Servade värvimine

11. november 2003

Kontrolltööd on parandatud.

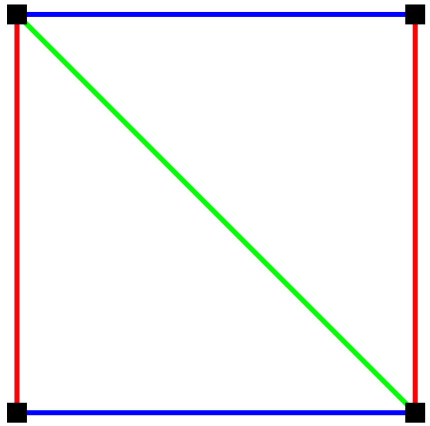
Järeltöö toimub 25. novembril loengu ajal / asemel.

Novembri viimasel nädalal mind ei ole. Praktikumide toimumise kohta ei tea veel.

Silmusteta graafi $G = (V, E)$ *servade (korrektne) värvimisviis k värviga* on mingi funktsioon $\gamma : E \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, nii et

- suvalise kahe erineva serva $e_1, e_2 \in E$ jaoks, millel on ühine otspunkt, kehtib $\gamma(e_1) \neq \gamma(e_2)$.

Teisisõnu, suvalise tipu jaoks on selle tipuga intsidentsed servad kõik erinevat värvi.



Näide: olgu antud (kooli)klassside hulk X ja õpetajate hulk Y.

Iga klassi ja iga õpetaja jaoks olgu antud, mitu tundi nädalas see õpetaja sellele klassile andma peab.

Ülesanne: koostada tunniplaan.

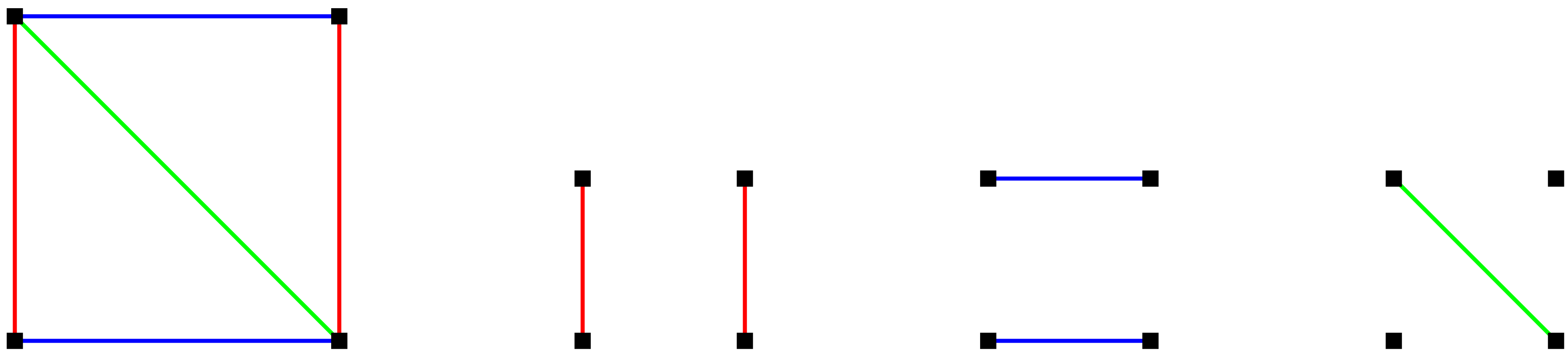
Vaatame graafi, mille tipuhulk on $X \cup Y$ ning kus $x \in X$ ja $y \in Y$ on ühendatud nii mitme servaga, kui mitu tundi nädalas õpetaja y klassile x annab.

Tunniplaan on selle graafi servade värvimisviis (ja vastupidi). Värvideks on tundide toimumise ajad.

Olgu $G = (V, E)$ graaf, γ tema servade mingi värvimisviis ning i üks värvidest.

Servade hulk $\{e \mid e \in E, \gamma(e) = i\}$ on kooskõla.

Graafi servade värvimisviis kujutab endast servade hulga tükeldust kooskõladeks.



Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Oletame, et tal leidub servade värvimisviis k värviga, aga ei leidu servade värvimisviisi $k-1$ värviga.

Arvu k nimetame G *kromaatiliseks arvuks servade järgi* ja tähistame $\chi'(G)$.

Tähistagu $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$ graafi G tippude max. astet.

On ilmne, et $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Näide, kus $\chi'(G) > \Delta(G)$: paarituarvulise pikkusega tsüklid.

Teoreem. Kahealuselises graafis G kehtib $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Tõestus. Kõigepealt täiendame G $\Delta(G)$-regulaarseks.

1. Kui ühes aluses on vähem tippe kui teises, siis lisame sinna tippe juurde.
2. Kui mõne tipu aste on väiksem kui $\Delta(G)$, siis leidub ka teises aluses mingi tipp, mille aste on väiksem kui $\Delta(G)$. Ühendame need kaks tippu servaga.

Kui muudetud graafi servad on värvitavad $\Delta(G)$ värviga, siis on seda ka esialgse graafi G servad.

Nüüd võime lugeda, et meil on mingi k-regulaarne kahealuseline graaf G.

1. k-regulaarses kahealuselises graafis G leidub mingi täielik kooskõla M_1.

2. Eemaldame M_1-e kuuluvad servad. Järgi jääb mingi $(k-1)$-regulaarne kahealuseline graaf.

3. Selles graafis leidub mingi täielik kooskõla M_2.

4. Eemaldame M_2-e kuuluvad servad. Järgi jääb mingi $(k-2)$-regulaarne kahealuseline graaf.

5. jne.

Sel viisil tükeldub G servade hulk k-ks (täielikukuks) kooskõlaks $M_1, \ldots, M_k$. Need defineerivadki G servade värvimisviisi. $\square$

Teoreem (Vizing). Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Siis $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

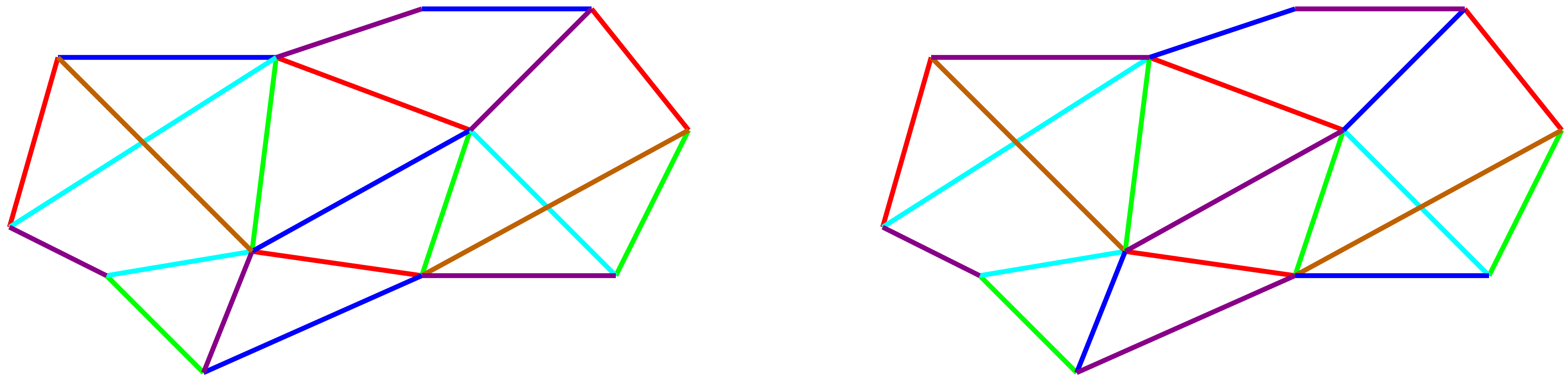
Tõestus käib induktsiooniga üle tippude arvu. Väide on ilmne, kui $|V| = 1$.

Meil tuleks näidata, et kehtib:

> Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja olgu $k = \Delta(G)+1$. Olgu $v \in V$ graafi G mingi tipp ja olgu graafi $G \backslash v$ servad värvitavad k värviga. Siis on graafi G servad värvitavad k värviga.

Selle väite tõestame induktsiooniga üle värvide arvu k. Me näitame pisut tugevama väite kehtivust.

Lemma. Olgu $G = (V, E)$ graaf ja γ tema servade mingi värvimisviis. Olgu $E' \subseteq E$ servade hulk, mis on värvitud mingi teatava kahe värviga. Vaatame graafi $G' = (V, E')$.

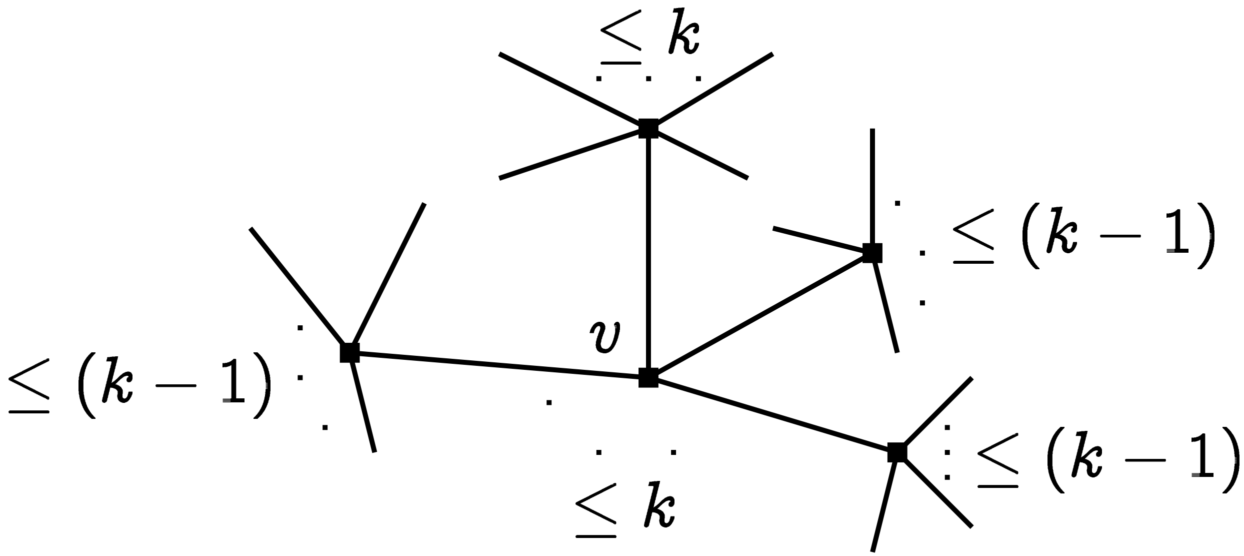


Olgu H graafi G' üks sidususkomponentidest. Kui me H-i servade värvid ära vahetame, siis on saadav värvimisviis ikkagi G servade korrektne värvimisviis.

Tõestus. Peaks vist ilmne olema.

Lemma. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja $k \in \mathbb{N}$. Olgu $v \in V$ selline, et

- $\deg(v) \leq k$. Kui $w \in V$ on v naaber, siis $\deg(w) \leq k$.
- Tipul v on ülimalt üks naabertipp, mille aste on täpselt k.



Olgu $G \backslash v$ servad värvitavad k värviga. Siis G servad on värvitavad k värviga.

Tõestus. *Baas.* $k = 1$.

Sel juhul $\deg(v) = 0$ või $\deg(v) = 1$.

Kui $\deg(v) = 0$, siis on graafis G samad servad, mis graafis $G \backslash v$.

Kui $\deg(v) = 1$, siis olgu u tipu v naaber. Vastavalt lemma eeldustele $\deg(u) \leq 1$, seega on u — v graafi G üks sidususkomponentidest.

G servade värvimisviisi saame $G \backslash v$ servade värvimisviisist nii, et värvime täiendavalt serva u ja v vahel ainsa värviga.

Samm. $k > 1$.

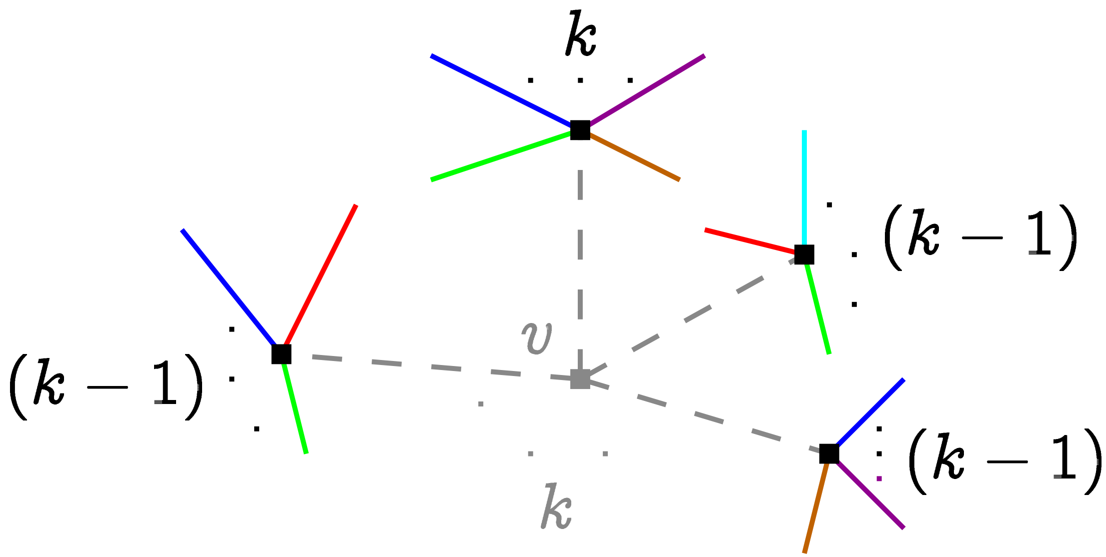
Seni kuni $\deg(v) < k$ lisame graafile G uue tipu u ning serva $u — v$.

Seni kuni v mõne naabri v' aste on väiksem kui k või $k-1$, lisame graafile G uue tipu u ja serva $u — v'$.

G-st saab seega graaf, kus lemma sõnastuses on võrratuste asemel võrdused.

Muudetud graaf on k värviga värvitav parajasti siis, kui esialgne graaf oli.

Olgu γ graafi $G \backslash v$ servade värvimisviis k värviga.



Vaatame (endise) tipu v naabertippe. Iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ jaoks olgu X_i nende naabertippude hulk, millega ei ole intsidentseid servi, mis on värvitud i-ga.

Üks tippudest kuulub täpselt ühte hulkadest X_i, ülejäänud kuuluvad täpselt kahte. Seega $\sum_{i=1}^{k} |X_i| = 2k - 1$.

Tahame, et γ oleks selline, et leiduks i, nii et $|X_i| = 1$.

S.t. i-ga värvitud servad on iga v naabertipuga, v.a. ühega, intsidentsed.

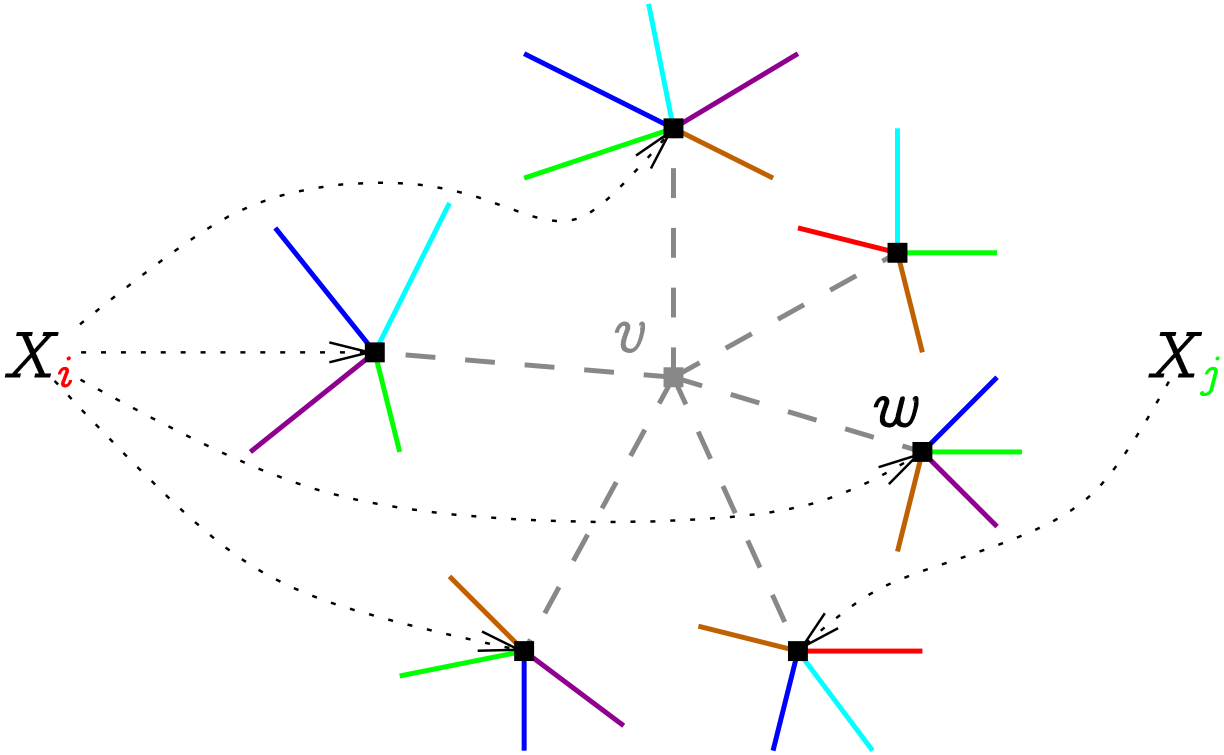
Näitame, et γ on valitav nii, et iga $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ jaoks $\big||X_i| - |X_j|\big| \leq 2$.

Selleks näitame, et kui mõne i, j jaoks $|X_i| - |X_j| \geq 3$, siis leidub värvimisviis γ', kus $|X_i|$ on ühe või kahe võrra väiksem ning $|X_j|$ samavõrra suurem.

Samuti näitame, et lõpliku arvu selliste sammude (γ-st γ'-ks) pärast selliseid i-d ja j-i enam ei leidu.

Olgu i ja j sellised, et $|X_i| - |X_j| \geq 3$. Olgu $w \in X_i \backslash X_j$.

S.t. tippe, millega on intsidentne serv värvi j, on vähemalt kolme võrra rohkem kui tippe, millega on intsidentne serv värvi i.

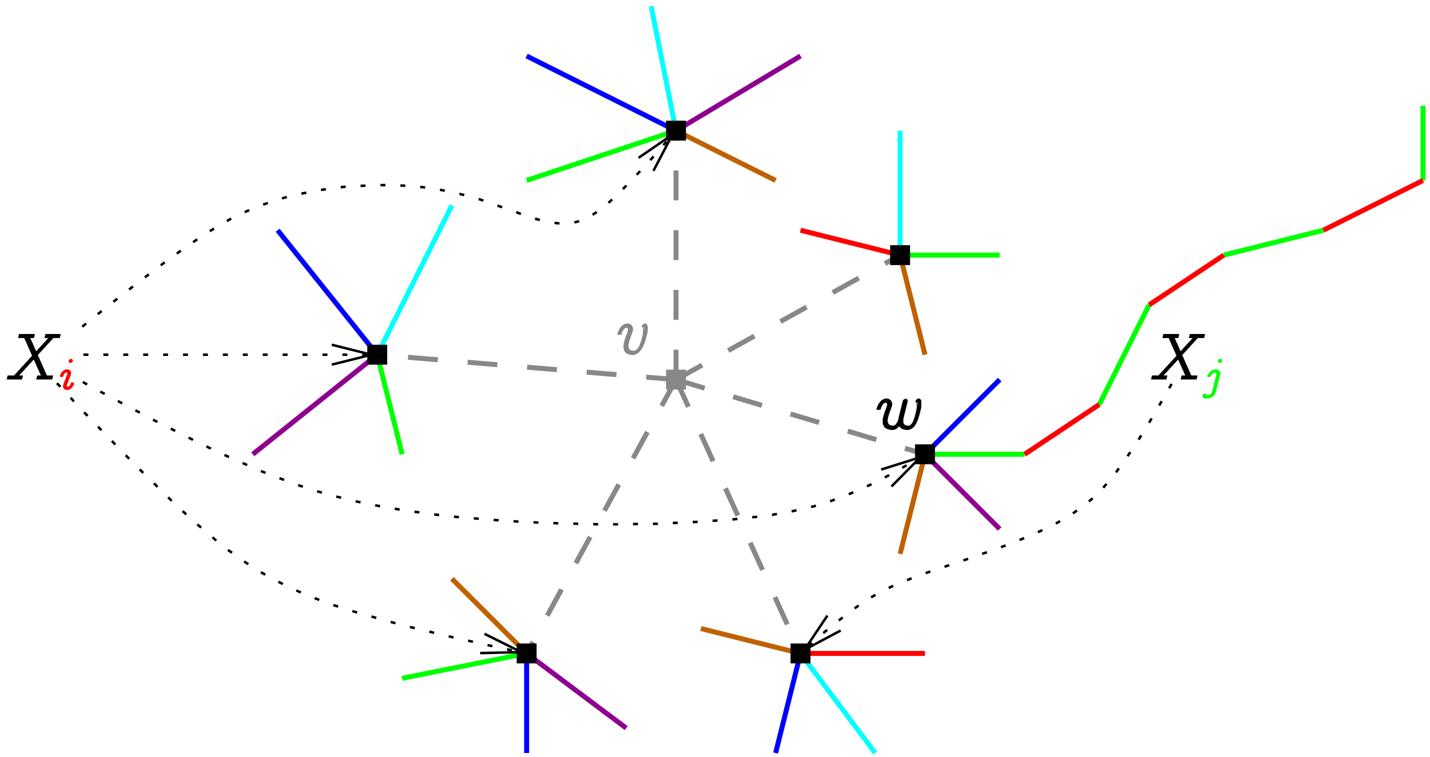


Olgu $E' \in E$ kõigi servade e hulk, kus $\gamma(e) = i$ või $\gamma(e) = j$. Vaatame graafi $G' = (V, E')$.

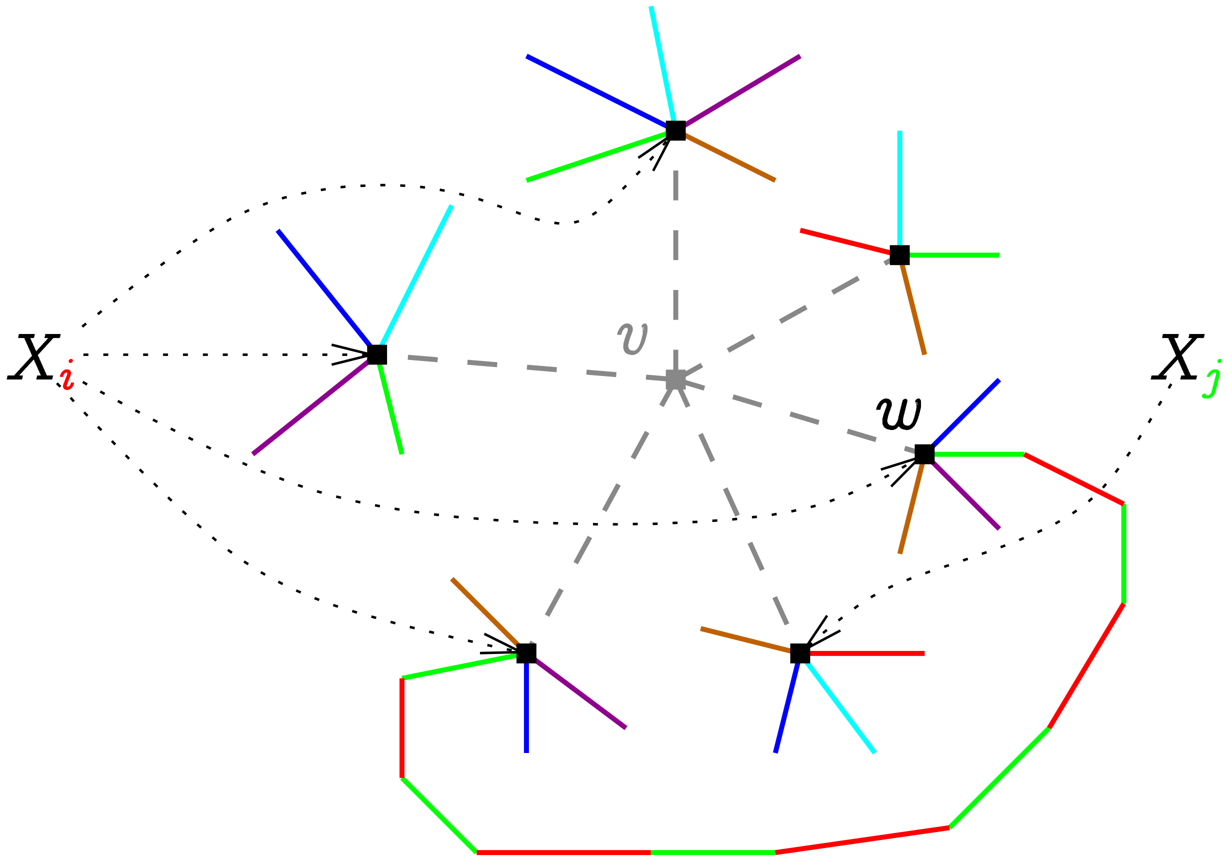
Graafis G' on kõigi tippude aste ≤ 2. Seega on G' sidusus-komponentideks isoleeritud tipud, ahelad ja tsüklid.

Tipp $w \in X_i \backslash X_j$ on mõne sellise ahela otstipuks.

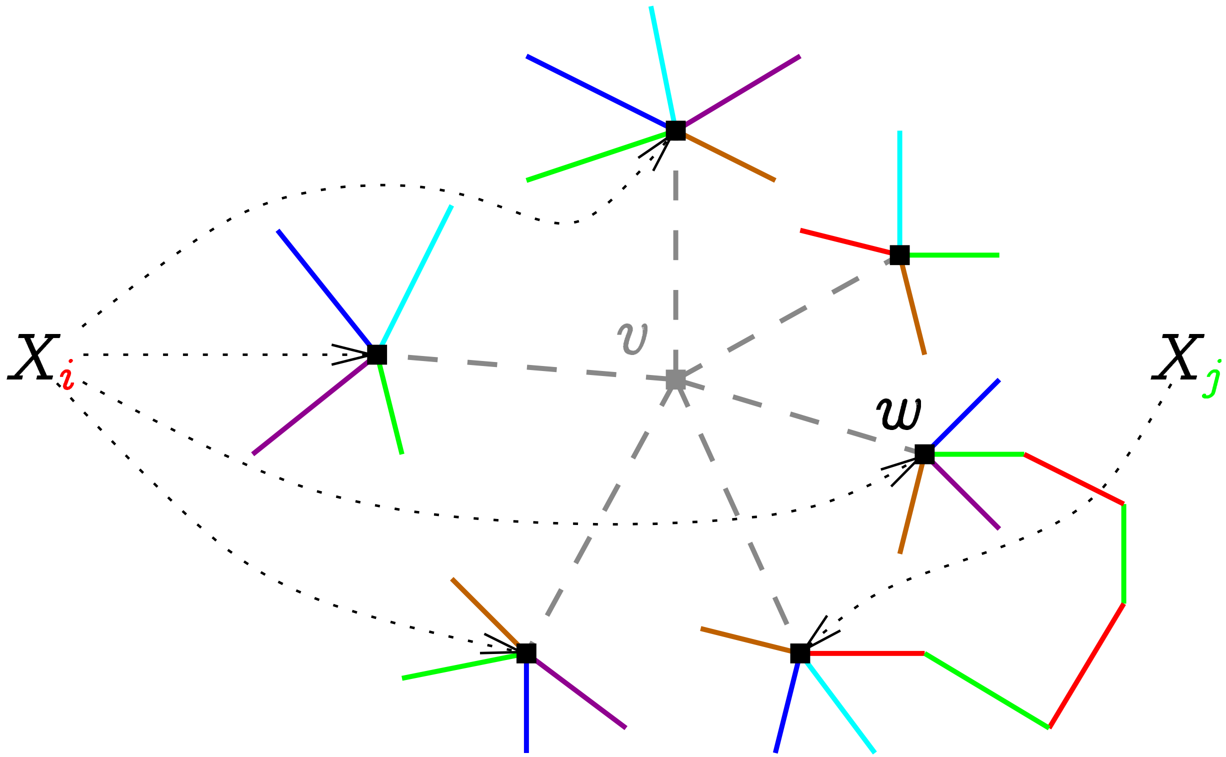
Kus võib selle ahela teine otstipp olla?



Kuskil mujal graafis G



Mõnes tipus hulgast $X_i \backslash X_j$

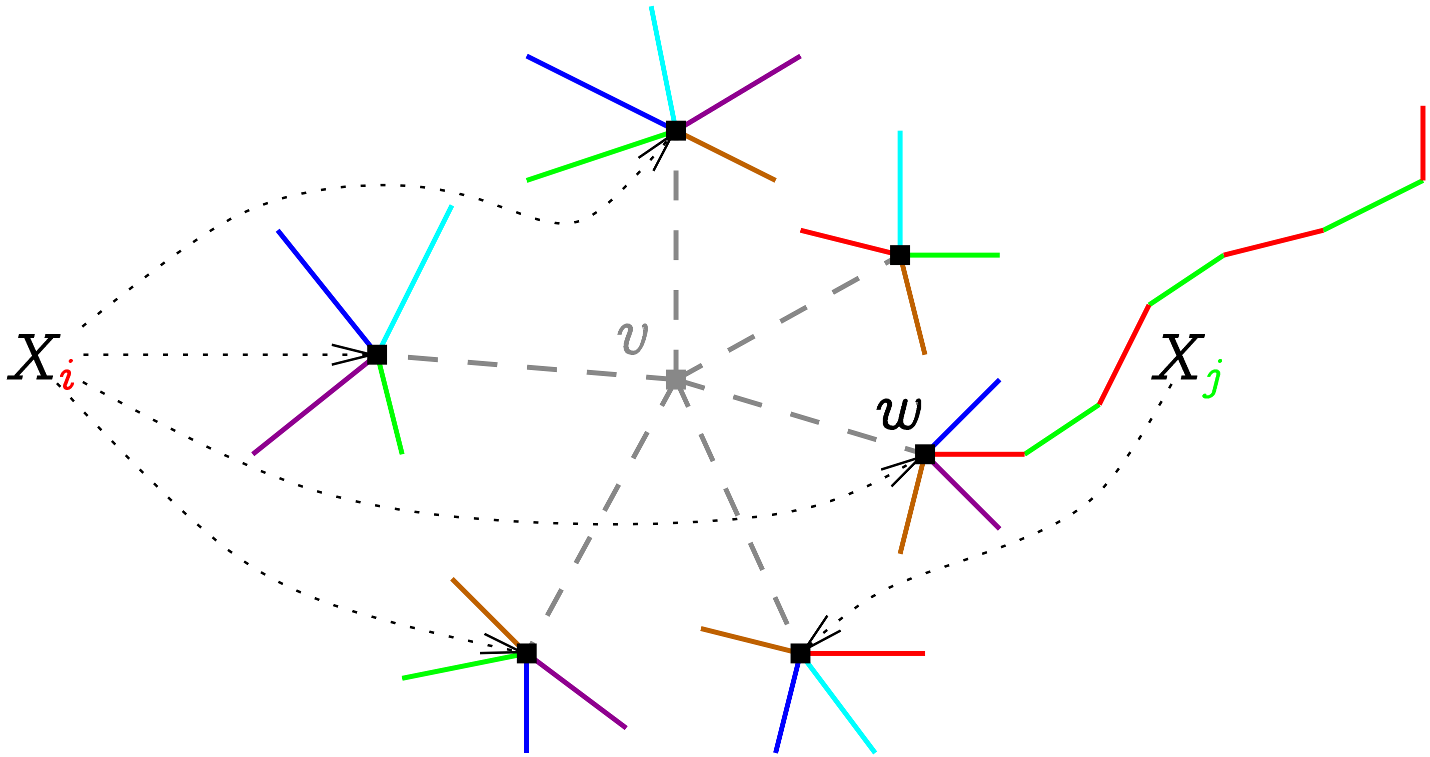


Mõnes tipus hulgast $X_j \backslash X_i$

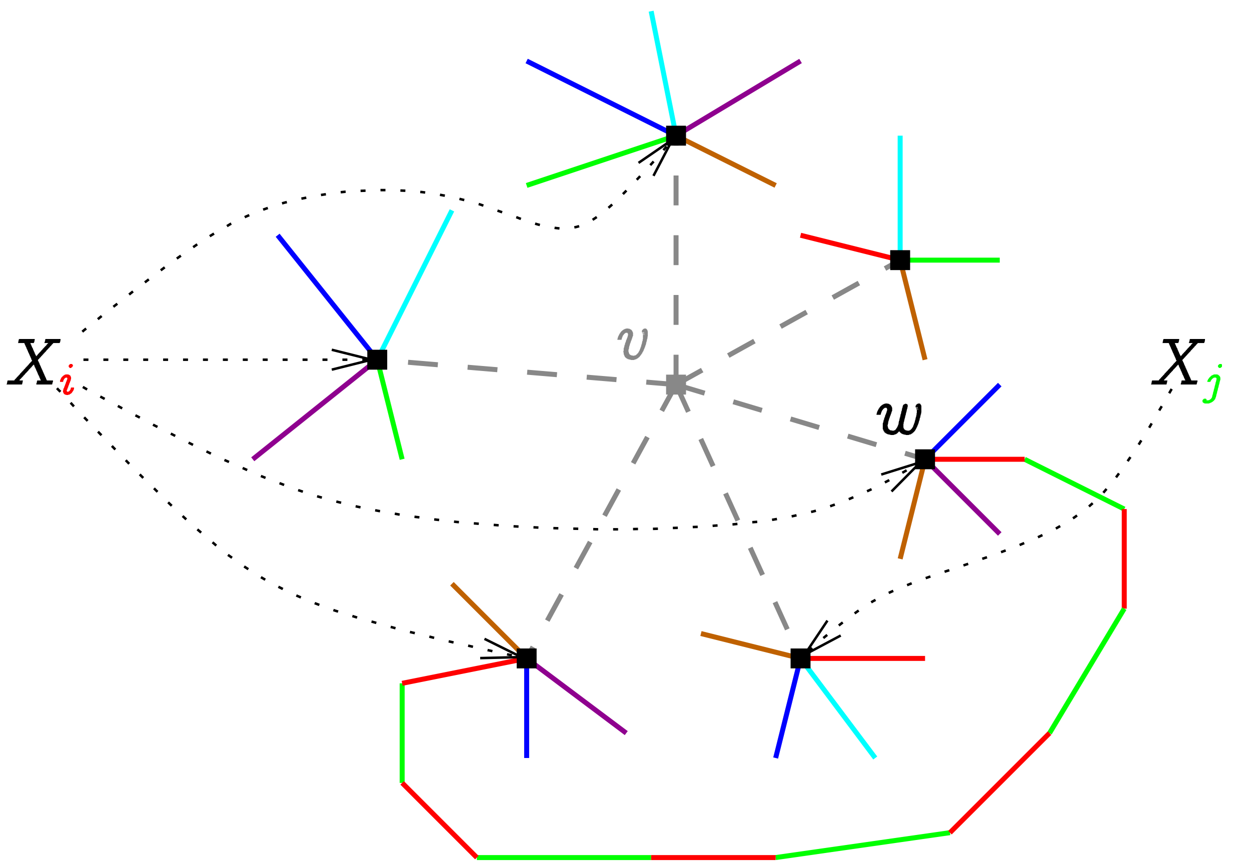
Kuna $|X_i| > |X_j|$, siis leidub selline $w \in X_i \setminus X_j$, et temast algav ahel — graafi G' sidususkomponent — lõppeb kuskil mujal kui mõnes tipus hulgast $X_j \setminus X_i$.

Sellises ahelas vahetame värvid i ja j. See defineerib meile värvimisviisi γ'.

$|X_i|$ ja $|X_j|$ muutuvad järgmiselt:



$|X_i|$ väheneb ühe võrra, $|X_j|$ suureneb ühe võrra



$|X_i|$ väheneb kahe võrra, $|X_j|$ suureneb kahe võrra

Tarvis oleks leida iga $G\backslash v$ värvimisviisi γ jaoks mingi suurus, mis

- Igal sammul (γ-st γ'-ks) muutuks ühes kindlas suunas (näiteks väheneks).
- Omaks mingit alumist tõket.
- Poleks vähendatav kuitahes vähesel määral.

Selliseks suuruseks sobib näiteks $\sum_{i=1}^{k} |X_i|^2$.

Tõepoolest, olgu $n_i, n_j \in \mathbb{N}$, nii et $n_i - n_j \geq 3$. Siis

$$(n_i-1)^2+(n_j+1)^2 = {n_i}^2+{n_j}^2-2(n_i-n_j)+2 \leq {n_i}^2+{n_j}^2-4$$
$$(n_i-2)^2+(n_j+2)^2 = {n_i}^2+{n_j}^2-4(n_i-n_j)+8 \leq {n_i}^2+{n_j}^2-4$$

Oleme näidanud, et leidub värvimisviis γ, mille puhul hulkade X_i võimsused erinevad üksteisest ülimalt kahe võrra.

Kuna hulkade X_i keskmine võimsus on natuke alla kahe $(\frac{2k-1}{k})$, siis on X_i-de võimalikud võimsused kas $\{0, 1, 2\}$ või $\{1, 2, 3\}$.

Kui on $\{1, 2, 3\}$, siis peab leiduma selline i, et $|X_i| = 1$, muidu oleks keskmine võimsus liiga suur.

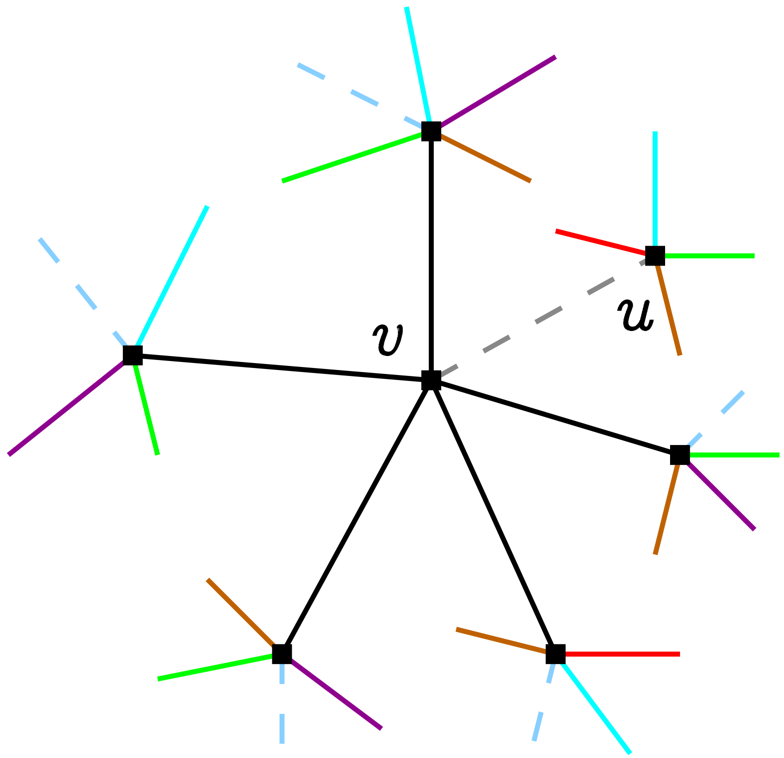
Kui on $\{0, 1, 2\}$, siis peab leiduma selline i, et $|X_i| = 1$, sest kõigi X_i-de võimsuste summa on paaritu $(2k - 1)$.

Üldsust kitsendamata loeme, et selleks i-ks on k. Olgu $\{u\} = X_k$.

Olgu H saadud graafist G, kustutades seal

- kõik servad, mis γ värvib värviga k;
- serva tippude v ja u vahel.

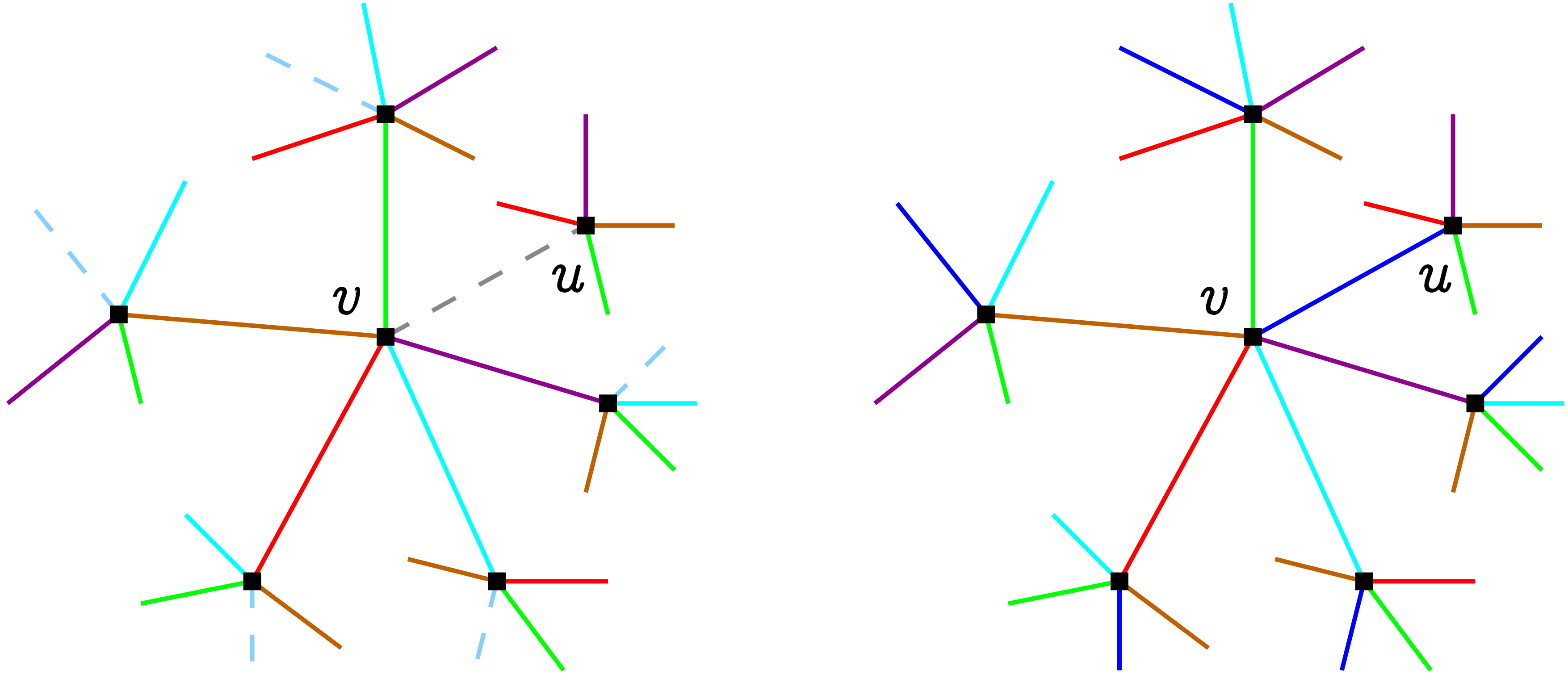
Kõik ärakustutatud servad moodustavad kooskõla graafis G.



Värvimisviis γ ilma värvita k on $H\backslash v$ servade värvimisviis $(k-1)$ värviga.

Tipu v ja iga tema naabertipu (graafis H) aste väheneb ühe võrra.

Graafile H ja tipule v saame rakendada induktsiooni eeldust. Seega on graafi H servad värvitavad $k-1$ värviga. Olgu γ' mingi H servade värvimisviis $k-1$ värviga.



Graafi G servade värvimisviisi k värviga saame, värvides täiendavalt kõik eelnevalt kustutatud servad värviga k. $\square$

Graafi G servade suurimat kordsust tähistame $\mu(G)$.

Teoreem. Olgu G silmusteta graaf. Siis $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

Kui $\gamma : E \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ on graafi $G = (V, E)$ servade mingi värvimisviis (mitte tingimata korrektne; MTK), siis tähistagu $\tilde{\gamma}(v)$, kus $v \in V$, värvide arvu, mis tipu v juures esinevad.

Graafi $G = (V, E)$ servade MTK värvimisviis k värviga γ on *optimaalne*, kui $\sum_{v \in V} \tilde{\gamma}(v)$ on maksimaalne võimalik (k värviga värvimisviiside seas).

Ilmselt on iga korrektne värvimisviis optimaalne.

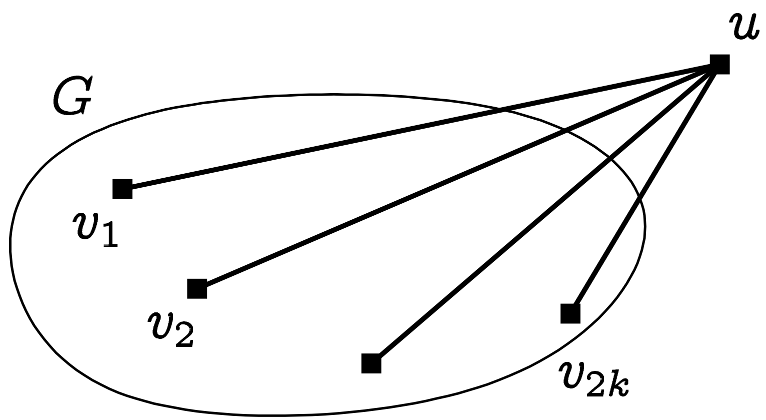
Lemma 1. Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf, mis ei ole paaritu-arvulise pikkusega tsükkel. Siis leidub tema servade selline MTK värvimisviis γ, nii et iga tipu $v \in V$ korral $\deg(v) \leq 1$ või $\tilde{\gamma}(v) = 2$.

Tõestus. Vaatame kõigepealt juhtu, kus G-s leidub Euleri ahel C.

Anname servadele värvid nii, et C-s esineksid servad vahelduvate värvidega.

Kui graafis on paaritu arv servi, siis alustame (ja lõpetame) C mõnes tipus, mille aste on ≥ 3 (s.t. ≥ 4).

Kui G-s ei leidu Euleri ahelat, siis olgu G' saadud G-st täiendava tipu u lisamise ja G iga paarituarvulise astmega tipu temaga ühendamise teel.

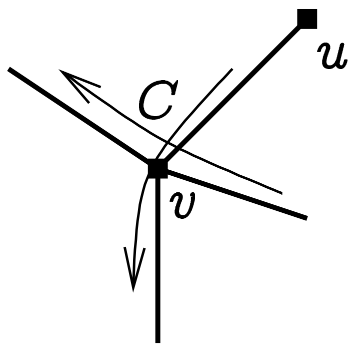


Tippe, mis u-ga ühendatakse, on paarisarv. G' on Euleri graaf.

Vaatame taas Euleri ahelat C ja värvime servad nii, et nad esineksid C-s vahelduvate värvidega. Alustame ja lõpetame C u-s.

Kui $v \in V$ on G-s paarisarvulise astmega, siis C siseneb temasse ja seejärel väljub temast, mõlemad servad kuuluvad E-sse.

Kui $v \in V$ on paarituarvulise astmega, mis on > 1, s.t. ≥ 3, siis on tema aste G'-s ≥ 4.



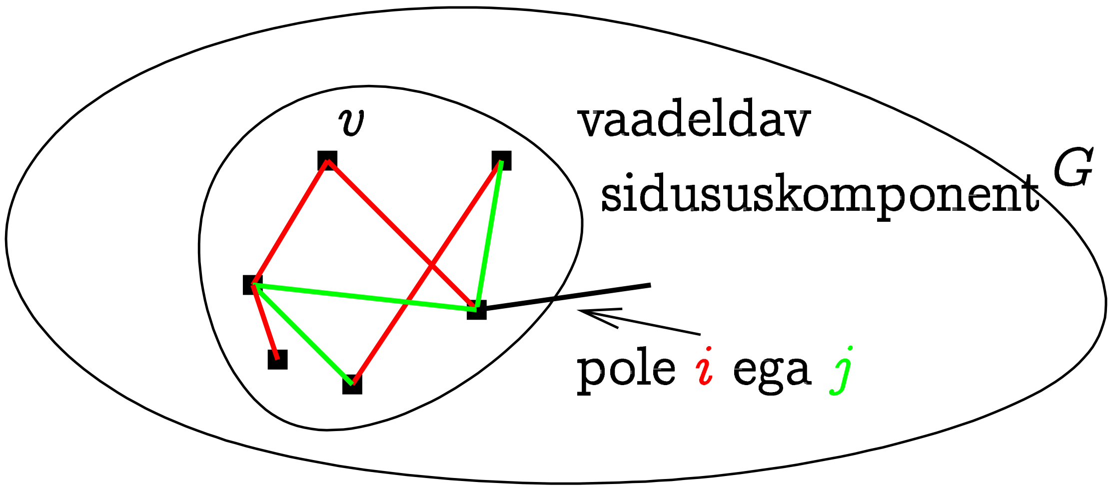
Siis C mingil korral siseneb v-sse G-st ja seejärel väljub v-st samuti G-sse. $\square$

Lemma 2. Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf, olgu γ tema MTK optimaalne värvimisviis k värviga. Olgu i ja j kaks värvi, olgu $v \in V$ selline, et

- v-ga on intsidentsed vähemalt kaks serva, mis on värvitud värviga i.
- v-ga pole intsidentne ükski j-ga värvitud serv.

Olgu $E' = \gamma^{-1}(\{i, j\})$. Siis graafi (V, E') sidususkomponent, mis sisaldab tippu v, on paarituarvulise pikkusega tsükkel.

Tõestus. Vastuväiteliselt. Vaatame seda (V, E') sidususkomponenti. Kui ta pole paarituarvulise pikkusega tsükkel, siis värvime ta eelmise lemma abil ümber. Siis $\tilde{\gamma}(v)$ suureneb ja muude tippude jaoks $\tilde{\gamma}(\cdot)$ ei vähene. Seega polnud γ optimaalne. $\square$



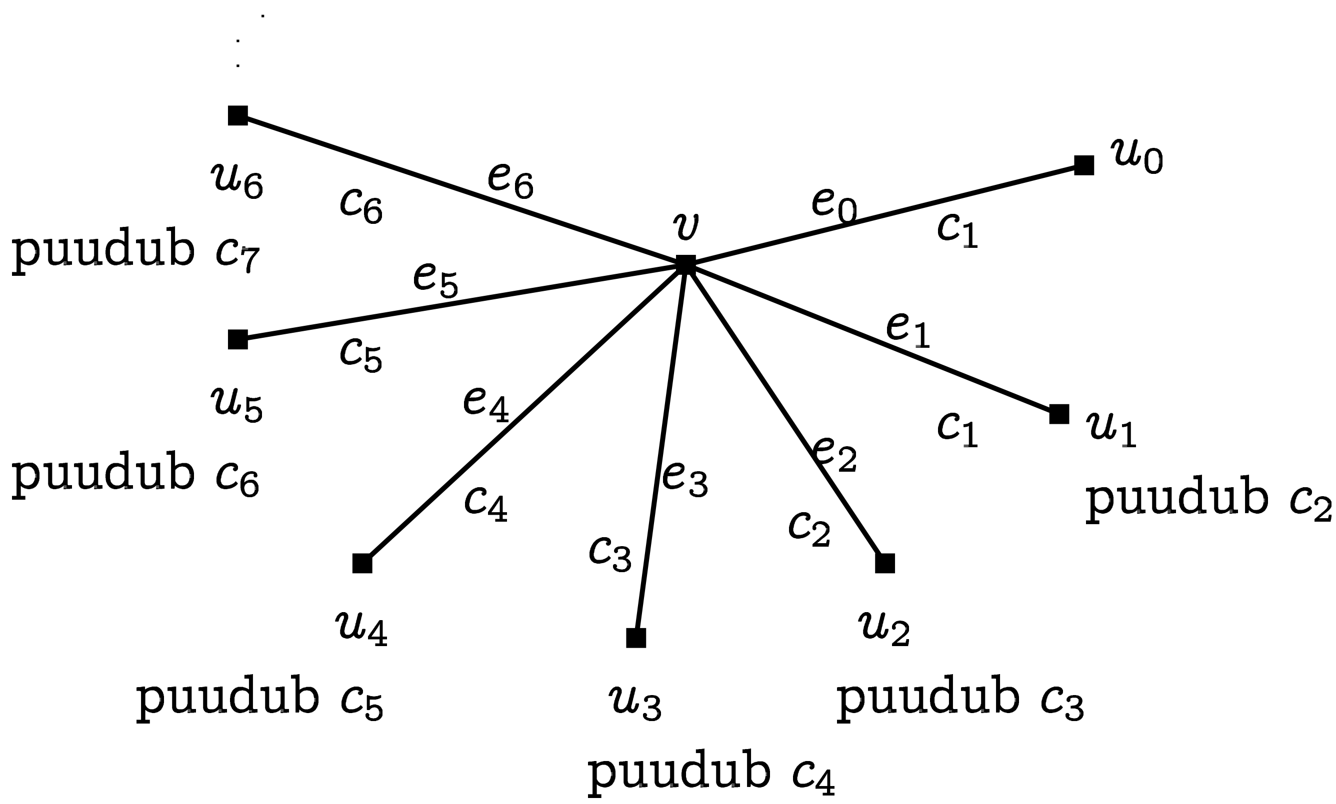
Lemma 3. Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf, olgu γ tema MTK optimaalne värvimisviis k värviga. Olgu $u, v \in V$ sellised, et nende vahel on kordne serv. S.t. leiduvad $e_1, e_2 \in E$ nii, et $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2) = \{u, v\}$. Siis $\gamma(e_1) \neq \gamma(e_2)$.

Tõestus. Värvime e_2 ümber mõne värviga, mis u juures ei esine. Siis $\tilde{\gamma}(v)$ ei vähene ja $\tilde{\gamma}(u)$ suureneb. Teiste tippude jaoks samuti $\tilde{\gamma}(\cdot)$ ei muutu. Järelikult polnud γ optimaalne.

Teoreemi tõestus. Olgu γ graafi $G = (V, E)$ mingi optimaalne värvimisviis $\Delta(G) + \mu(G)$ värviga, oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole korrektne.

Olgu siis $v \in V$ mõni tipp, mille juures värv c_1 esineb vähemalt kaks korda. Olgu e_0 ja e_1 v-ga intsidentsed servad, nii et $\gamma(e_0) = \gamma(e_1) = c_1$.

Olgu u_0 ja u_1 servade e_0 ja e_1 teised otsad. Vastavalt eelmisele lemmale siis $u_0 \neq u_1$.



Osad tipud võivad kokku langeda. Värvid (ja seega ka servad) on kõik erinevad.

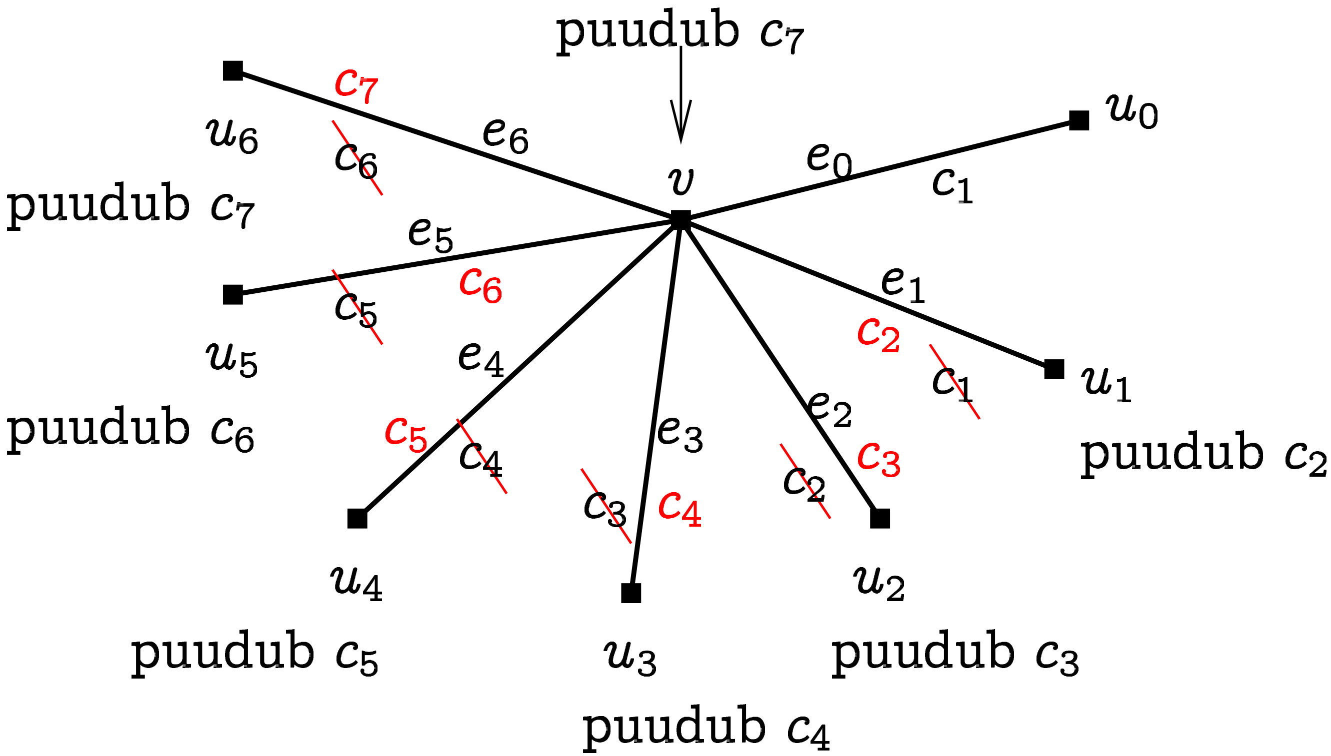
Värvid $c_2, c_3, \ldots$ ja tipud $u_2, u_3, \ldots$ valitakse järgnevalt:

- Värv c_{i+1} on mõni värvidest, mis tipu u_i juures ei esine. Kui tipp u_i on meil juba varem esinenud tippudena $u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}$, siis valime c_{i+1} erineva värvidest $c_{j_1+1}, \ldots, c_{j_k+1}$.
  - Me saame ta valida erineva värvidest $c_{j_1+1}, \ldots, c_{j_k+1}$, sest tipuni u_i jõuame me ülimalt $\mu(G)$ korda ja iga tipu juures ei esine vähemalt $\mu(G)$ värvi.
- u_{i+1} on mõni selline tipp, mis on ühendatud tipuga v servaga, mille värv on c_{i+1}.

Me lõpetame värvide c ja tippude u valiku järgmisel kahel juhul:

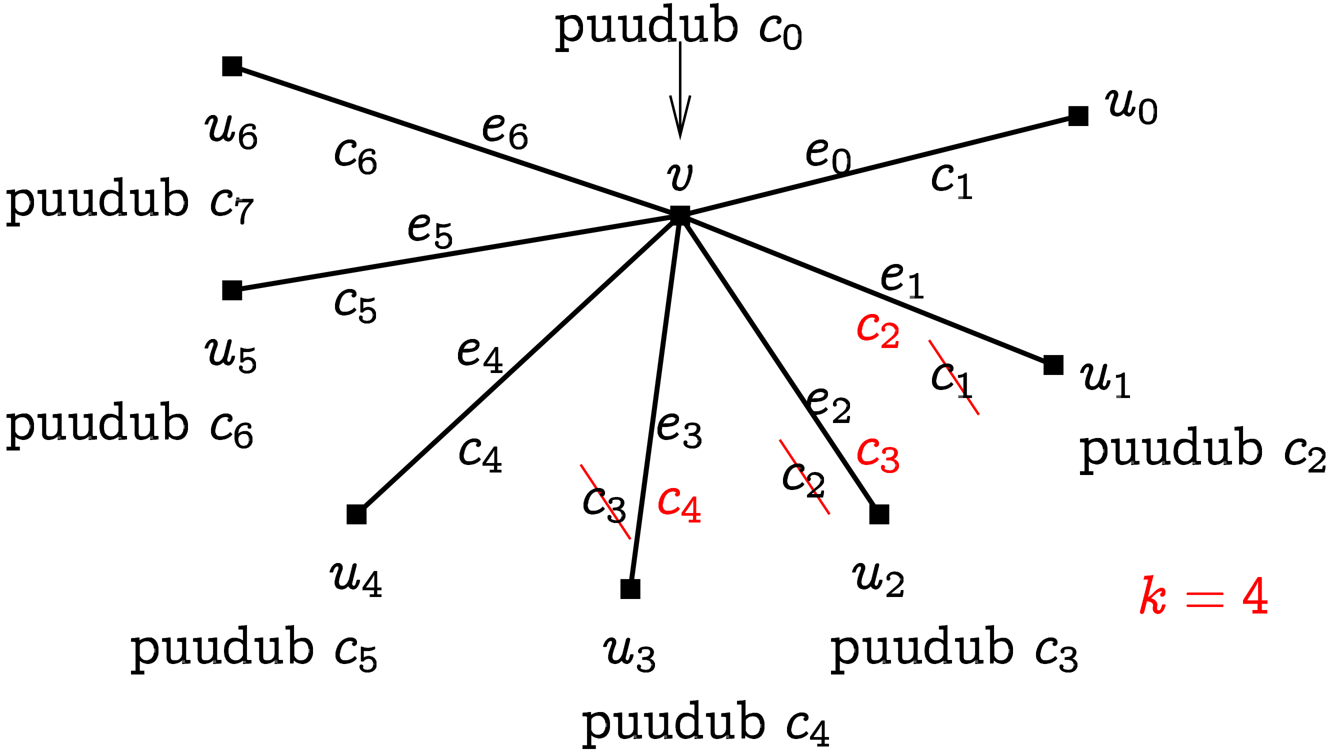
- Kui valitud c_{i+1} on võrdne mõne varemvalitud värviga c_k.
  - Siis $u_k \neq u_i$, sest $c_k = c_{i+1}$ esineb u_k juures ja ei esine u_i juures.
- Kui värv c_{i+1} ei esine v juures (siis ei saa tippu u_{i+1} valida).

Teisel juhul värvime servad $e_1, \ldots, e_i$ ümber. Serva e_j värviks võtame c_{j+1}. Siis $\tilde{\gamma}(v)$ suureneb ja $\tilde{\gamma}(u_i)$ ei vähene. Seega polnud γ optimaalne, vastuolu.



Olgu uus värvimisviis γ''.

Esimesel juhul värvime servad $e_1, \ldots, e_{k-1}$ ümber. Serva e_j värviks võtame c_{j+1}. Siis $\tilde{\gamma}(\cdot)$ ei vähene ühegi tipu jaoks. Olgu c_0 mõni värv, mis v juures ei esine.

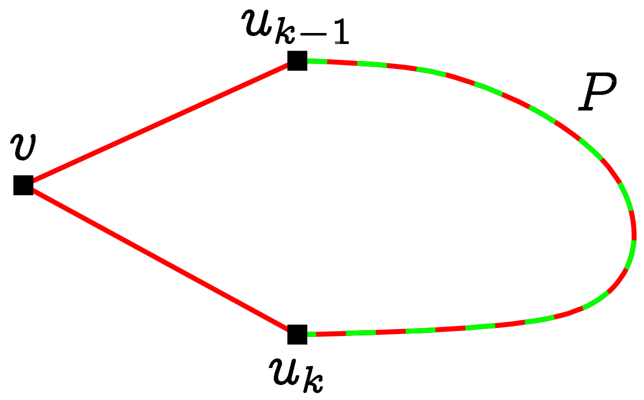


Saadud värvimisviisi nimetame γ'-ks. Ta on optimaalne.

Tähelepanek: $u_k \neq u_{k-1}$.

- Kui $k > 1$, siis värvimisviisis γ värv c_k ei esinenud u_{k-1} juures, kuid esines u_k juures.
- Kui $k = 1$, siis $u_0 \neq u_1$ vastavalt arutelule teoreemi tõestuse alguses.

Vaatame G alamgraafi $(V, {\gamma'}^{-1}(c_0, c_k))$.

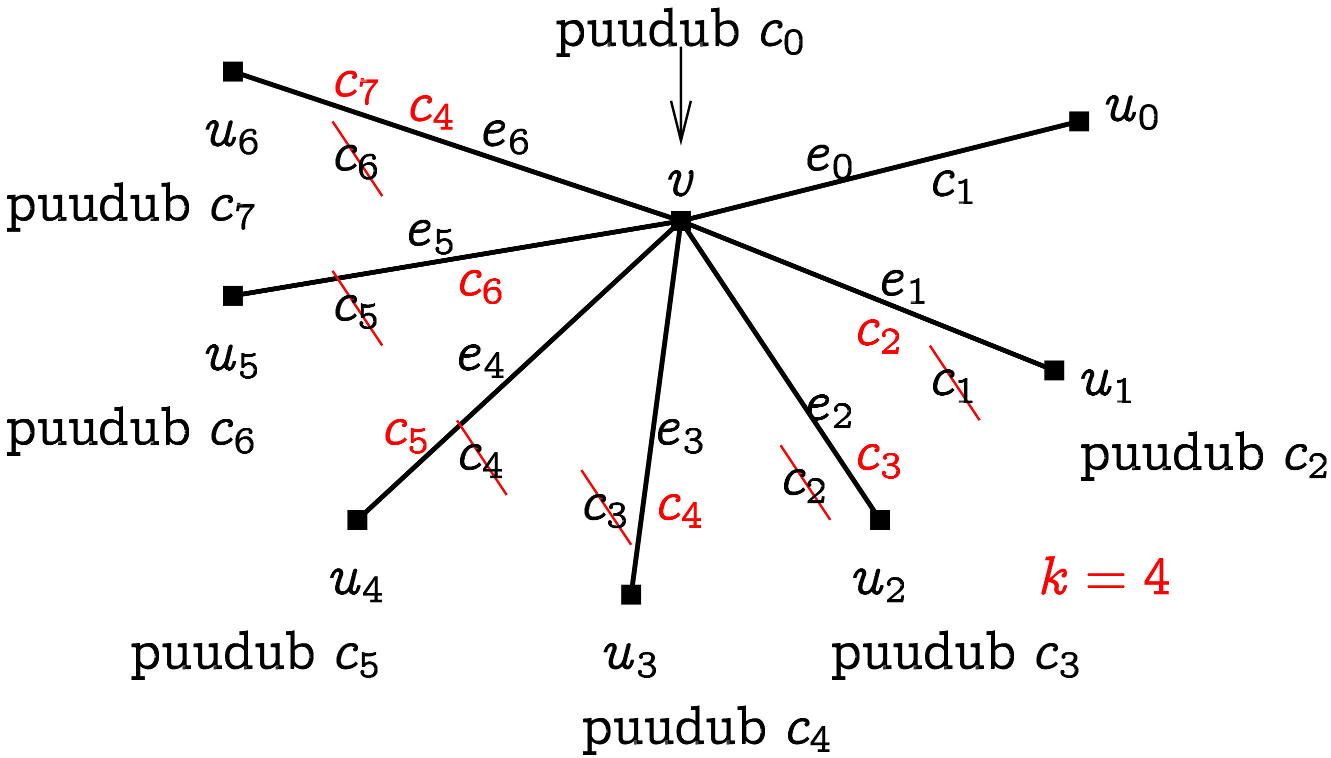


Vastavalt lemmale 2 on selle graafi v-d sisaldav sidususkomponent paarituarvulise pikkusega tsükkel.

S.t. leidub tee $P : u_{k-1} \rightsquigarrow u_k$, mis ei läbi v-d ja kasutab ainult servi värviga c_0 ja c_k.

Sama tee leidub ka γ järgi, sest γ' saamiseks muudeti ainult v-ga intsidentseid servi.

Vaatame ka värvimisviisi γ''.



γ'' on optimaalne. Tee P leidub ka γ'' järgi värvitud graafis.

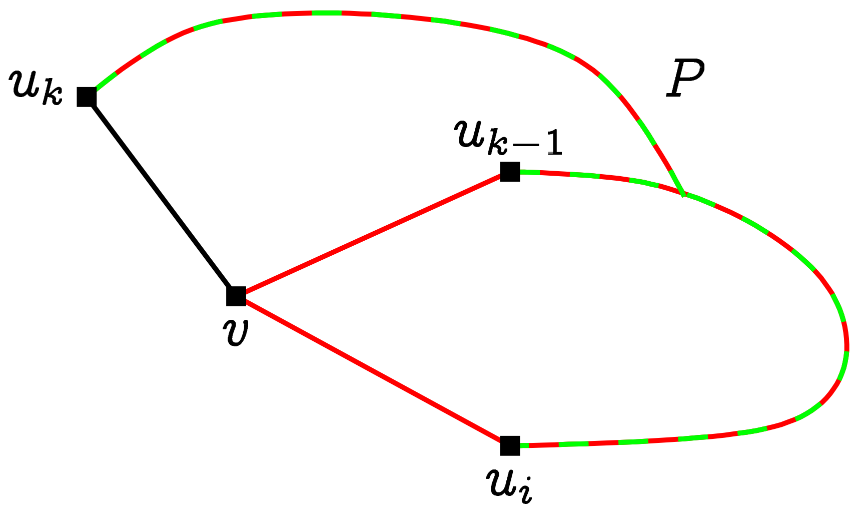
Tähelepanek: $u_{k-1} \neq u_i$.

- Kui $k = 1$, siis $c_k = c_{i+1}$ ei esine u_i juures, kuid $c_k = c_1$ esineb u_0 juures.
- Kui $k > 1$, siis: Meil on $c_k = c_{i+1}$. Kui u_{k-1} ja u_i oleks sama tipp, siis tähendanuks see, et me valisime sama tipu juures kaks korda sama värvi.
  - Ennist me spetsifitseerisime, et seda me ei tee.

Sellel slaidil vaatasime värvimisviisi γ.

Me oleme leidnud, et u_{k-1}, u_k ja u_i on kõik erinevad.

Vaatame G alamgraafi $(V, \gamma''^{-1}(c_0, c_k))$.



Taas peab v-d sisaldav sidususkomponent olema paaritu tsükkel. Kuid ka u_k kuulub sellesse sidususkomponenti, ent tema aste graafis $(V, \gamma''^{-1}(c_0, c_k))$ on 1. Vastuolu. $\square$