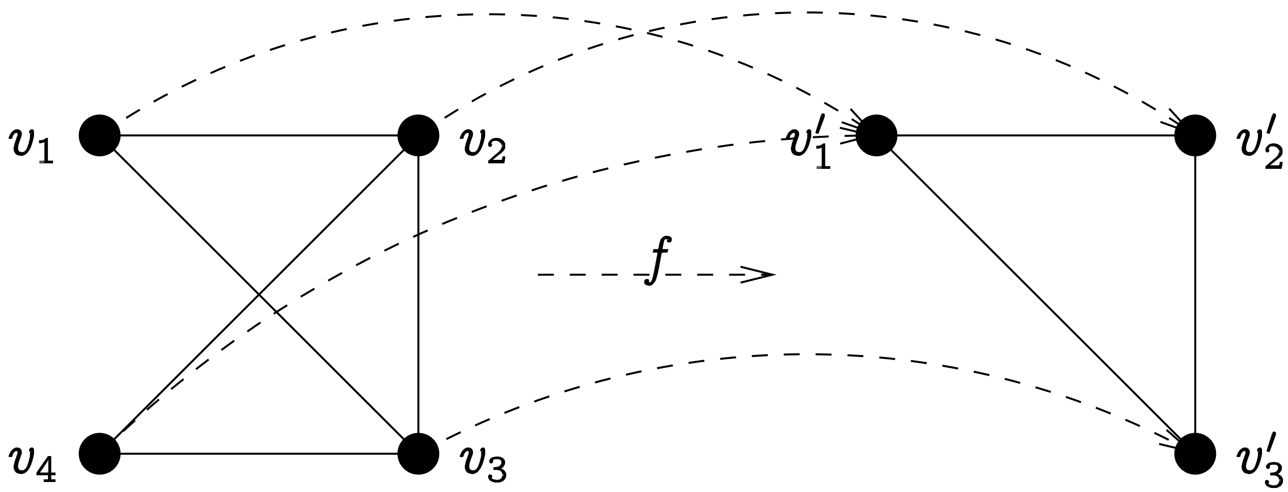
Graafi G *sidususkomponentideks* nimetatakse tema maksimaalseid sidusaid alamgraafe.

Veel mõisteid:

- Graafi serv on *sild*, kui tema eemaldamine suurendab graafi sidususkomponentide arvu.
- Graafi tipp on *lõiketipp*, kui tema (ning kõigi temaga intsidentsete servade) eemaldamine suurendab graafi sidususkomponentide arvu.

Homomorfism graafist $G_1 = (V_1, E_1)$ graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ on kujutus $f : V_1 \longrightarrow V_2$, nii et tipud $x, y \in V_1$ on naabrid parajasti siis, kui tipud $f(x), f(y) \in V_2$ on naabrid.

Näide:



Homomorfism f on *monomorfism*, kui ta on üksühene.

Homomorfism f on *isomorfism*, kui ta on bijektsioon.

Graafid G_1 ja G_2 on *isomorfsed* (tähist. $G_1 \cong G_2$), kui nende vahel leidub isomorfism.

Tavaliselt me loeme isomorfseid graafe üheks ja samaks.

Näiteks, olgu $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ graafid. Ütleme, et G_1 on G_2 alamgraaf, kui leiduvad $V_1' \subseteq V_2$ ja $E_1' \subseteq E_2$ nii, et $G_1 \cong (V_1', E_1')$ ja $(V_1', E_1') \leqslant G_2$.

G_1 on G_2 indutseeritud alamgraaf parajasti siis, kui leidub monomorfism graafist G_1 graafi G_2.

Kui V on mingi hulk ja ρ on mingi antirefleksiivne binaarne relatsioon sellel, siis defineerib ρ (suunatud) lihtgraafi tipuhulgaga V ja servahulgaga

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in V, x \rho y\} \ .$$

• *Nullgraafiks* nimetatakse graafi, milles pole servi. n-tipulist nullgraafi tähistame O_n või N_n.

• *Täisgraafiks* nimetatakse graafi, kus iga kahe erineva tipu vahel on üks serv. n-tipulist täisgraafi tähistame K_n.

Lause. Graafis K_n on $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.

• Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline*, kui V on tükeldatav kaheks hulgaks (aluseks) V_1 ja V_2 (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nii, et ühegi serva mõlemad otstipud ei kuulu samasse alusesse.

Kui ρ on relatsioon hulkade X ja Y (kus $X \cap Y = \emptyset$) vahel, siis lihtgraaf tipuhulgaga $V = X \cup Y$ ja servahulgaga

$$E = \{(x, y), (y, x) \mid x \in X, y \in Y, x \ \rho \ y\}$$

on kahealuseline graaf alustega X ja Y.

- Kahealuseline lihtgraaf alustega V_1 ja V_2 on *täielik kahealuseline*, kui iga $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ vahel leidub serv. Täielikku kahealuselist graafi, kus $|V_1| = m$ ja $|V_2| = n$, tähistame $K_{m,n}$.

Lause. Graafis $K_{m,n}$ on mn serva.

Teoreem. Graaf on kahealuseline $\Leftrightarrow$ kõik tema tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Tõestus $\Rightarrow$. Tsüklis on mingi arv samme esimesest alusest teise ja samapalju samme teisest alusest esimesse.

Tõestus $\Leftarrow$. Eeldame, et graaf $G = (V, E)$ on sidus. Vastasel korral viime järgneva operatsiooni läbi iga sidususkomponendiga.

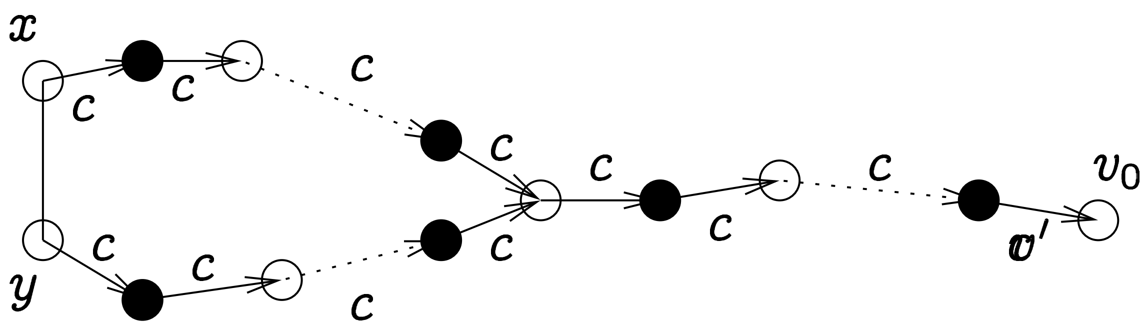
Järgnevas värvime me graafi G tippe mustaks ja valgeks.

Valime mingi tipu $v_0 \in V$ ja värvime ta valgeks.

Olgu u mingi värvitud tipp, millel on värvimata naabreid. Olgu v üks tema värvimata naabertippudest. Värvime v teist värvi, kui u. Jätame meelde, et v-d värvides lähtusime u värvist. Tähistame $v \xrightarrow{c} u$.

Kordame eelmist lõiku, kuni tekivad naabertipud x ja y, mis on värvitud sama värviga, või kuni tipud otsa saavad.

Kui tekivad sellised tipud x ja y, siis



on meil paarituarvulise pikkusega tsükkel x — $\cdots$ —

$\cdots$ — y — x.

Vastasel juhul (kui tipud otsa said) moodustavad m

tipud ühe aluse ja valged teise. $\square$

Tartu Akadeemiline Meeskoor võtab vastu uusi lauljaid.

Proovid toimuvad T 18:30 ja N 18:30 endises EPA klubis (Veski 6, Kassitoomel).

Esimene proov toimub 9. septembril.

Eriti oodatud on tenorid.