Euleri graafid

9. september 2003

Graaf G on paar (V, E), kus V on tippude hulk ja E on servade hulk. Lisaks sellele on antud *intsidentsusfunktsioon* $\mathcal{E}$, mis igale servale seab vastavusse tema otstippude hulga.

Ahel graafis G on jada

$$v_0 \overset{e_1}{—} v_1 \overset{e_2}{—} v_2 \overset{e_3}{—} v_3 \overset{e_4}{—} \dots v_{k-1} \overset{e_k}{—} v_k,$$

kus $v_0, \dots, v_k \in V$, $e_1, \dots, e_k \in E$ ning $\mathcal{E}(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Ahel on *kinnine*, kui esimene ja viimane tipp on sama.

Lihtahel on ahel, kus iga tipp esineb ülimalt ühe korra.

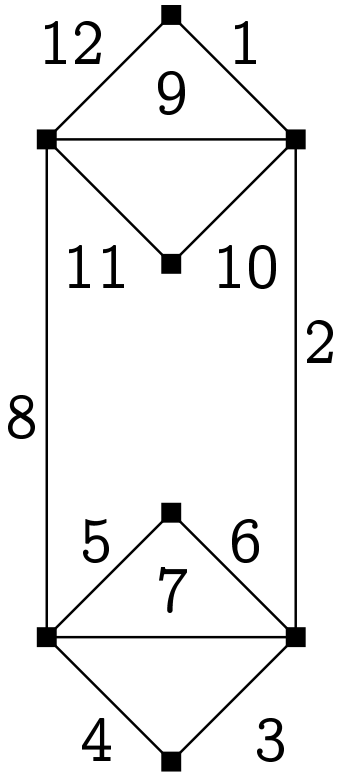
Tsükkel on kinnine lihtahel.

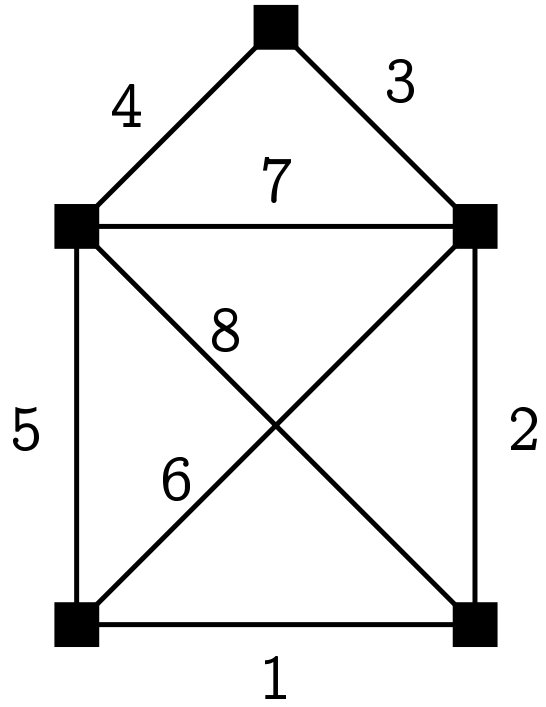
Euleri ahelaks graafis $G = (V, E)$ nimetatakse kinnist ahelat, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord.

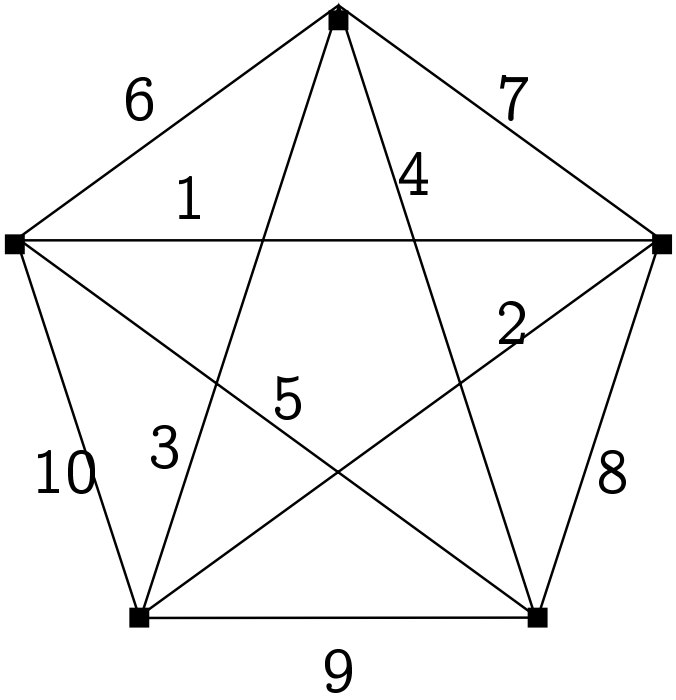
Euleri graafiks nimetatakse graafi, milles leidub Euleri ahel.

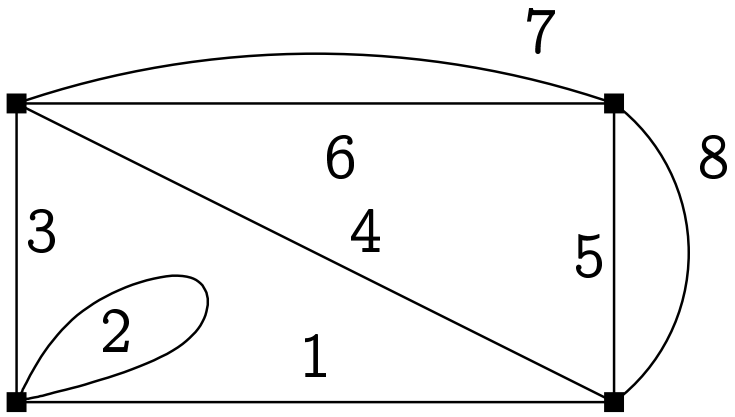
Graafi, milles leidub lahtine ahel, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord, nimetatakse *pool-Euleri graafiks*.

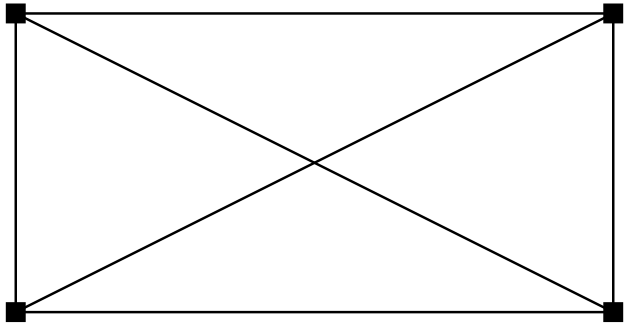
Levinud näidete klass: joonistada etteantud kujund pliiatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont mitu korda tõmbamata.


12
1
9
11
10
2
8
5
6
7
4
3

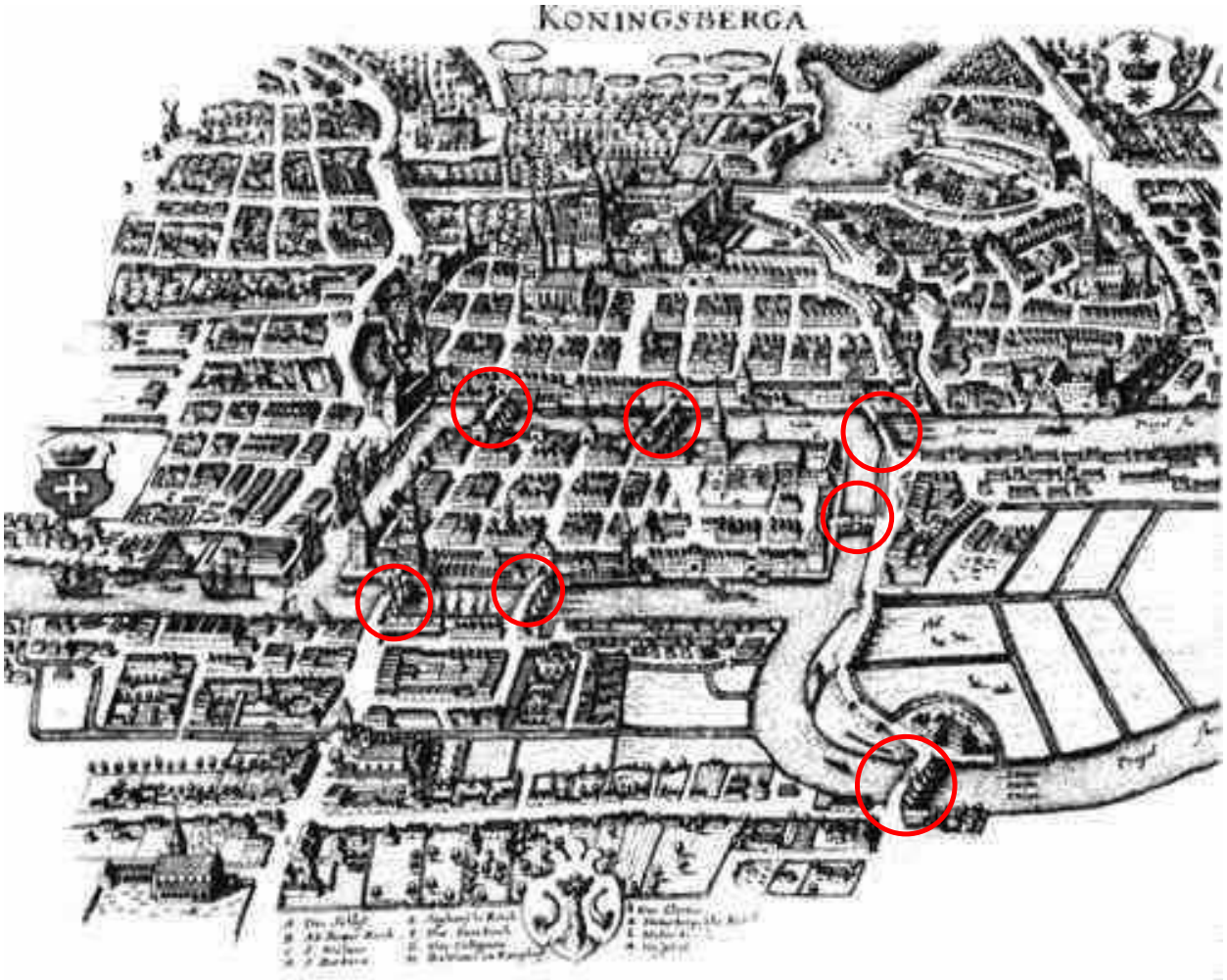

4
3
7
8
5
2
6
1

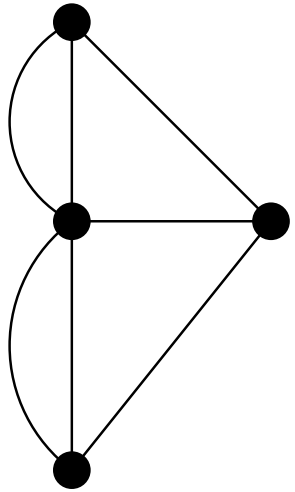

6
7
1
4
2
5
10
3
8
9


7
6
8
3
4
5
2
1



„Originaalülesanne“:





Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf. Järgmised kolm väidet on samaväärsed.

(i). G on Euleri graaf.

(ii). G kõigi tippude aste on paarisarv.

(iii). E esitub paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.

Tõestus (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu P graafi G mingi Euleri ahel ja olgu $v \in V$.

Ahel P siseneb tippu mingi arv kordi ning väljub temast sama arv kordi. Seega on ahelasse P kuuluvate tipuga v intsidentsete servade arv paarisarv.

P on Euleri ahel, seega esineb iga tipuga v intsidentne serv ahelas P täpselt ühel korral.

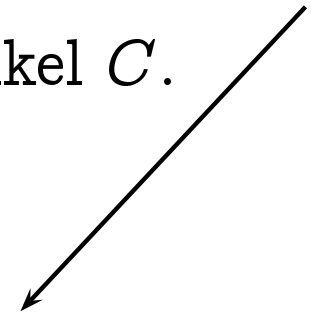
Tõestus (ii)$\Rightarrow$(iii). Induktsioon üle $|E|$.

Baas. $|E| = 0$. Siis esitub E nulli tüki ühendina, igaüks neist nullist on ....

Samm. $|E| > 0$. Siis on kõigi tippude aste nullist suurem, sest G on sidus.

Vastavalt eeldusele on kõigi tippude aste vähemalt kaks.

Vastavalt teoreemile eelmisest loengust leidub G-s mingi tsükkel C.



Teoreem. Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

Olgu G' saadud G-st, eemaldades sealt C-sse kuuluvad servad.

Graafis G' on vähem servi kui G-s ning kõigi tippude aste on endistviisi paarisarv.

Olgu $H_1, \ldots, H_k$ graafi G' sidususkomponendid. Induktsiooni eelduse järgi esitub neist igaühe servade hulk paarikaupa lõikumatute tsüklite ühendina.

Võttes nende esituste ühendi ja lisades sinna veel tsükli C, saame E esituse lõikumatute tsüklite ühendina.

Tõestus (iii)$\Rightarrow$(i). Olgu $E = C_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \cdots \dot\cup C_n$, kus $C_1, \ldots, C_n$ on tsüklid.

Üldsust kitsendamata eeldame, et tsüklil C_i, kus $i > 1$, on ühiseid tippe mõne tsükliga C_j, kus $j < i$.

Konstrueerime kinnised ahelad $P_1, \ldots, P_n$. Konstruktsioon tagab, et P_i läbib tsüklite $C_1, \ldots, C_i$ iga serva täpselt üks kord ning ei läbi ühtegi ülejäänud serva.

Ahelaks P_1 võtame tsükli C_1.

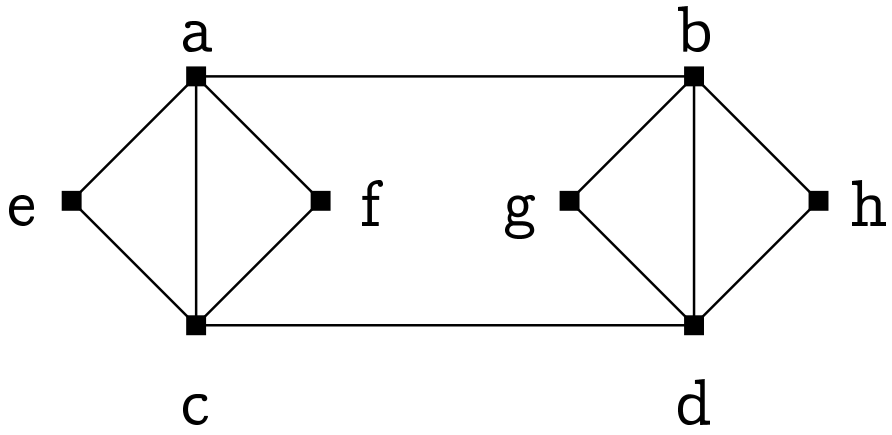
Ahela P_i saame ahelast P_{i-1} järgmisel viisil.

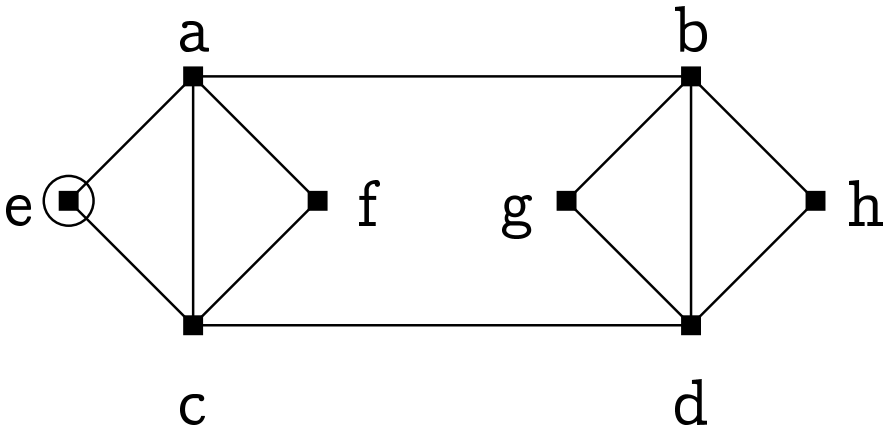
- Liigume ahelas P_{i-1} senikaua, kuni jõuame mingi tipuni v, mis esineb ka tsüklis C_i.
- Läbime tsükli C_i, alustades ja lõpetades tipus v.
- Läbime ülejäänud osa ahelast P_{i-1}.

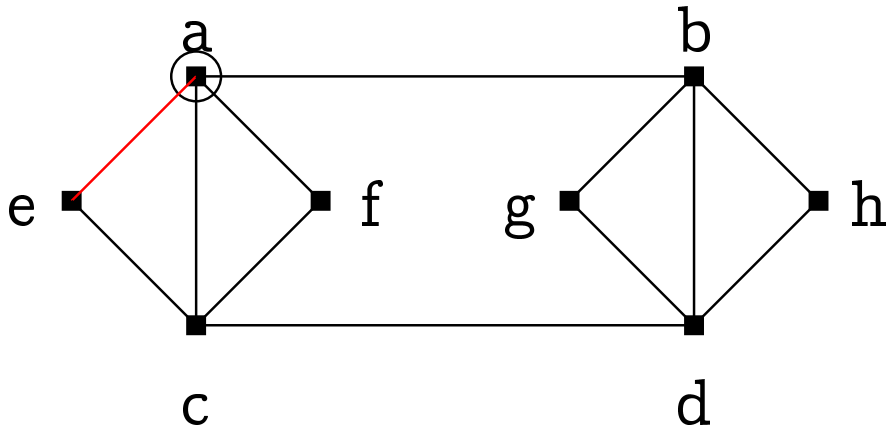
Ahel P_n on Euleri ahel graafis G. $\square$

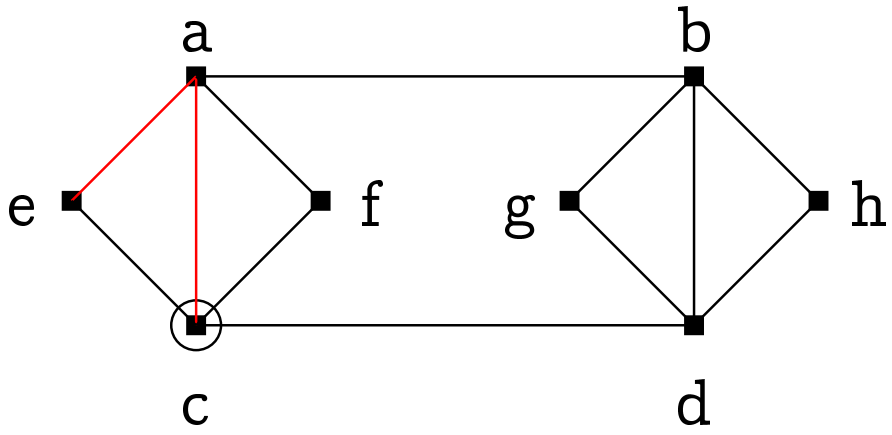
Tõestus annab algoritmi Euleri ahela leidmiseks graafis G:

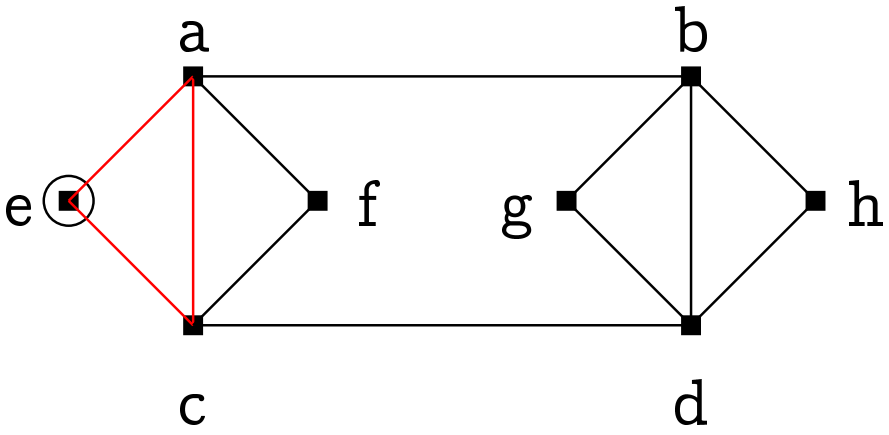
- Tükeldame G servad tsükliteks.
  - Leiame graafist G ühe tsükli, olgu see C.
    - Liigume G-s mööda servi, kuni jõuame tippu, kus oleme juba olnud.
  - Eemaldame C servad G-st.
  - Tükeldame G (ilma C-ta) sidususkomponentide servad tsükliteks.
  - Tagastame need tsüklid ja lisaks veel tsükli C.
- Paneme tsüklitest kokku Euleri ahela (vt. eelmine slaid).

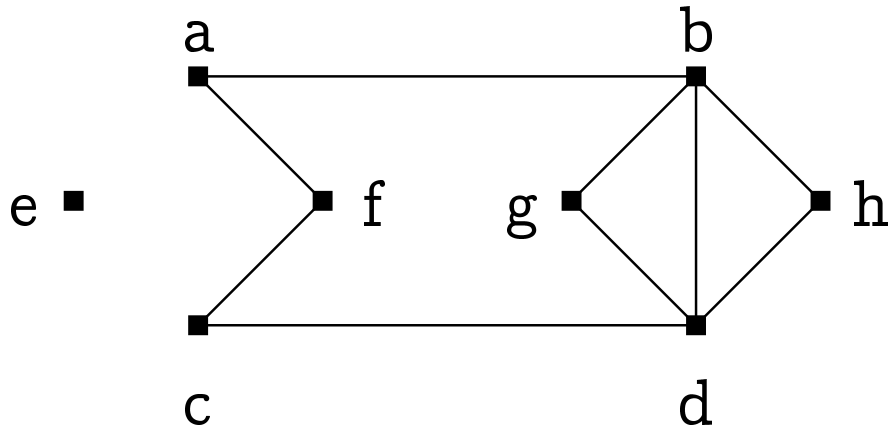

a
b
e
f
g
h
c
d

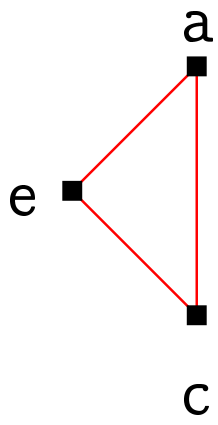

a
b
e
f
g
h
c
d

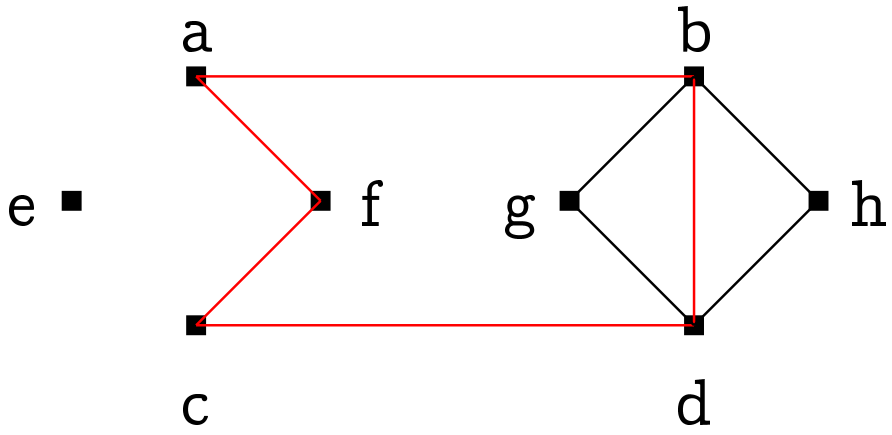

a
b
e
f
g
h
c
d

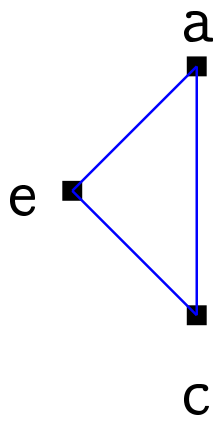

a
b
e
f
g
h
c
d

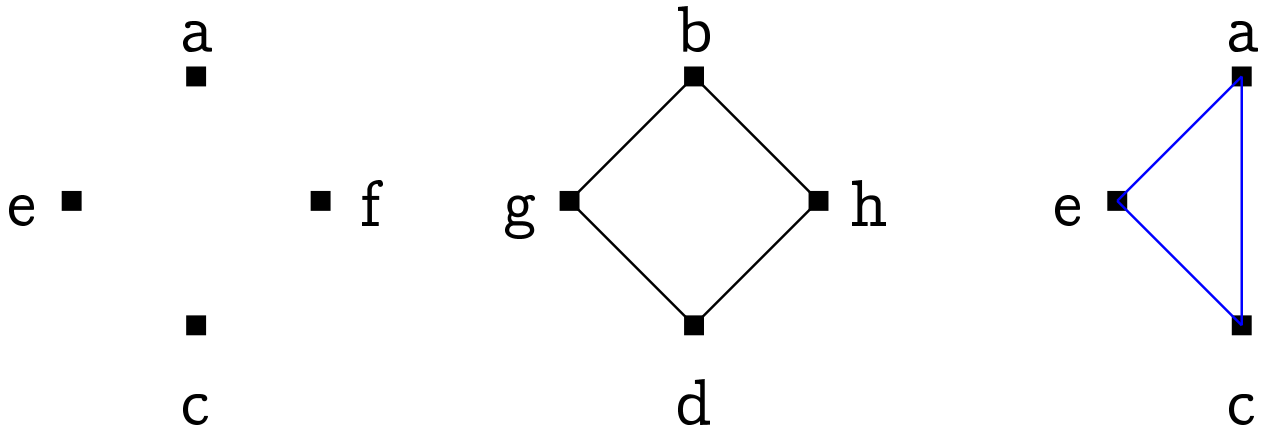

a
b
e
f
g
h
c
d


a
b
e
f
g
h
c
d


a
e
c

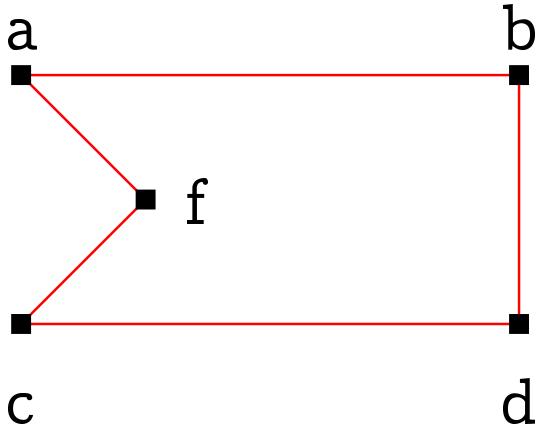

a
b
e
f
g
h
c
d

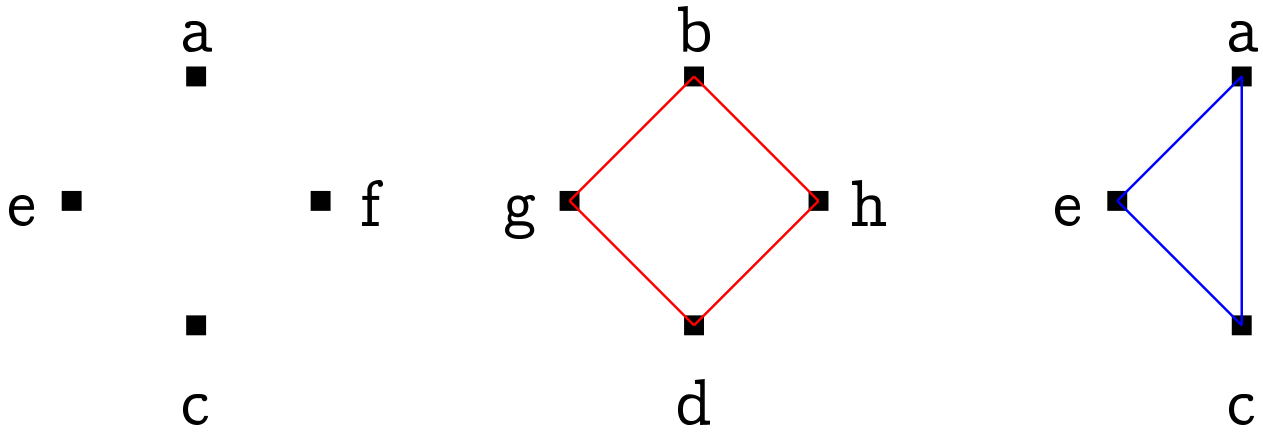

a
e
c


a
e
f
c

b
g
h
d

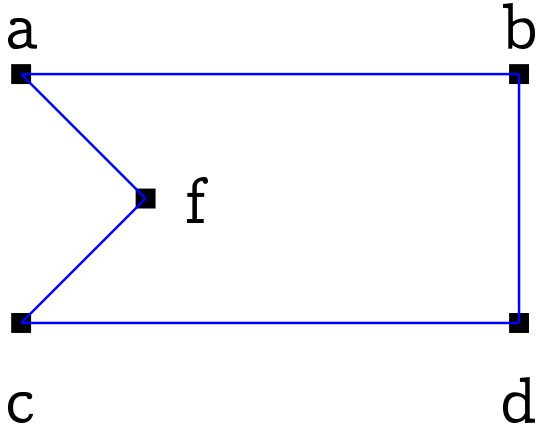
a
e
c

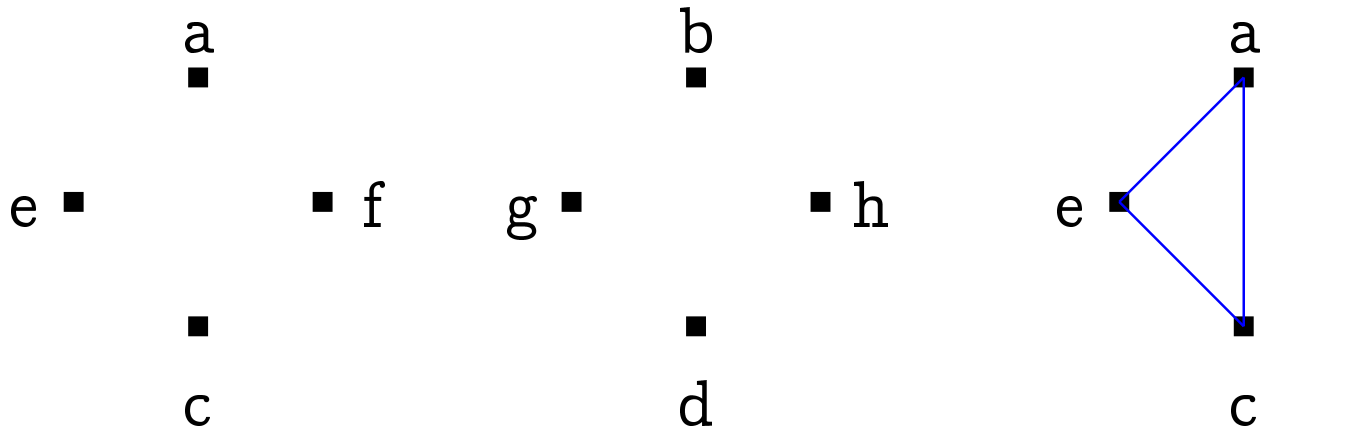

a
b
f
c
d


a
e
f
c

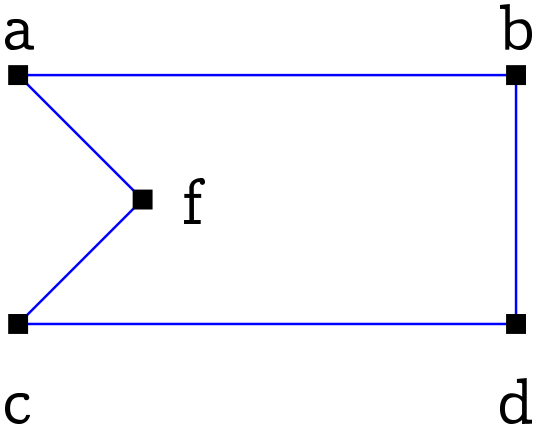
b
g
h
d

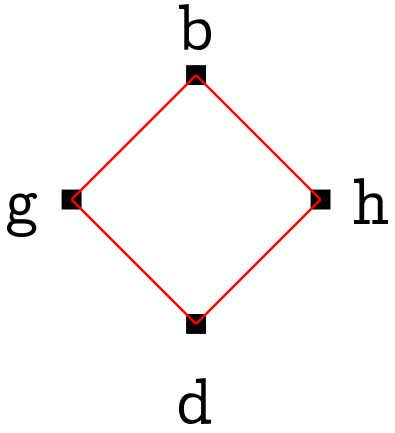
a
e
c

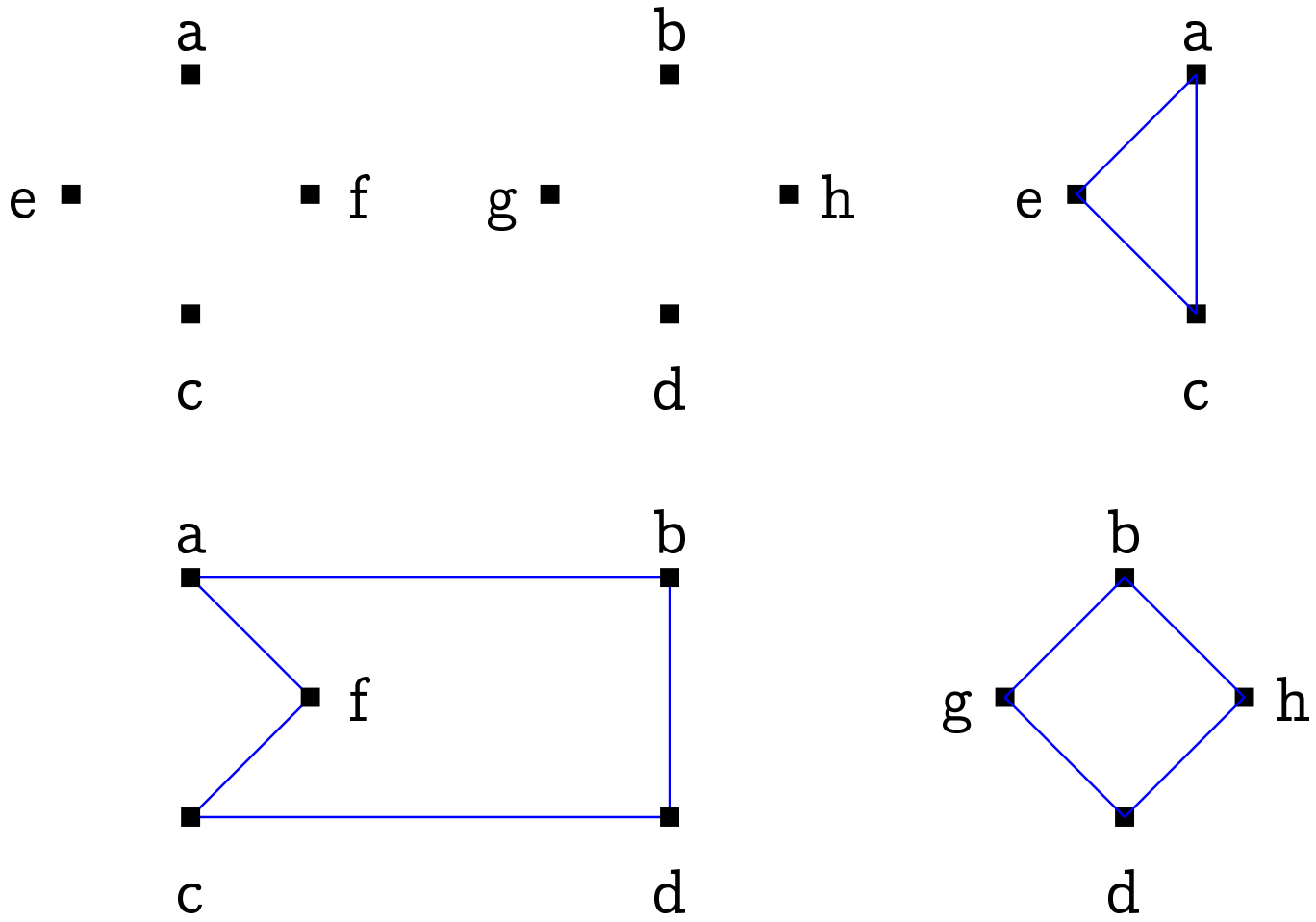

a
b
f
c
d

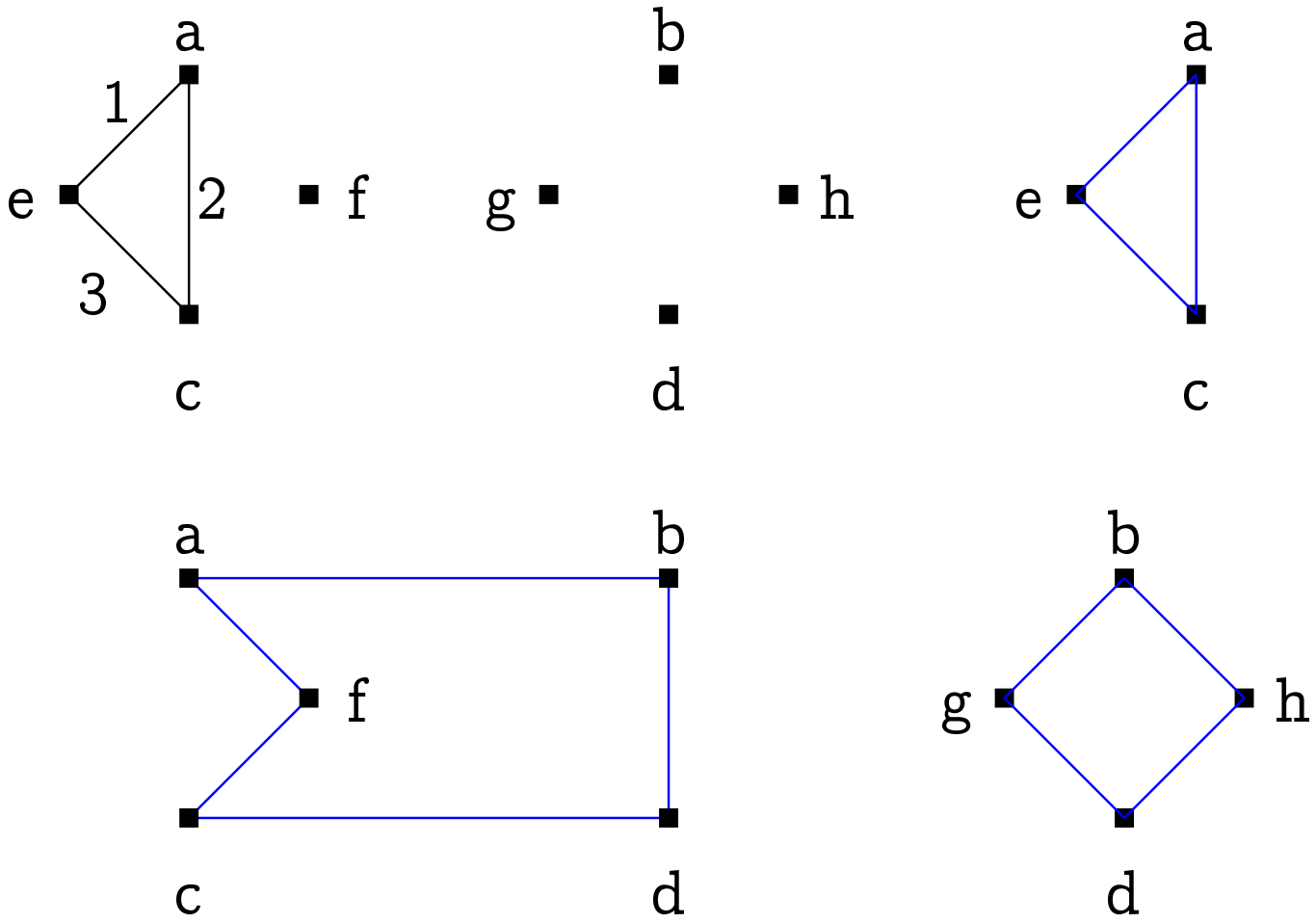

a
b
e
f
g
h
c
d

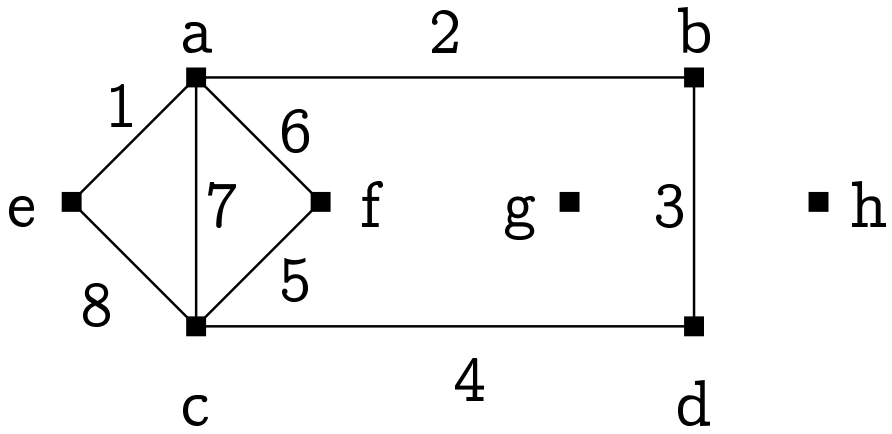
a
e
c

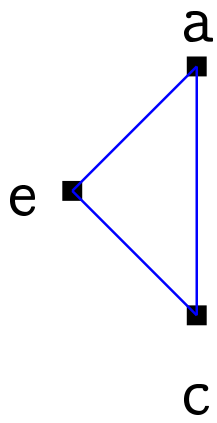

a
b
f
c
d

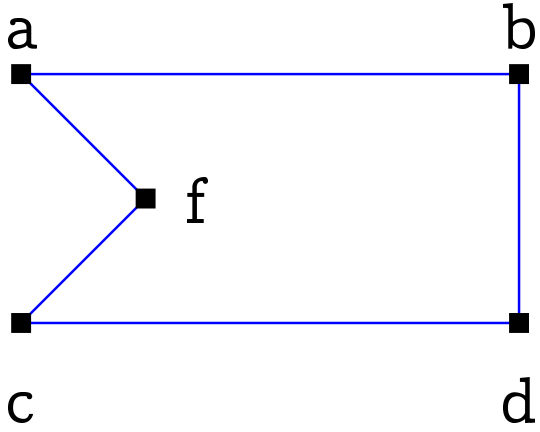

b
g
h
d

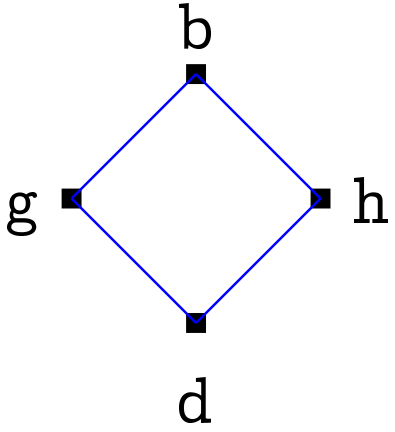

a
b
e
f
g
h
c
d
a
e
c
a
b
f
c
d
b
g
h
d

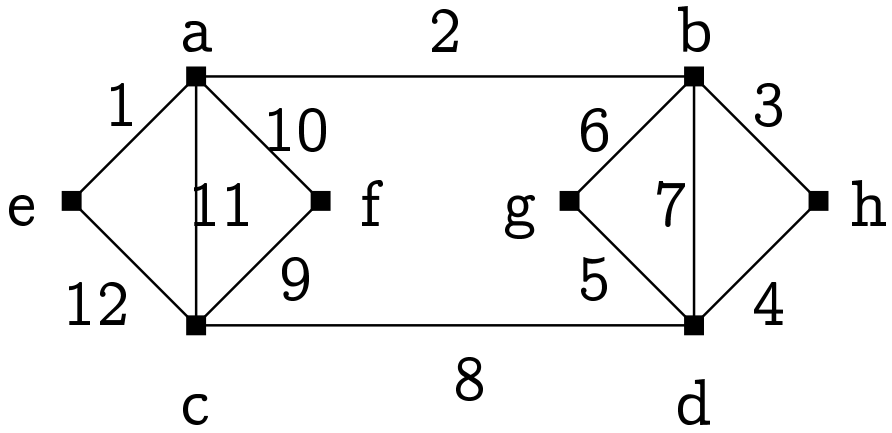

a
b
a
1
e
2
f
g
h
e
3
c
d
c
a
b
b
f
g
h
c
d
d

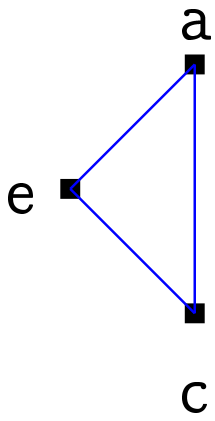

a
2
b
1
6
e
7
f
g
3
h
8
5
4
c
d

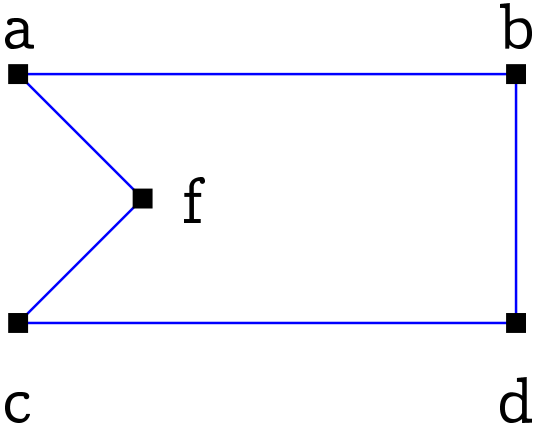

a
e
c

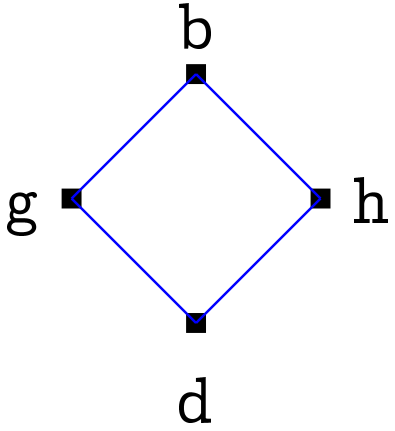

a
b
f
c
d


b
g
h
d


a
2
b
1
10
6
3
e
11
f
g
7
h
9
5
12
4
8
c
d


a
e
c


a
b
f
c
d


b
g
h
d

Järeldus. Sidus graaf G on pool-Euleri $\Leftrightarrow$ graafis G on täpselt kaks paarituarvulise astmega tippu.

Tõestus $\Rightarrow$. Olgu $x \overset{P}{\rightsquigarrow} y$ ahel graafis G, mis läbib G iga serva täpselt ühe korra.

Lisame G-le täiendava serva e, nii et $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$.

Saadud graaf on Euleri graaf ($x \overset{P}{\rightsquigarrow} y \overset{e}{—} x$ on Euleri ahel), seega on seal kõigi tippude aste paarisarvuline.

Esialgses graafis on x ja y paarituarvulise ning ülejäänud tipud paarisarvulise astmega.

Tõestus $\Leftarrow$. Olgu x ja y graafi G paarituarvulise astmega tipud.

Lisame G-le täiendava serva e, nii et $\mathcal{E}(e) = \{x, y\}$.

Saadud graafis on kõigi tippude aste paarisarvuline, seega leidub seal mingi Euleri ahel P.

Üldsust kitsendamata eeldame, et viimane serv ahelas P on e.

Ahel P ilma servata e on ahel, mis läbib graafi G iga serva täpselt ühe korra. $\square$

Tõestus annab algoritmi pool-Euleri ahela leidmiseks:

> Lisame graafi täiendava serva e ja leiame Euleri ahela.

Fleury algoritm Euleri ahela leidmiseks Euleri graafis $G = (V, E)$:

1. Ahela esimeseks tipuks vali mingi tipp $u \in V$. Olgu $i := 0$ ja $v_0 := u$.

2. Vali mingi tipuga v_i intsidentne serv e, lisa see koostatavasse ahelasse ning kustuta graafist G. Tipuks v_{i+1} võta e teine otstipp. Olgu $i := i + 1$.

   - Seejuures võta servaks e mõni sild ainult viimasel võimalusel.

3. Korda eelmist punkti, kuni kõik servad on kustutatud.

Teoreem. Fleury algoritm on korrektne (s.t. esitatud eeskiri on igal juhul täidetav ja tulemuseks on Euleri ahel).

Tõestus. Algoritm koostab tipust u alates mingi ahela P. Mingil hetkel jõuab ta mingisse tippu v_n, kust enam edasi ei saa, sest kõik v_n-ga intsidentsed servad on kustutatud. On ilmne (tippude astmete paarsused!), et $v_n = u$.

Meil tuleb näidata, et sel hetkel on kõik servad kustutatud.

Olgu G_i graaf, mis on graafist G järel peale i-ndat sammu. Siis $G_0 = G$ ja G_{i+1} sisaldab ühe serva vähem kui G_i. Olgu H_i graafi G_i see sidususkomponent, mis sisaldab tippu u.

Paneme tähele, et G_i kõikide tippude, v.a. u ja v_i astmed on paarisarvud. Kui $u = v_i$, siis on ka $\deg(u)$ paaris. Kui $u \neq v_i$, siis on $\deg(u)$ ja $\deg(v_i)$ paaritud.

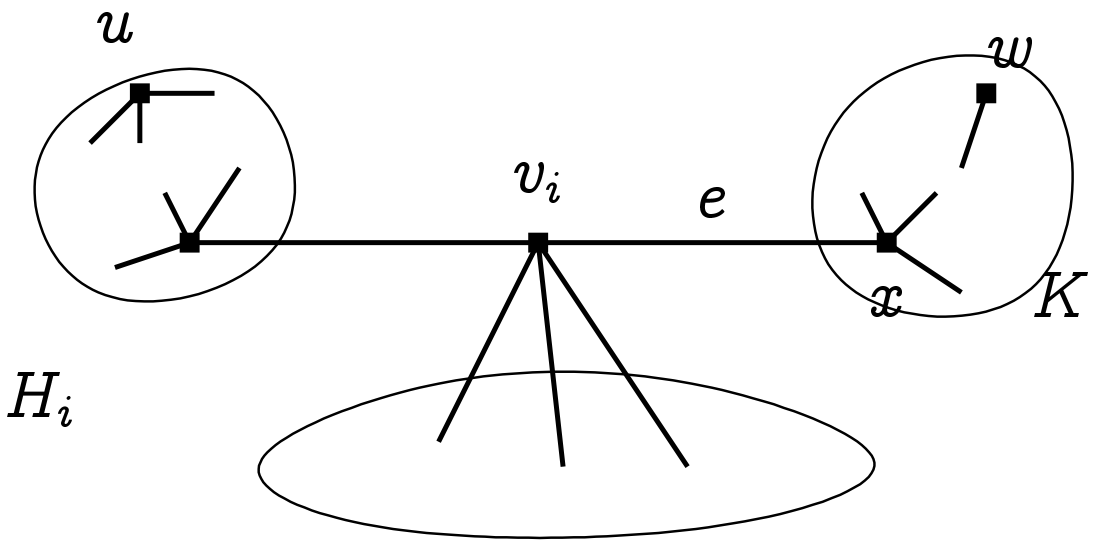
Me näitame, et G_i kõik ülejäänud sidususkomponendid on isoleeritud tipud.

Induktsioon üle i. Kui $i = 0$, siis $G_0 = G = H_0$, s.t. G_0-l pole teisi sidususkomponente peale H_0-i. Seega väide kehtib.

Kehtigu väide G_i jaoks. Vaatame kõigepealt juhtu $u \neq v_i$. Väite kehtivuseks G_{i+1} jaoks piisab, kui näitame, et v_i-ga on G_i-s intsidentne ülimalt üks sild.

- Tõepoolest, siis on G_{i+1} sidususkomponendid järgmised:
  - Kui kustutati serv, mis pole sild, siis sidususkomponendid ei muutu.
  - Kui kustutati sild, siis see oli viimane serv, mis oli v_i-ga intsidentne. Komponent H_i lagunes graafis G_{i+1} kaheks komponendiks — $H_{i+1} = H_i \backslash v$ ja v. Teine neist on isoleeritud tipp, esimene sisaldab tippu u.

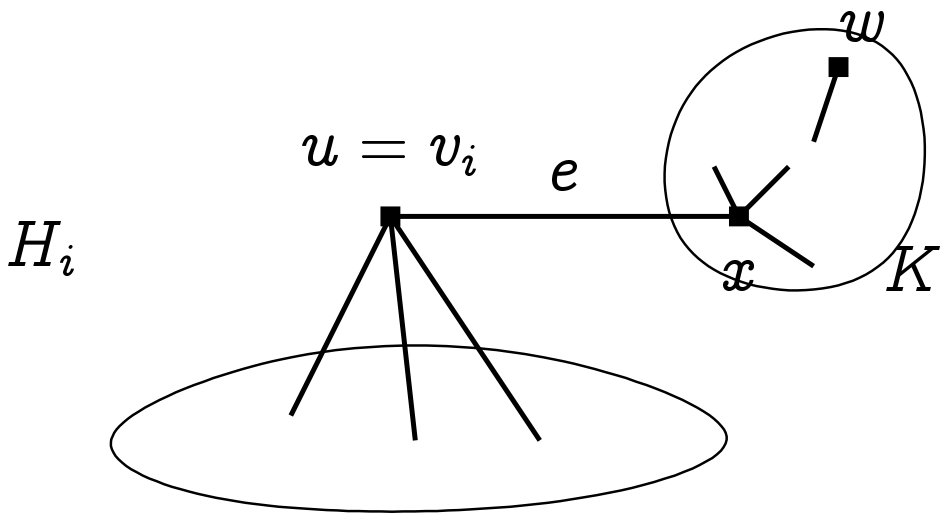
Kui v_i-ga oleks intsidentne vähemalt kaks silda, siis:



- Leidub v_i-ga intsidentne serv e, nii et graafi $H_i - e$ tippu v_i mittesisaldav sidususkomponent K ei sisalda ka tippu u.
- $\deg_{H_i}(x)$ on paaris. Seega $\deg_K(x)$ on paaritu.
- K-s peab leiduma veel mõni tipp w nii, et $\deg_K(w)$ on paaritu. Kuid $\deg_K(w) = \deg_{H_i}(w)$, mis pidi olema paaris.

Kui $u = v_i$, siis piisab, kui näitame, et u-ga pole ükski sild intsidentne, s.t. G_i-l ja G_{i+1}-l on samad sidususkomponendid.

Kui oleks, siis



leiduks taas tipp w, mille aste peaks paaritu olema. □