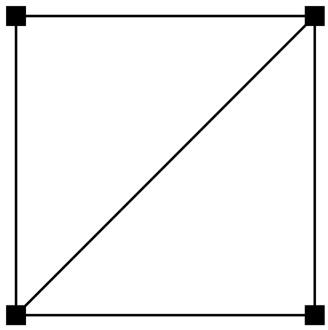
Hamiltoni graafid

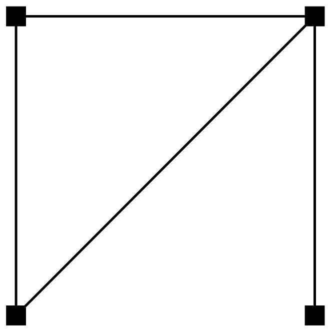
16. september 2003

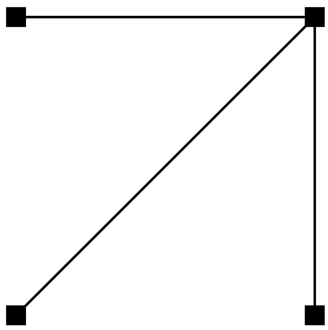
- *Hamiltoni tsükliks* graafis G nimetatakse tsüklit, mis läbib selle graafi kõik tipud täpselt ühel korral.
- *Hamiltoni ahelaks* graafis G nimetatakse lahtist lihtahelat, mis läbib selle graafi kõik tipud täpselt ühel korral.
- Graafi, kus leidub Hamiltoni tsükkel, nimetatakse *Hamiltoni graafiks*.
- Graafi, kus ei leidu Hamiltoni tsüklit, aga leidub Hamiltoni ahel, nimetatakse *pool-Hamiltoni graafiks*.

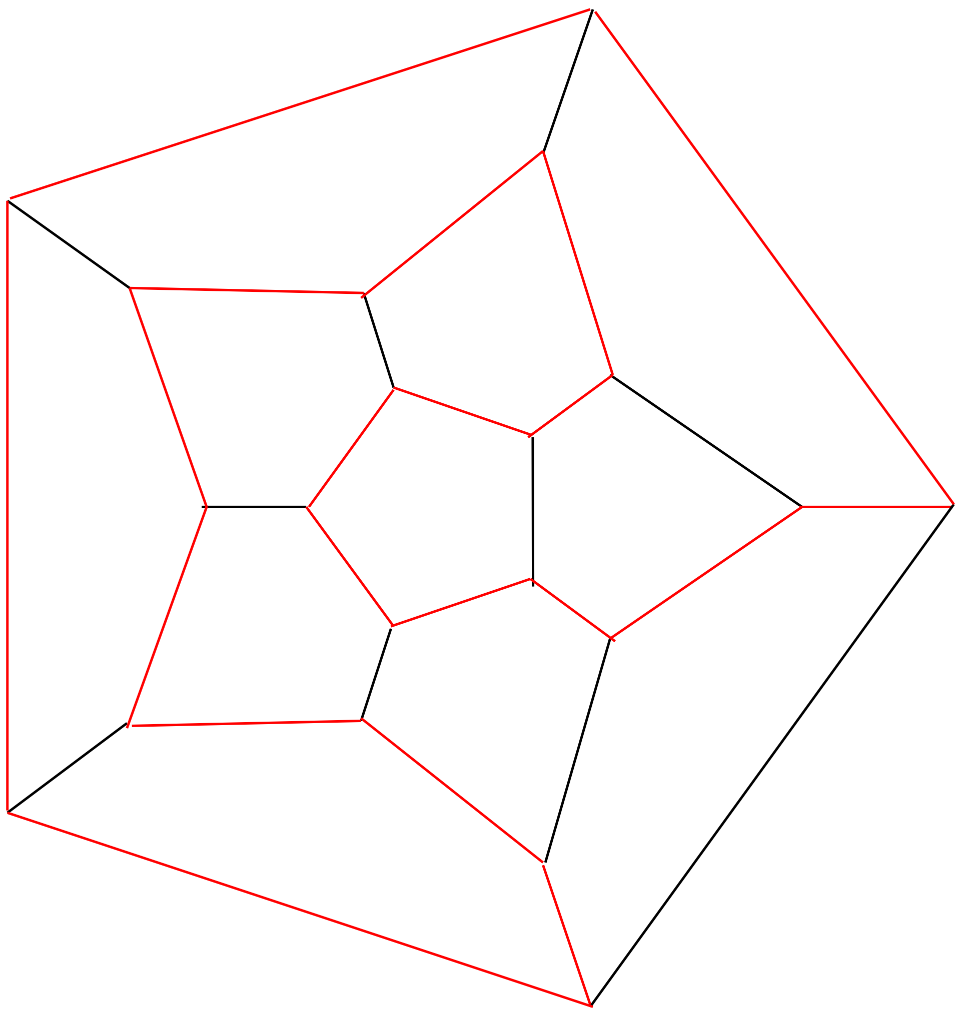
☹ Ei ole teada (mittetriviaalseid) tingimusi, mis oleksid tarvilikud ja piisavad graafis Hamiltoni tsükli või ahela leidumiseks.

- Käesolevas loengus vaatame ainult lihtgraafe. („graaf“ $\equiv$ lihtgraaf)









Teoreem (Ore, 1960). Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, kus $|V| = n \geq 3$. Kui iga kahe tipu $u, w \in V$ jaoks kehtib implikatsioon

$$(u, w) \notin E \implies \deg(u) + \deg(w) \geq n,$$

siis leidub graafis G Hamiltoni tsükkel.

Järeldus (Dirac, 1952). Kui $G = (V, E)$ on n-tipuline lihtgraaf, kus iga tipu $v \in V$ jaoks kehtib $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, siis on G Hamiltoni graaf.

Järelduse tõestus. Iga kahe tipu $u, w \in V$ jaoks kehtib $\deg(u) + \deg(w) \geq n$ (ükskõik, kas nad on naabrid või ei), seega järeldub teoreemist, et G on Hamiltoni graaf.

Teoreemi tõestus. Kui $n = 3$, siis ainus graaf, kus teoreemi eeldus kehtib, on K_3. Seal leidub Hamiltoni tsükkel.

Olgu $n \geq 4$. Kehtigu teoreemi eeldus, ärgu kehtigu väide.

Kui me graafile servi lisame, siis jääb eeldus kehtima. Lisame G-le servi senikaua, kuni jõuame graafini G', mis ise ei ole Hamiltoni graaf, aga millele ükskõik millise serva lisamisel saaksime juba Hamiltoni graafi.

Olgu $e = (u, w) \in V \times V$ mingi serv, mida G'-s pole. Graafis $G' \cup \{e\}$ leidub Hamiltoni tsükkel

$$u = v_0 \text{ --- } v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } v_{n-1} = w \overset{e}{\text{ --- }} u \quad .$$

Graafis G' leidub Hamiltoni ahel

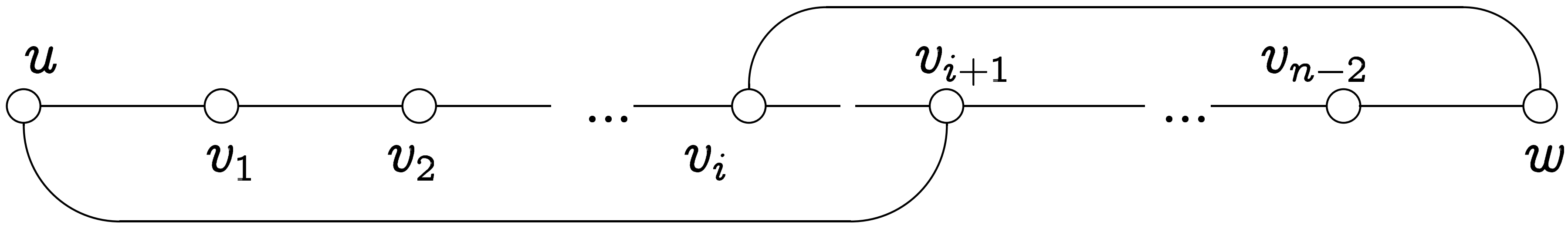
$$P : u = v_0 \text{ --- } v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } v_{n-1} = w \quad .$$

Selles ahelas on $n - 1$ serva.

Olgu

- E_u kõigi servade (v_i, v_{i+1}) hulk, kus $(u, v_{i+1}) \in E$.
- E_w kõigi servade (v_i, v_{i+1}) hulk, kus $(v_i, w) \in E$.

Teoreemi eelduse järgi $|E_u| + |E_w| \geq n$. Seega leidub serv (v_i, v_{i+1}), mis kuulub ühisossa $E_u \cap E_w$. Seejuures $i \neq 0$ ja $i \neq n-2$, sest $(u, w) \notin E$.



Leidsime Hamiltoni tsükli graafis G'. $\square$

Teoreem (Bondy ja Chvátal, 1976). Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning olgu $u, v \in V$ kaks mitte-naabertippu, nii et $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$. Sel juhul on G Hamiltoni graaf parajasti siis, kui $G \cup \{(u, v)\}$ on Hamiltoni graaf.

Tõestus. Suund „G Hamiltoni $\Rightarrow G \cup \{(u, v)\}$ Hamiltoni“ on ilmne. Teistpidi tõestuse me andsime Ore teoreemi tõestades. $\square$

Graaf $G = (V, E)$ on *Ore-kinnine*, kui iga kahe erineva tipu $u, v \in V$ jaoks kehtib

$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V| \implies (u, v) \in E \ .$$

Graafi $G = (V, E)$ *Ore sulundiks* $\mathcal{O}(G)$ nimetatakse graafi $G' = (V, E')$, kus

- G' on Ore-kinnine;
- $E \subseteq E'$;
- E' on vähim selline hulk, mis kahte eelmist tingimust rahuldab.

Lemma. Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ Ore-kinnised graafid. Siis $G = (V, E_1 \cap E_2)$ on samuti Ore-kinnine.

Tõestus. Olgu $u, v \in V$ ja $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq |V|$. Siis ka

$$\deg_{G_1}(u) + \deg_{G_1}(v) \geq |V| \text{ ja } \deg_{G_2}(u) + \deg_{G_2}(v) \geq |V|,$$

sest $\deg_{G_i}(u) \geq \deg_G(u)$ ja $\deg_{G_i}(v) \geq \deg_G(v)$.

Graafide G_1 ja G_2 Ore-kinnisusest saame $(u, v) \in E_1$ ja $(u, v) \in E_2$, millest järeldub $(u, v) \in E_1 \cap E_2$. $\square$

Lemmast järeldub, et igal graafil leidub Ore sulund.

Algoritm (Ore sulundi leidmiseks). Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf.

1. Leia $u, v \in V$, nii et $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ ja $(u, v) \notin V$. Kui selliseid ei leidu, siis väljasta G ja lõpeta töö.
2. Lisa serv (u, v) hulka E ja mine punkti 1.

Lause. Algoritmi töötulemus ei sõltu servade u, v valikust punktis 1.

Tõestus. Oletame, et algoritmi graafil $G = (V, E)$ jooksutades on võimalik saada kaks erinevat lõpptulemust $G_1 = (V, E \dot{\cup} E_1)$ ja $G_2 = (V, E \dot{\cup} E_2)$, kus $E_1 \neq E_2$. Üldsust kitsendamata oletame, et $E_1 \backslash E_2 \neq \emptyset$.

Hulga $E_1 \backslash E_2$ elemendid lisatakse algoritmi töötades graafi G_1 mingis järjekorras. Olgu serv (u, v) selles järjekorras esimene. Olgu $E_1' \subseteq E_1$ kõigi nende servade hulk, mis lisati enne serva (u, v) lisamist.

Meil on $E_1' \subseteq E_2$. Seega on graafis G_2 tingimus $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ rahuldatud. Saame vastuolu eeldusega $(u, v) \notin E_2$. $\square$

Teoreem. Esitatud algoritm leiab graafi G Ore sulundi.

Tõestus. See järeldub järgmistest neljast väitest:

1. Algoritmi väljundgraafi servade hulk on algoritmi sisendgraafi servade hulga ülemhulk.

2. Algoritm on monotoonne. S.t. kui $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$, kus $E_1 \subseteq E_2$, siis algoritm teeb neist mingid graafid $G'_1 = (V, E'_1)$ ja $G'_2 = (V, E'_2)$, kus $E'_1 \subseteq E'_2$. Selle väite tõestus on analoogiline eelmise lause tõestusega.

3. Algoritmi väljastatud graaf on Ore-kinnine.

4. Kui algoritmi sisendiks on Ore-kinnine graaf, siis väljastab algoritm sellesama graafi.

$\square$

Järeldus. Graafi on Hamiltoni parajasti siis, kui tema Ore sulund on Hamiltoni.

Tõestus. Järeldub sulundi leidmise algoritmi kujust ning Bondy ja Chvátali teoreemist. $\square$

Järeldus. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, kus $|V| = n \geq 3$. Kui $\mathcal{O}(G) = K_n$, siis G on Hamiltoni graaf.

Tõestus. Järeldub eelmisest järeldusest ning sellest, et K_n on Hamiltoni graaf. $\square$

Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ n-tipuline mitte-Hamiltoni graaf. Siis leidub arv $k < \frac{n}{2}$, nii et graafis G on k tippu astmega ülimalt k ning $n-k$ tippu astmega ülimalt $n-k-1$.

Tõestus. Olgu $\mathcal{O}(G) = (V, E')$. Kuna $\mathcal{O}(G) \neq K_n$, siis leiduvad tipud u ja w nii, et $(u, w) \notin E'$. Valime need u ja w nii, et summa $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w)$ oleks maksimaalne.

Meil on $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leq n-1$, muidu oleks $(u, w) \in E'$ (vastavalt Ore sulundi definitsioonile). Olgu

$$U = \{u' \mid u' \neq u, (u, u') \notin E'\}$$
$$W = \{w' \mid w' \neq w, (w, w') \notin E'\} \ .$$

Üldsust kitsendamata eeldame, et $\deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w)$. Olgu $k = \deg_{E'}(u)$.

1. $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leq n - 1$.
2. $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w)$ on maksimaalne võimalik.
3. $k = \deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w)$.
4. 1. ja 3. annavad $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.
5. 2. annab $\deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u)$ iga $w' \in W$ jaoks. Samuti $\deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w)$ iga $u' \in U$ jaoks.
6. $|U| = n - 1 - \deg_{E'}(u)$ ja $|W| = n - 1 - \deg_{E'}(w)$. Selle annab lihtne loendamine.
7. 1. ja 6. annavad $|W| \geq k$.
8. 5. annab $\deg_{E}(w') \leq \deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u) = k$ iga $w' \in W$ jaoks.

Oleme leidnud k tippu astmega $\leq k$.

1. $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leq n - 1$.
4. $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$.
5. $\deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w)$ iga $u' \in U$ jaoks.
6. $|U| = n - 1 - \deg_{E'}(u)$.
9. 6. annab $|U| = n - k - 1$. Seega $|U \cup \{u\}| = n - k$.
10. Iga $u' \in U$ jaoks annavad 5. ja 1., et

$$\deg_E(u') \leq \deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w) \leq n - 1 - k \quad .$$

11. 4. annab $\deg_E(u) \leq \deg_{E'}(u) = k \leq \frac{n-1}{2} \leq n - 1 - k$.

Oleme leidnud $n - k$ tippu astmega $\leq n - k - 1$.

Järeldus. Olgu $G = (V, E)$ n-tipuline graaf, nii et iga $k < \frac{n}{2}$ korral on graafis vähem kui k tippu astmega ülimalt k või vähem kui $n - k$ tippu astmega ülimalt $n - k - 1$. Siis on G Hamiltoni graaf.

Tõestus. Eelmisest teoreemist. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$. $\square$

Sama asi valentsijadade keeles:

Järeldus. Olgu $G = (V, E)$ graaf valentsijadaga $(a_1, \ldots, a_n)$. Kui iga $k < \frac{n}{2}$ korral kehtib $(a_k \leq k) \Rightarrow (a_{n-k} \geq n - k)$, siis G on Hamiltoni graaf.

Nimetame valentsijada $(a_1, \ldots, a_n)$ *hamiltoniliseks*, kui iga graaf G valentsijadaga $(b_1, \ldots, b_n)$, kus $b_i \geq a_i$ $(1 \leq i \leq n)$ on Hamiltoni.

Teoreem. Valentsijada $(a_1, \ldots, a_n)$ on hamiltoniline parajasti siis, kui iga $k < \frac{n}{2}$ korral kehtib $(a_k \leq k) \Rightarrow (a_{n-k} \geq n-k)$.

Tõestus. $\Leftarrow$ on eelmisel kilel näidatud.

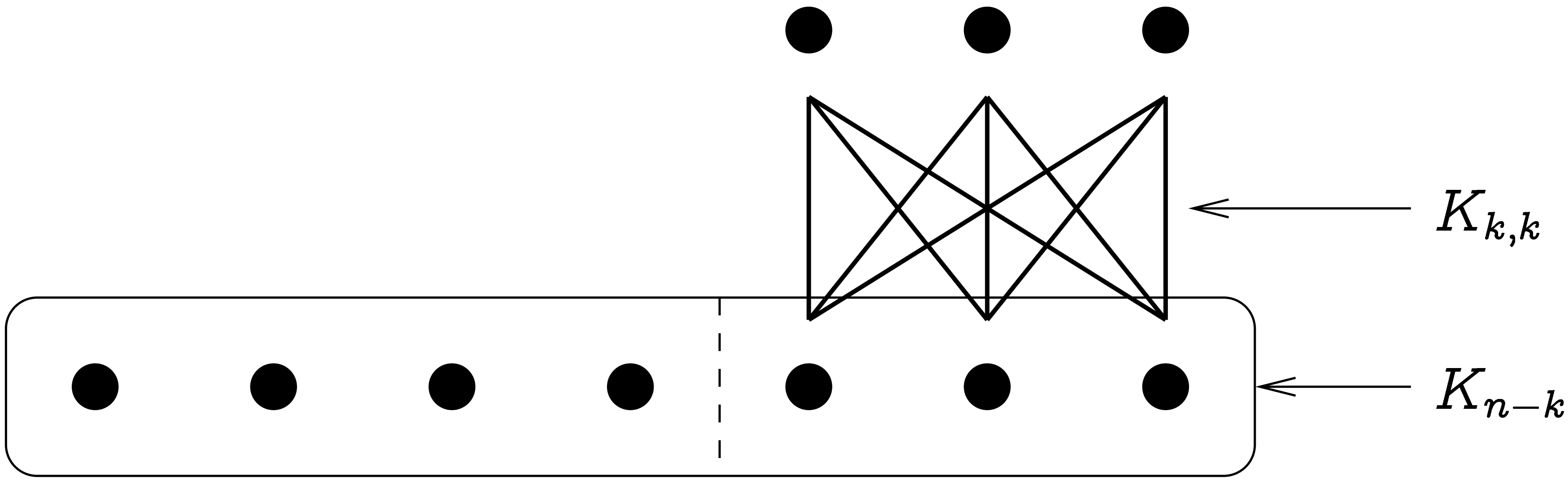
$\Rightarrow$ näitamiseks oletame, et $(a_1, \ldots, a_n)$ ei rahulda toodud tingimust. Konstrueerime graafi valentsijadaga $\geq (a_1, \ldots, a_n)$, mis pole Hamiltoni.

Mitterahuldatus tähendab, et leidub k, kus $a_k \leq k$ ja $a_{n-k} \leq n-k-1$.

Antud k jaoks suurim selline valentsijada on

$$(\underbrace{k,\ldots,k}_{k},\underbrace{n-k-1,\ldots,n-k-1}_{n-2k},\underbrace{n-1,\ldots,n-1}_{k})\ .$$

Mitte-Hamiltoni graaf sellise valentsijadaga:



$\square$