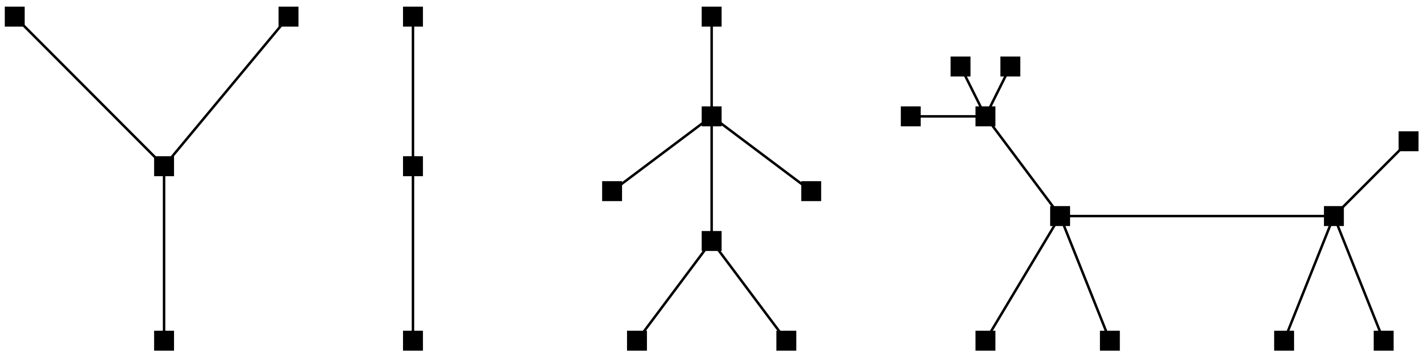
Puud

23. september 2003

Graafi, kus pole tsükleid, nimetatakse *metsaks*.

Sidusat metsa nimetatakse *puuks*.



Tippu, mille aste on 1, nimetatakse *leheks*.

Lause. Iga puu on kahealuseline graaf.

Tõestus. Hakkame mingist tipust alates tippe alustesse jaotama. Meil ei saa tekkida vastuolu, sest tsükleid ei ole.

□

Lause. Olgu G n-tipuline graaf, millel on m serva ja k sidususkomponenti. Sel juhul $n - k \leq m$.

Tõestus. Induktsioon üle m.

Kui $m = 0$, siis on G iga tipp eraldi sidususkomponent, s.t. $k = n$. Võrratus kehtib.

Olgu $m > 0$. Eemaldame graafist G ühe serva, saades $m-1$ servaga graafi. On kaks võimalust:

- Sidususkomponentide arv ei suurenenud. Induktsiooni eeldusest saame $n - k \leq m - 1$. Seega ka $n - k \leq m$.
- Sidususkomponentide arv suurenes ühe võrra. Induktsiooni eeldusest saame $n - (k + 1) \leq m - 1$. Seega ka $n - k \leq m$. $\square$

Teoreem. Olgu $T = (V, E)$ n-tipuline graaf. Suvalisest kahest järgmisest väitest järeldub kolmas.

(i). T on sidus.

(ii). T on tsükliteta.

(iii). T-s on $n - 1$ serva.

See teoreem annab kaks alternatiivset puu definitsiooni.

Tõestus.

(i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii). Induktsioon üle n.

Kui T-s on üks tipp, siis on T kõik servad silmused, seega kujutab T iga serv endast tsüklit. Tingimuse (ii) järgi on T tsükliteta, järelikult ka servadeta.

Olgu graafis T n tippu.

T on tsükliteta $\Longrightarrow$ T-s leidub tipp v astmega 0 või 1.

Teoreem. Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

T on sidus $\Longrightarrow$ tipu v aste ei ole 0.

Indutseeritud alamgraaf T' tipuhulgaga $V \setminus \{v\}$ on sidus ja tsükliteta, induktsiooni eelduse järgi on temas $n-2$ serva.

Graafis T on üks serv rohkem kui graafis T'.

(ii) & (iii) $\Rightarrow$ (i). Oletame, et T ei ole sidus.

Olgu $T_1, \ldots, T_k$ graafi T sidususkomponendid. Nad kõik on tsükliteta ja sidusad, seega on juhu (i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii) järgi neis kõigis servi ühe võrra vähem kui tippe.

Kokkuvõttes saame, et graafis T on $n-k$ serva. Kuna T-s on $n-1$ serva, siis $k=1$, s.t. T on sidus.

(i) & (iii) $\Rightarrow$ (ii). Oletame, et T-s on tsükkel. Eemaldame sellest tsüklist ühe serva, siis on meil n tipuga ja $n-2$ servaga sidus graaf. Vastuolu eelpool tõestatud lausega. $\square$

Vahemärkus matemaatilisest induktsioonist.

Olgu meil mingi väide $P(x)$ hulga x elementide kohta. Me tahame näidata, et $\forall x \in X : P(x)$.

Esitugu hulk X osahulkade X_n ühendina: $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Näiteks: X on graafide hulk, X_n on n-tipuliste graafide hulk.

Siis piisab $\forall x \in X : P(x)$ näitamiseks $\forall x \in X_1 : P(x)$ ja $\forall n \in \mathbb{N} : \big(\forall x \in X_n : P(x) \Rightarrow \forall x \in X_{n+1} : P(x)\big)$ näitamisest.

Järgnevad tegevused ei anna induktsioonisammu tõestust:

1. Valime suvaliselt mingi $x \in X_n$.
2. Temast lähtudes konstrueerime mingi $x' \in X_{n+1}$.
   - Neid x'-e võib ka mitu olla, üldiselt konstrueerime me mingi $s(x) \subseteq X_{n+1}$.
3. Näitame, et iga $x' \in s(x)$ jaoks $P(x')$. Seejuures võime eeldada, et $P(x)$ kehtib.

Me pole näidanud, et $\bigcup_{x \in X_n} s(x) = X_{n+1}$ ehk samaväärselt $\forall x' \in X_{n+1} \, \exists x \in X_n : x' \in s(x)$.

Mõnikord on selle tõestamatajäänud tingimuse kehtivus ilmne.

Näiteks siis, kui kõik hulgad X_n on üheelemendilised.

Nii on näiteks siis, kui meil on ülesandeks tõestada, et mingi valem $f(n) = g(n)$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks.

Mõnikord ei ole ilmne, näiteks eelmises teoreemis (i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii):
Ei ole ilmne, et kui me mingile n-tipulisele sidusale tsükliteta graafile ühe rippuva tipu lisame, siis saame kätte kõik $(n+1)$-tipulised sidusad tsükliteta graafid.

Korrektne tegevuste järjekord oleks:

1. Valime suvaliselt mingi $x' \in X_{n+1}$.
2. Temast lähtudes konstrueerime mingi $x \in X_n$, s.t. x on mingil viisil seotud x'-ga.
3. Näitame, et $P(x')$ kehtib. Seejuures võime eeldada, et $P(x)$ kehtib.

Teoreem. Graaf T on puu parajasti siis, kui ta on sidus ja tema iga serv on sild.

Tõestus. Suund $\Rightarrow$. Olgu T-s n tippu ja $n-1$ serva. Vaatame mingit serva. Kui me ta eemaldame, jääb järgi n tipuga ja $n-2$ servaga graaf, mis vastavalt esimesele lausele on mittesidus. Seega on see serv sild.

Suund $\Leftarrow$. Kui T-s leiduks mõni tsükkel, siis sinna tsüklisse kuuluvad servad ei ole sillad — neist mõne eemaldamisel jääks graaf endiselt sidusaks. Seega on T tsükliteta (ja vastavalt teoreemi eeldusele sidus). $\square$

Teoreem. Olgu T graaf, milles on n tippu. Järgmised väited on samaväärsed.

1. T on puu.
2. T suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.
3. T on tsükliteta, aga serva lisamisel ükskõik millise kahe tipu vahele tekib tsükkel.

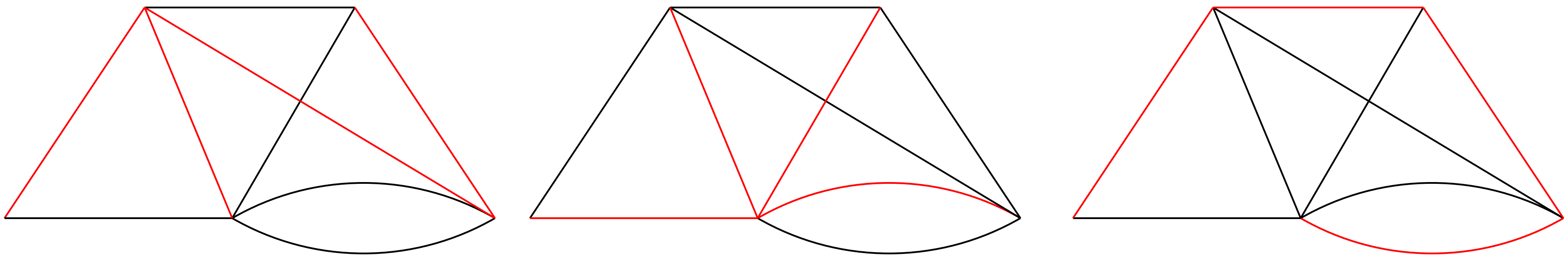
Tõestus. $1 \Rightarrow 2$. Suvalise kahe tipu vahel on vähemalt üks lihtahel, muidu poleks T sidus. Kui mõne kahe tipu vahel leiduks mitu erinevat lihtahelat, siis need ahelad koos moodustaksid tsükli, seega poleks T siis puu.

$2 \Rightarrow 3$. T on tsükliteta, sest tsüklil olevate tippude vahel leidub vähemalt kaks erinevat lihtahelat. Tippude u ja v vahele uue serva e lisamisel tekib tsükkel $u \rightsquigarrow v \overset{e}{\text{———}} u$.

$3 \Rightarrow 1$. Oletame, et T ei ole sidus. Serva lisamisel erinevatesse sidususkomponentidesse kuuluvate tippude vahele tsüklit ei teki. Vastuolu eeldusega. $\square$

Sidusa graafi $G = (V, E)$ *aluspuu* on selle graafi alamgraaf T, mis on puu tipuhulgaga V.

Mittesidusa graafi korral võime rääkida tema *alusmetsast* — selle graafi sidususkomponentide mingite alampuude ühendist.



Servade eraldav hulk graafis $G = (V, E)$ on selline hulk $E' \subseteq E$, et graafis $(V, E \backslash E')$ on rohkem sidususkomponente kui graafis G.

Tippude eraldav hulk graafis $G = (V, E)$ on selline hulk $V' \subseteq V$, et graafis $G \backslash V'$ on rohkem sidususkomponente kui graafis G.

Servade/tippude lõikav hulk on (hulkade sisalduvuse mõttes) minimaalne servade/tippude eraldav hulk.

Üheelemendilise servade/tippude lõikava hulga ainsat elementi nimetatakse *sillaks/lõiketipuks*.

Graaf on *serviti/tiputi k-sidus* kui ta on sidus ja tema servade/tippude lõikavad hulgad on kõik võimsusega $\geq k$.

Lause. Olgu $T = (V, E_T)$ graafi $G = (V, E)$ mingi alusmets. Olgu C selle graafi mingi tsükkel ja C^* mingi servade lõikav hulk. Siis $E_T \cap C^* \neq \emptyset$ ja $(E \backslash E_T) \cap C \neq \emptyset$.

Tõestus. Kui $(E \backslash E_T) \cap C = \emptyset$, siis $C \subseteq E_T$, aga T-s pole tsükleid.

Hulka C^* kuuluvate servade eemaldamine jaotab G mingi sidususkomponendi G' kaheks komponendiks H ja K. Metsa T puu, mis on G' aluspuuks, peab ühendama H ja K tippe, seega on selles puus mõni serv H ja K tippude vahel. See serv ongi $E_T \cap C^*$ elemendiks. $\square$

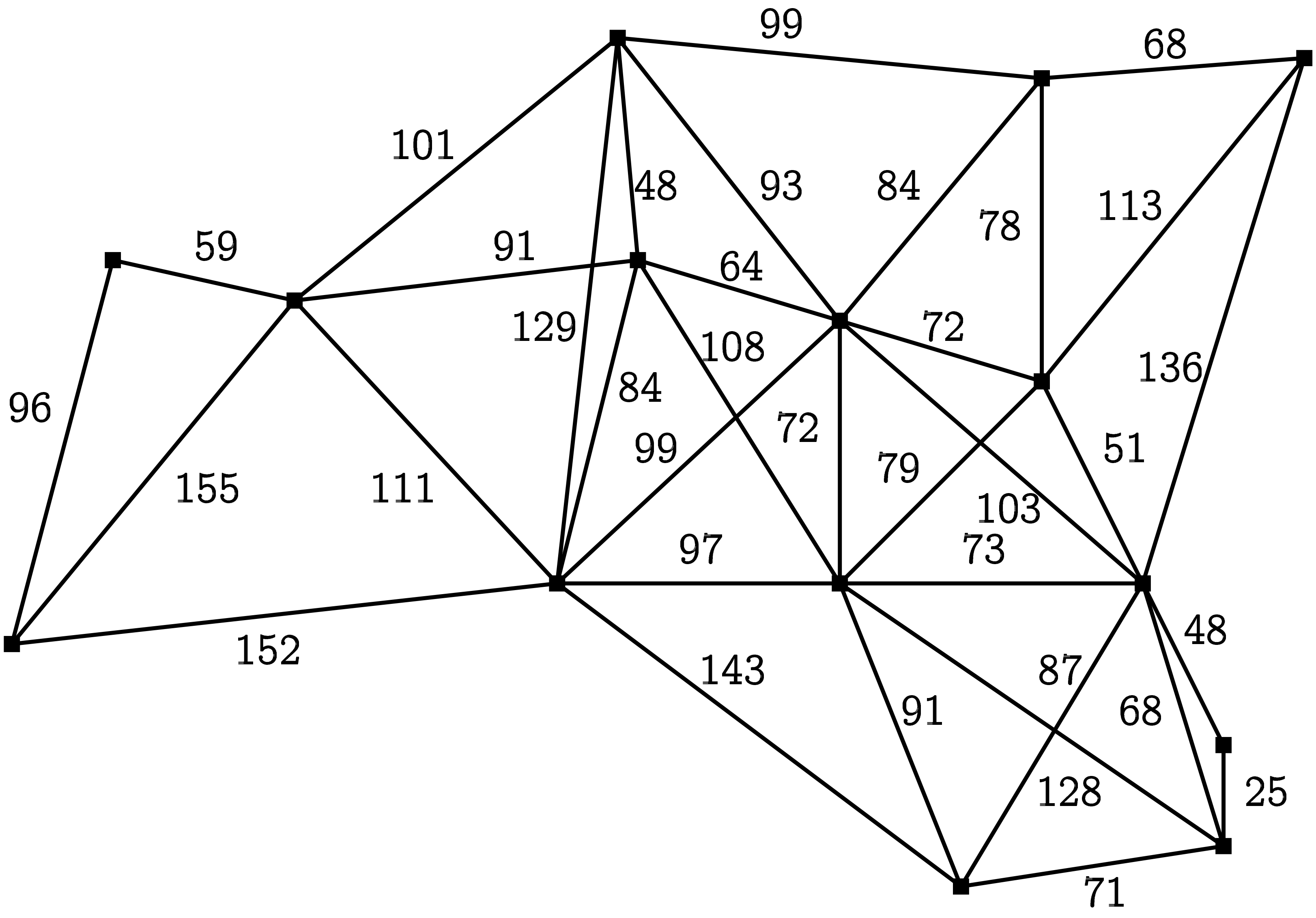
Olgu $G = (V, E)$ mingi n-tipuline graaf ning olgu iga serva $e \in E$ jaoks defineeritud tema *kaal* $w(e)$.

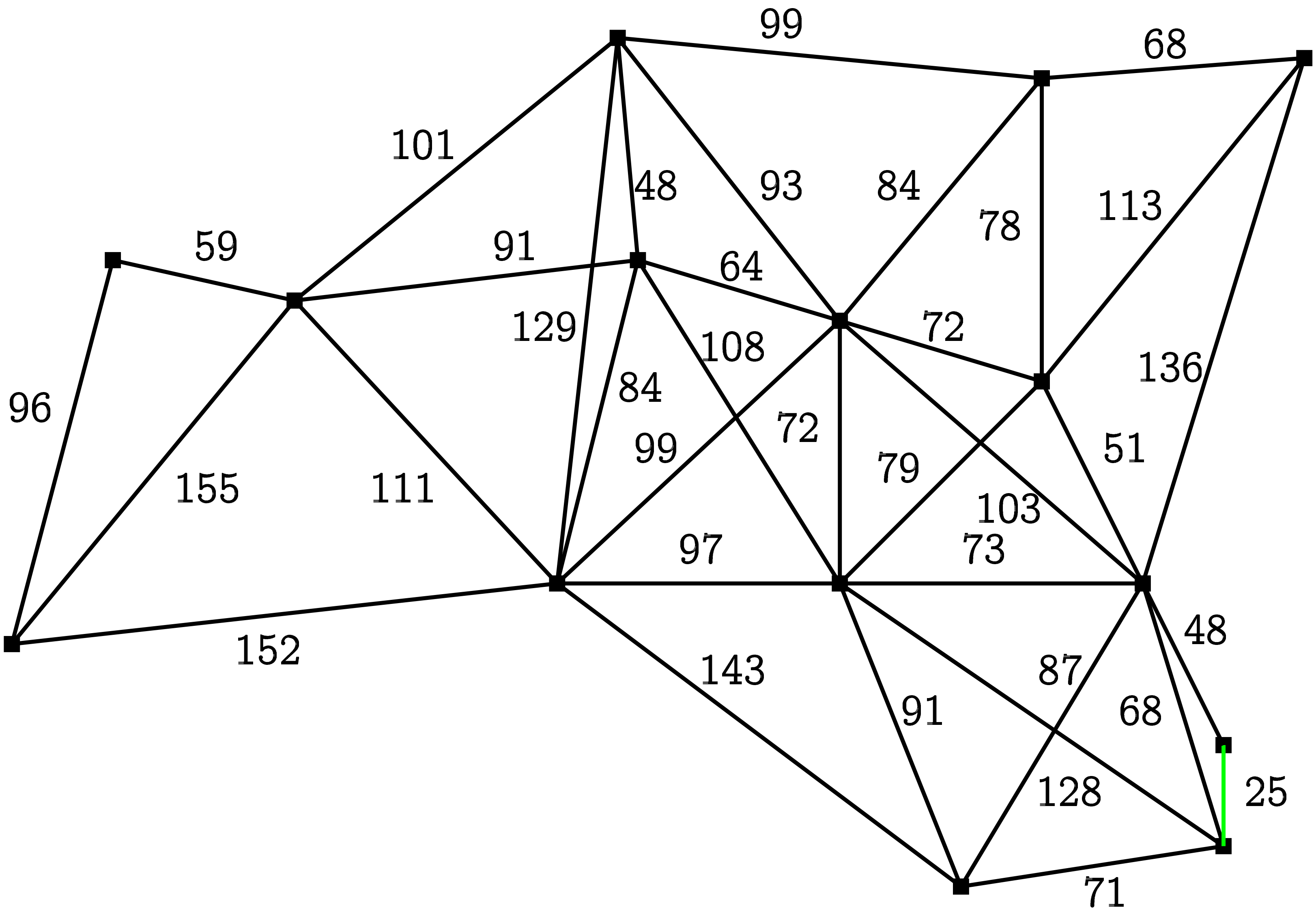
Kui $G' = (V', E')$ on G alamgraaf, siis olgu $w(G') = \sum_{e \in E'} w(e)$.

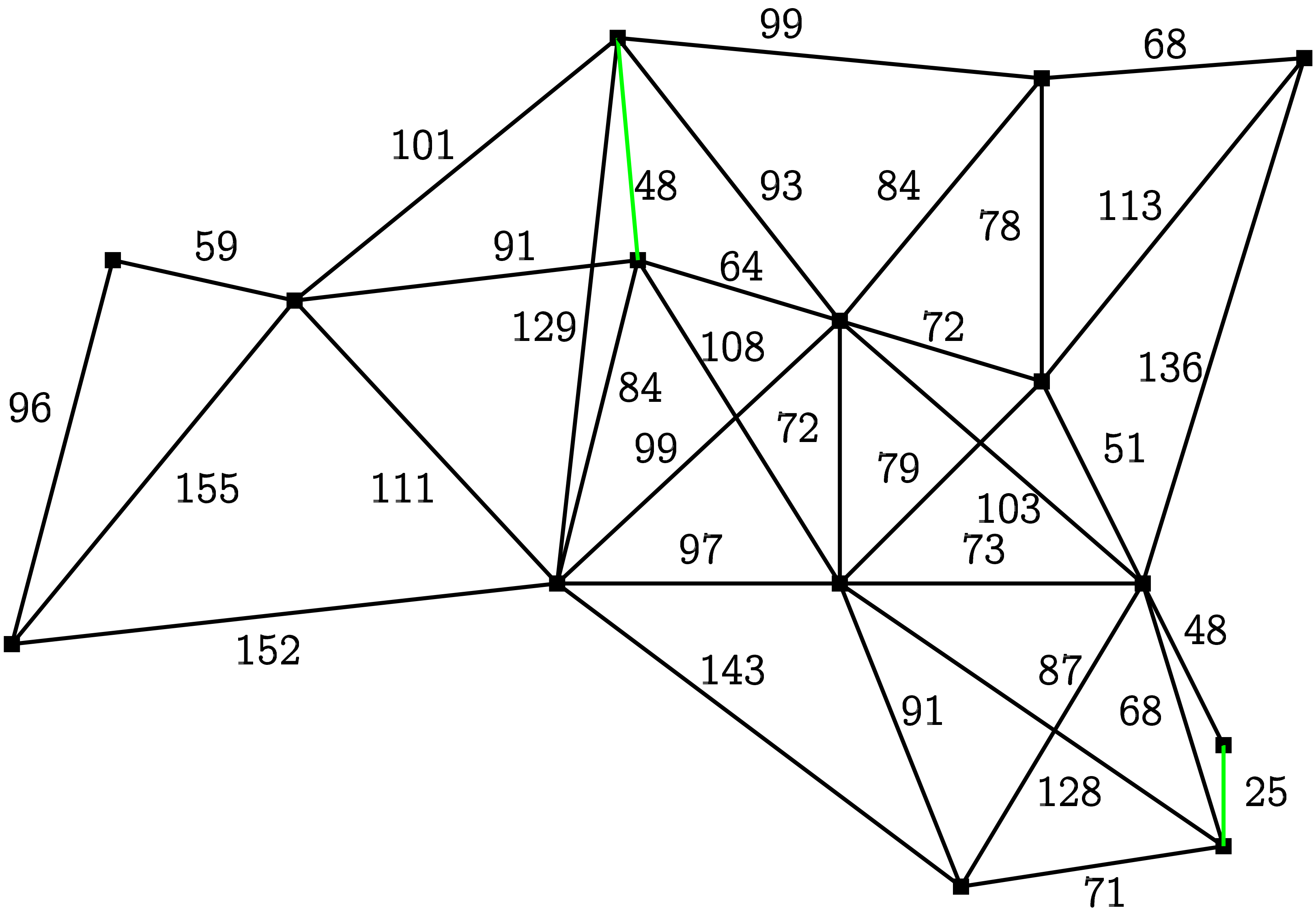
Algoritm (minimaalse kaaluga aluspuu leidmiseks G-s). Vali üksteise järel servad $e_1, \ldots, e_{n-1}$, nii et

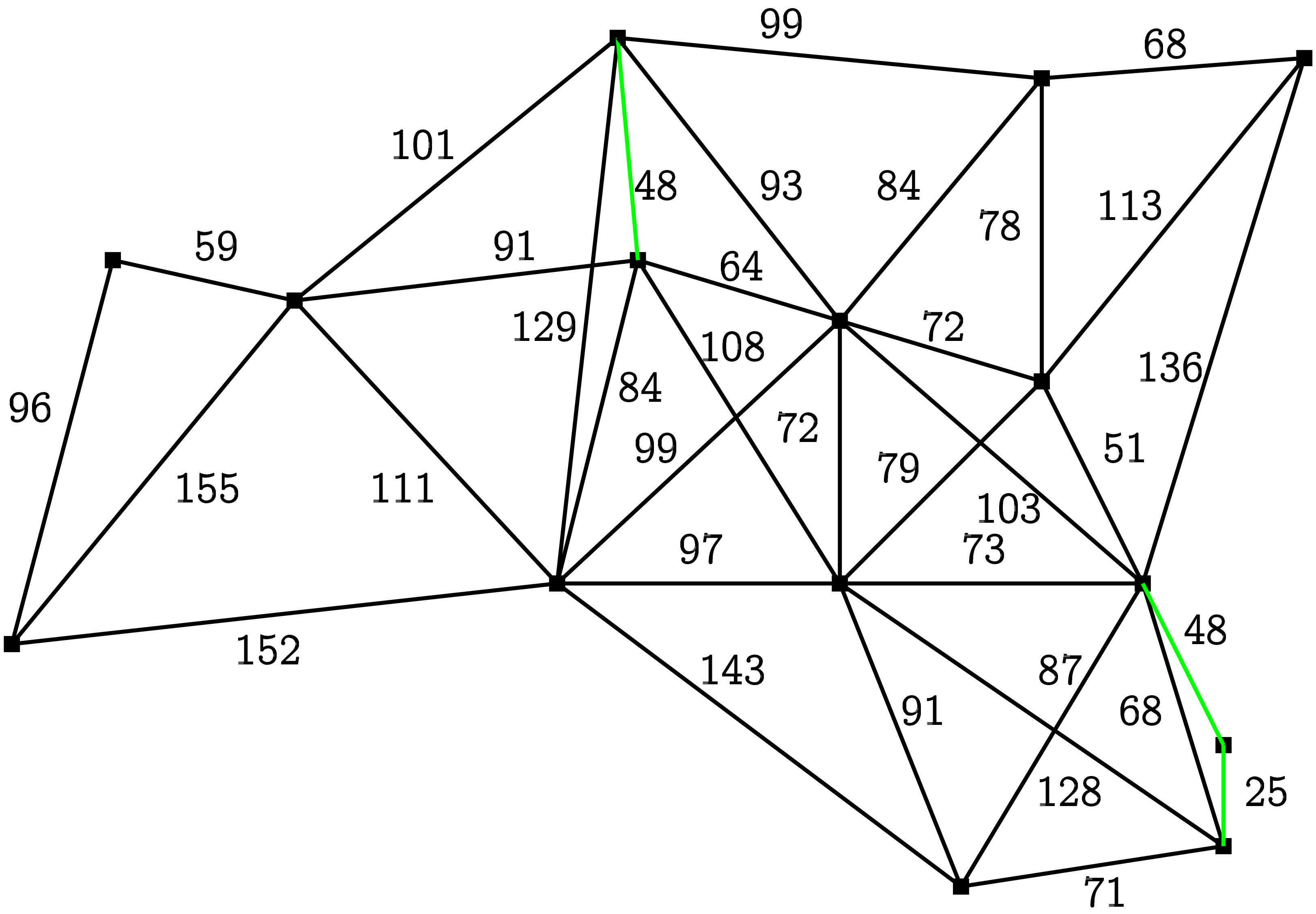
- e_i on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{i-1}$;
- e_i ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{i-1}$ tsüklit;
- e_i on minimaalse kaaluga eelmist kahte punkti rahuldavate servade seas.

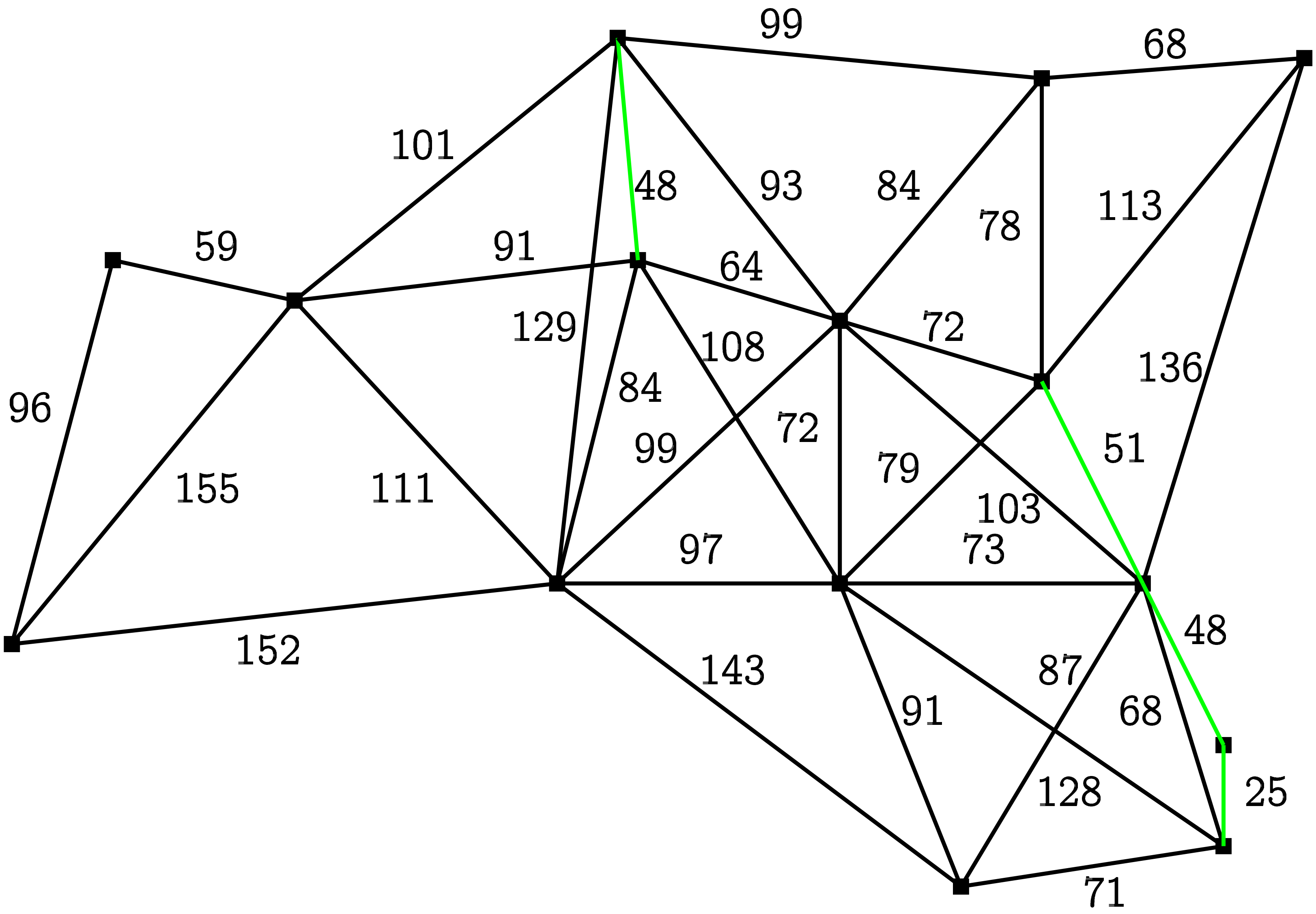
Väljasta $T = (V, \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$.

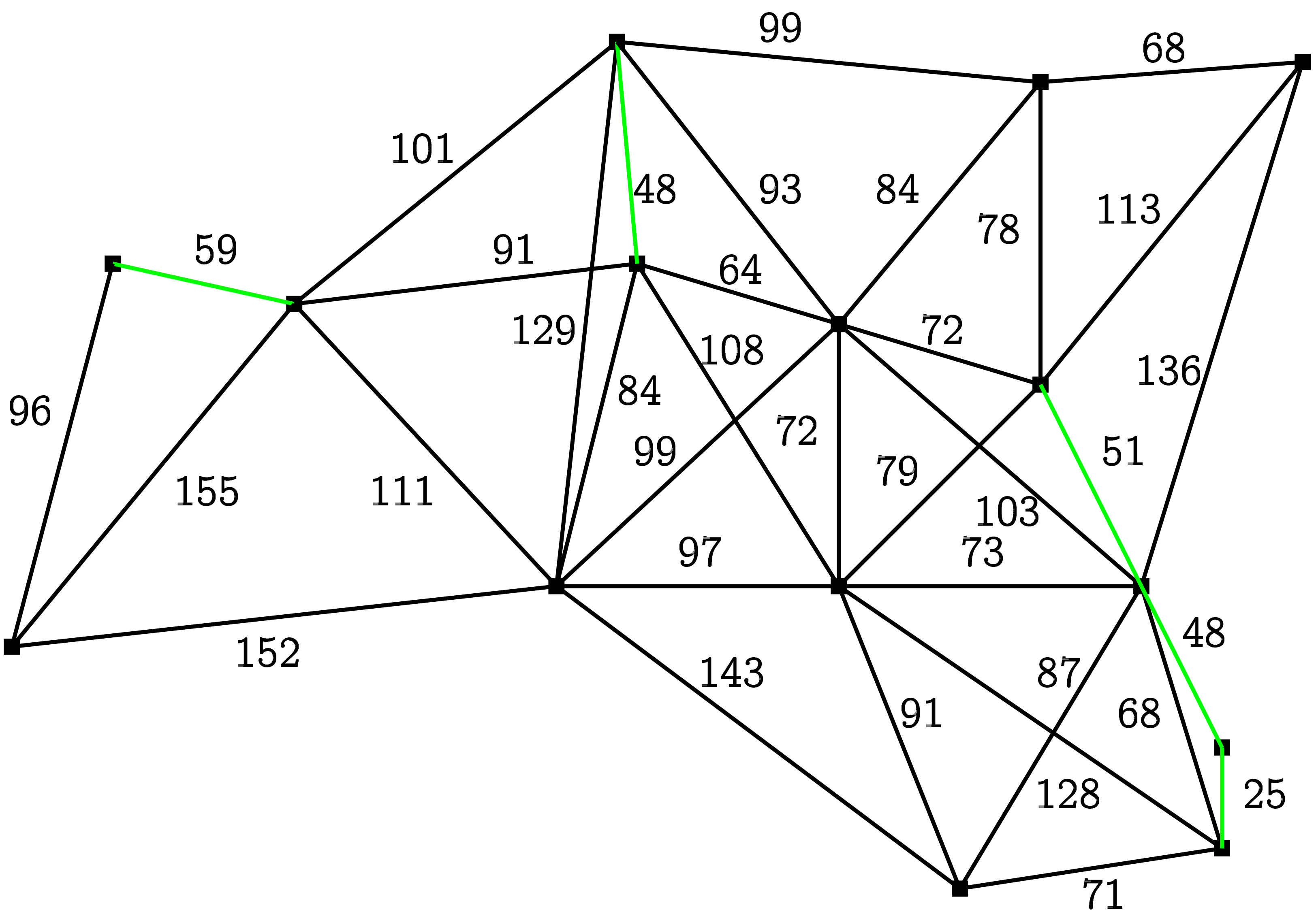

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
48
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
108
72
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

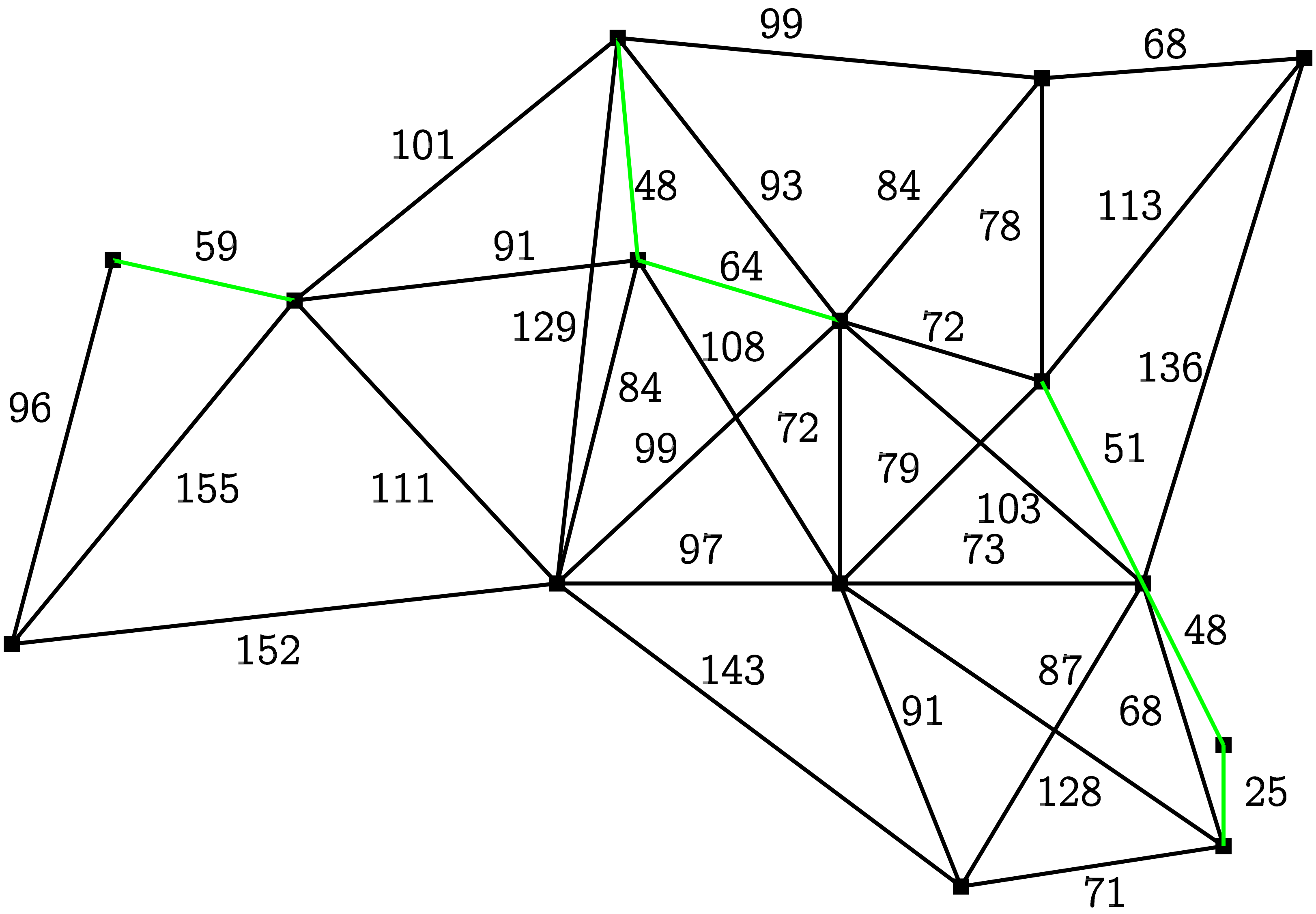

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
48
87
91
68
128
25
71

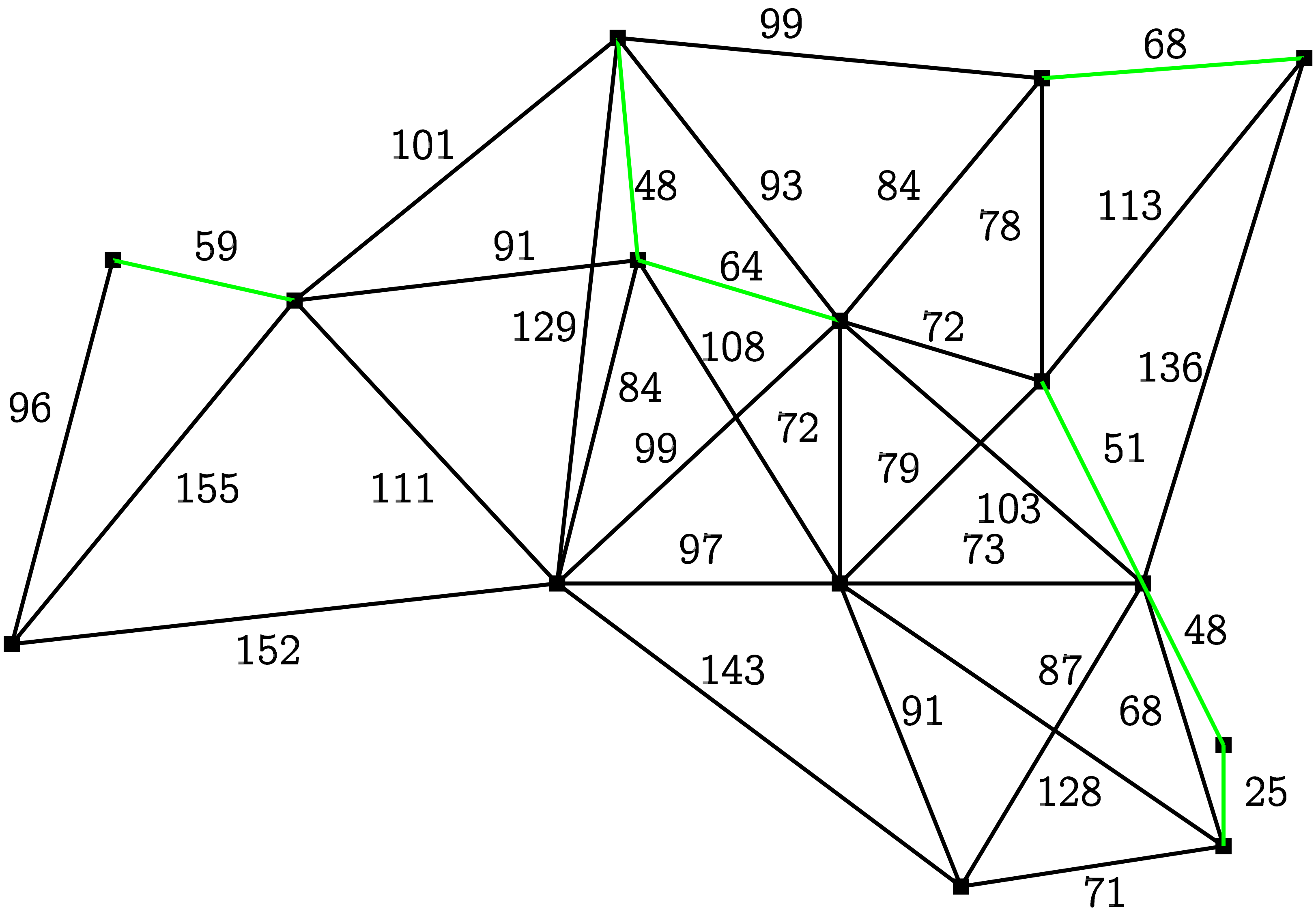

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
96
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

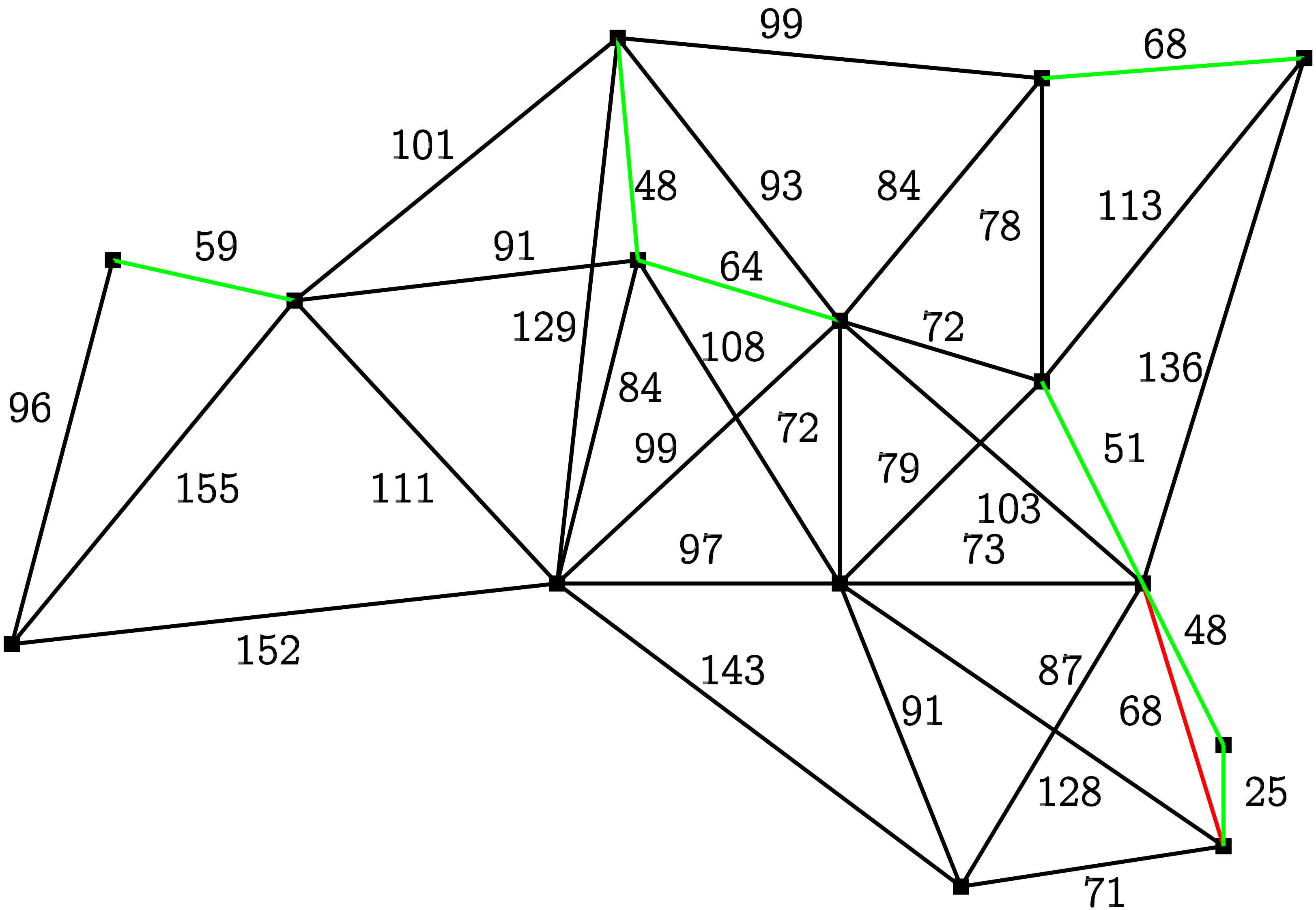


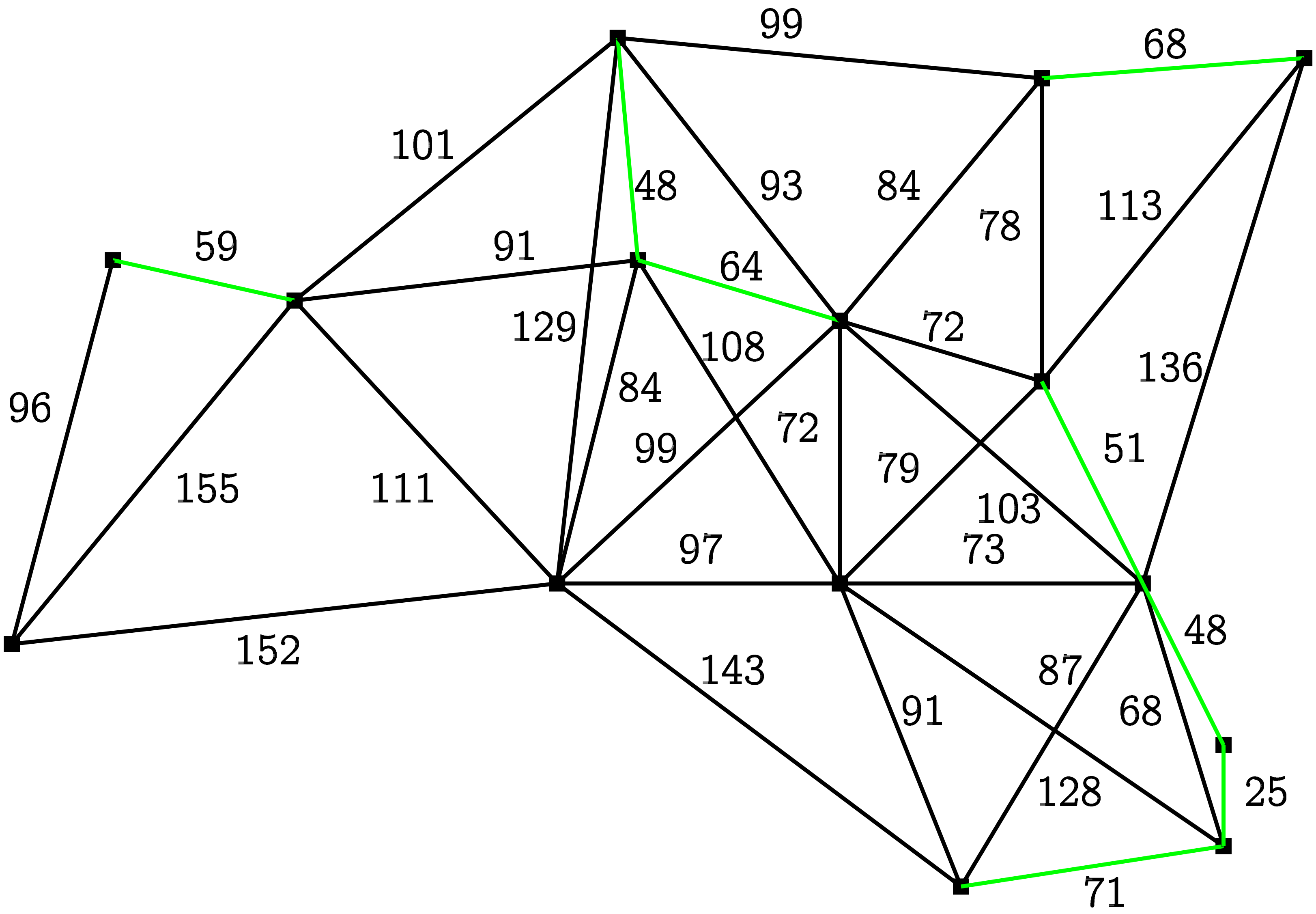
99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

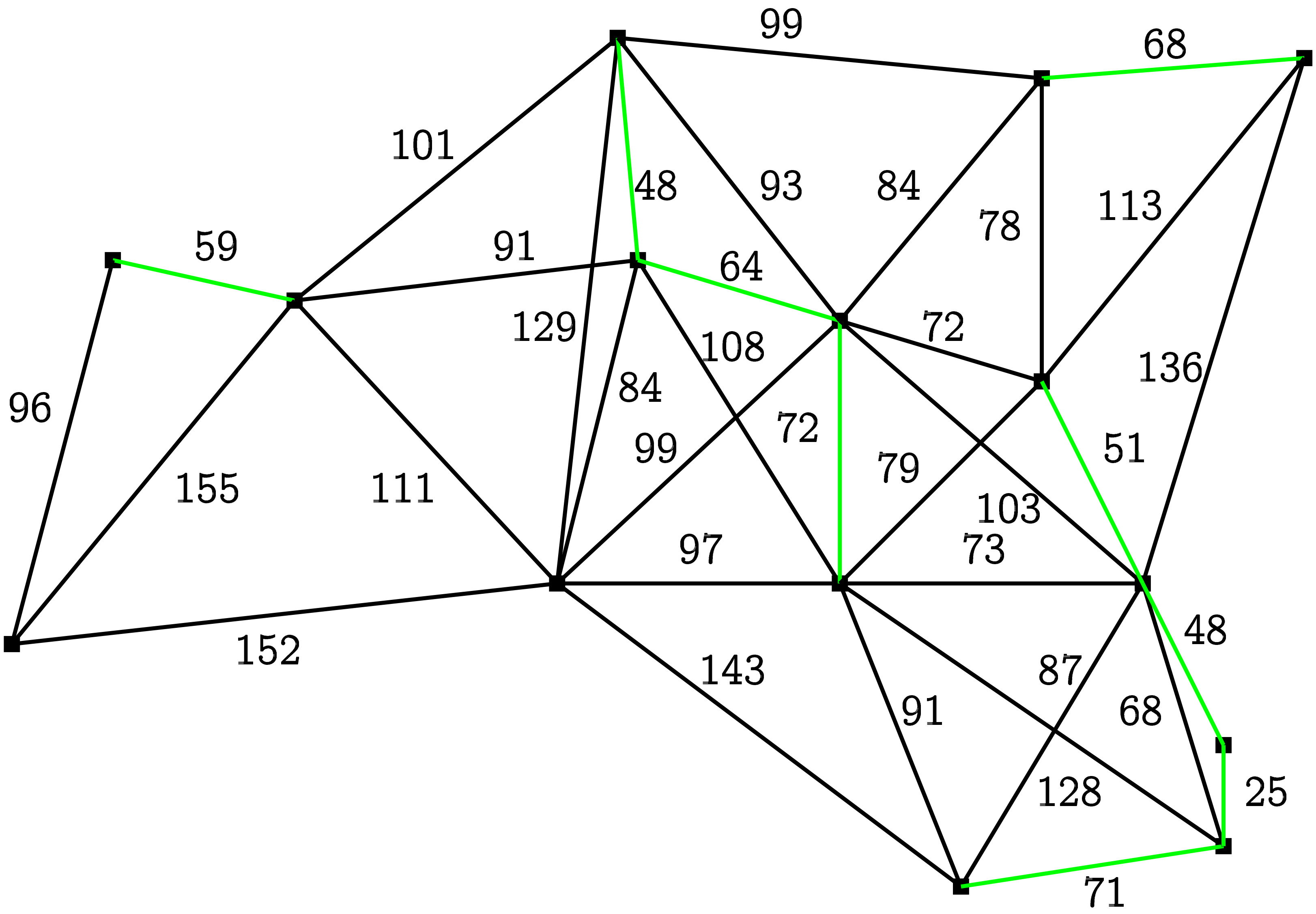


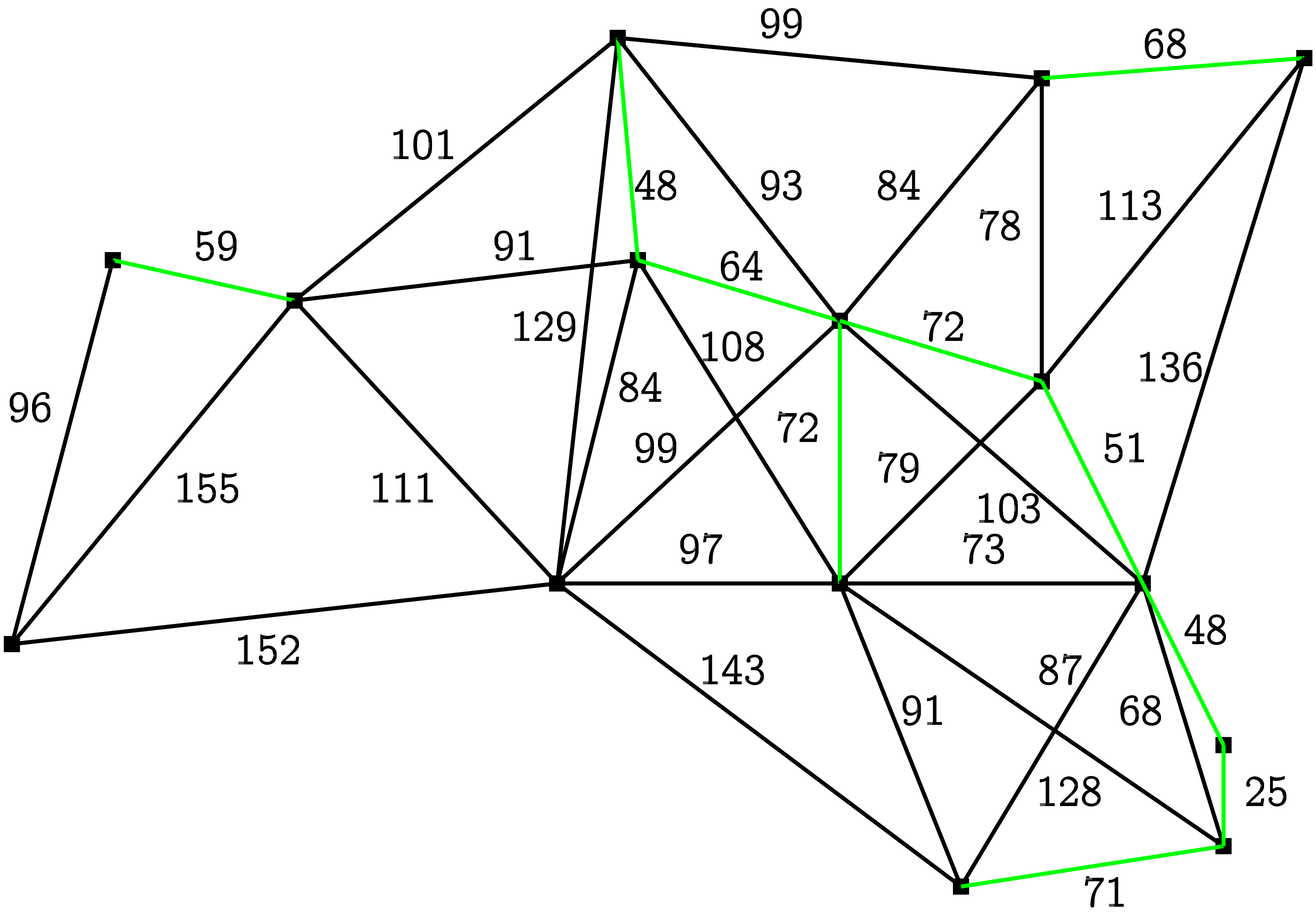
99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
72
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
152
143
48
87
91
68
128
25
71

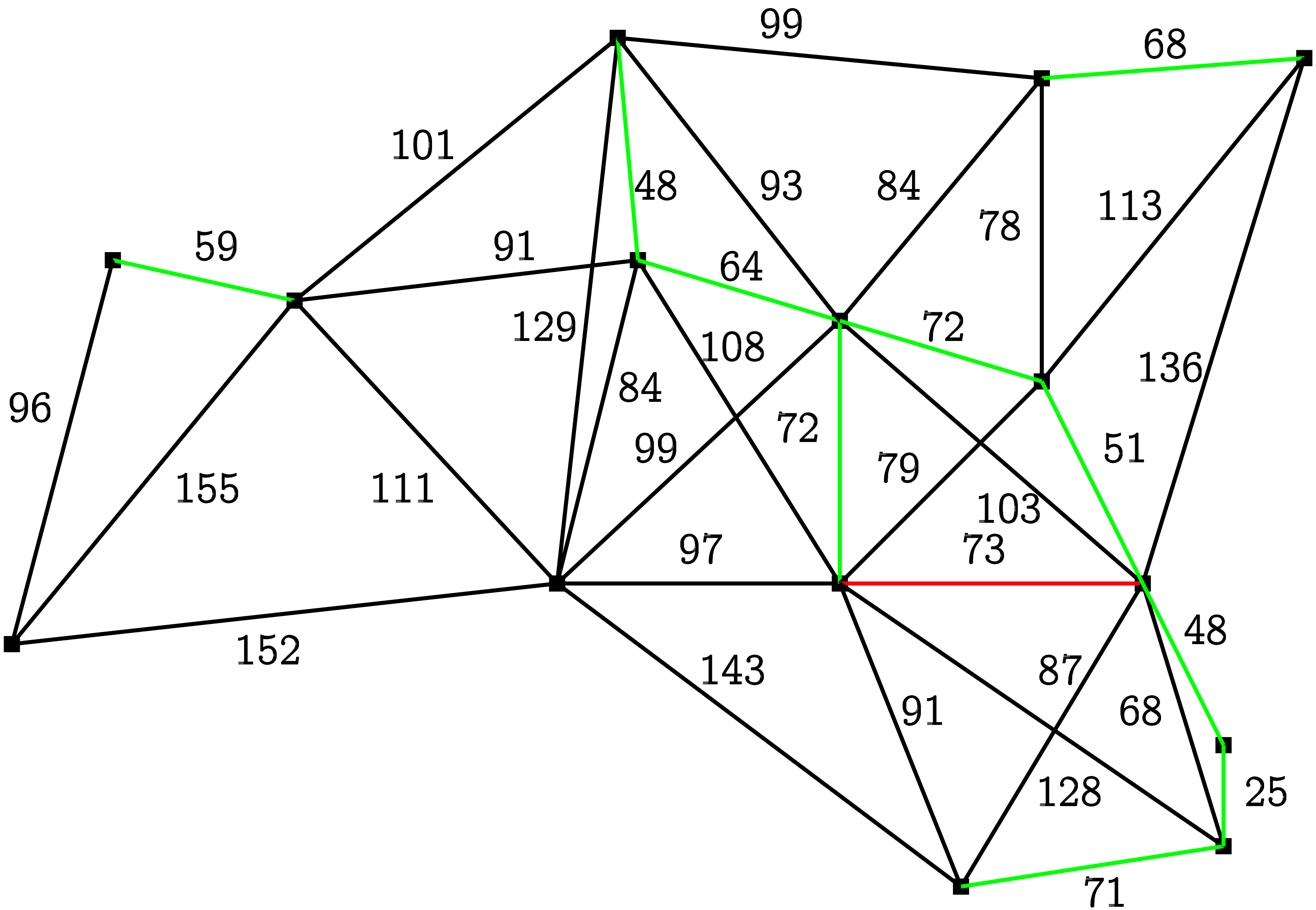

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
51
99
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

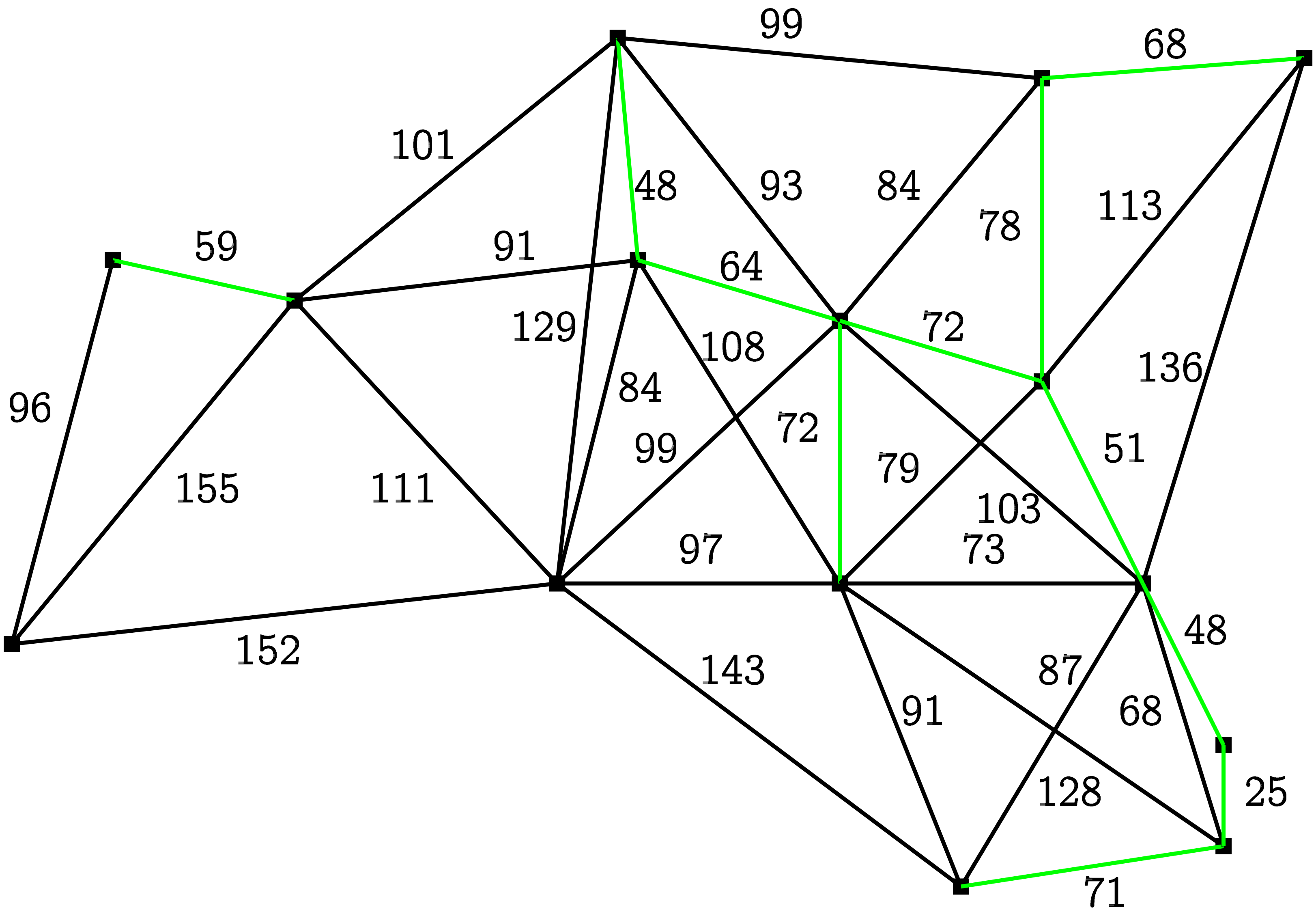

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
96
72
99
51
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
25
128
71

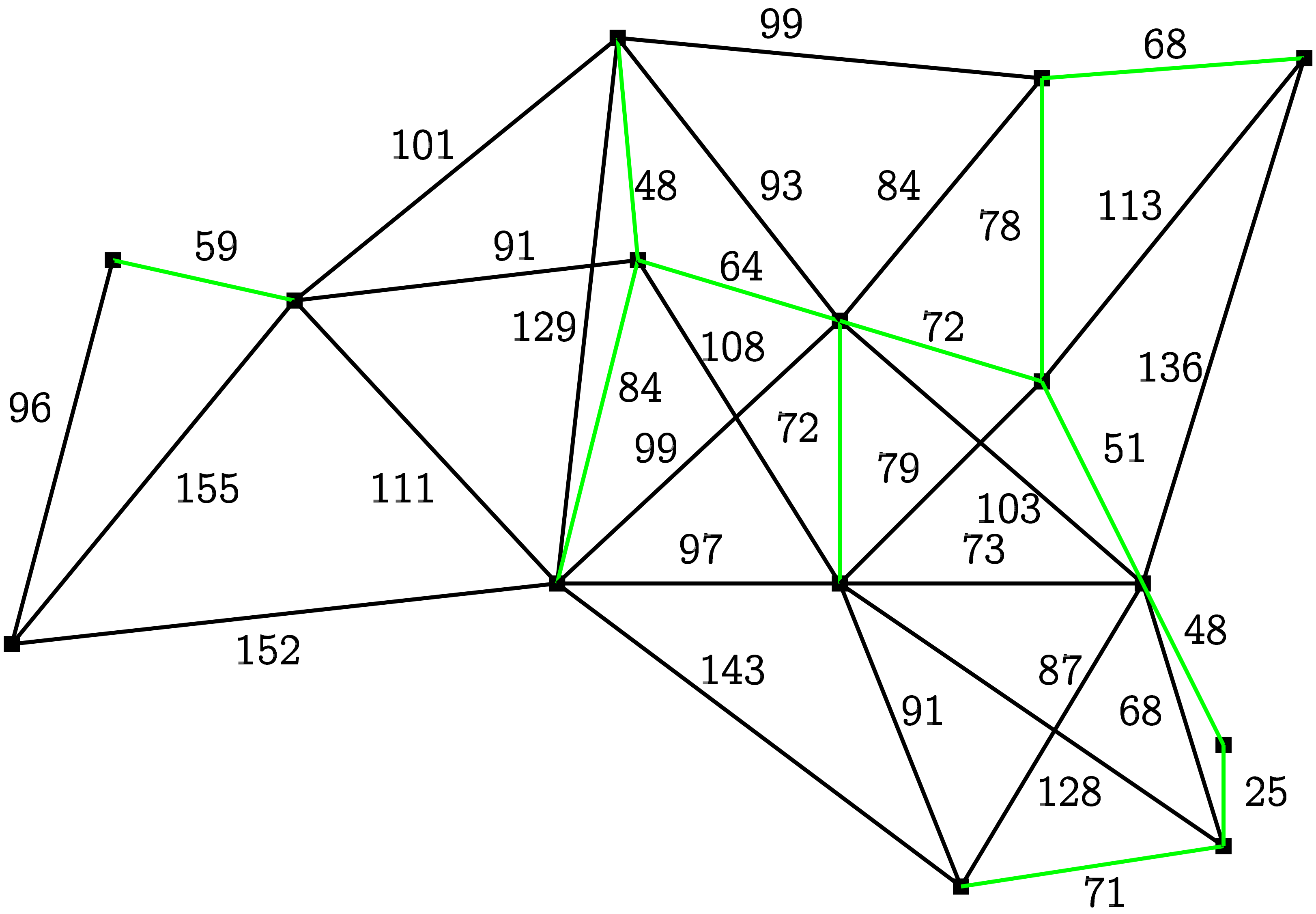

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

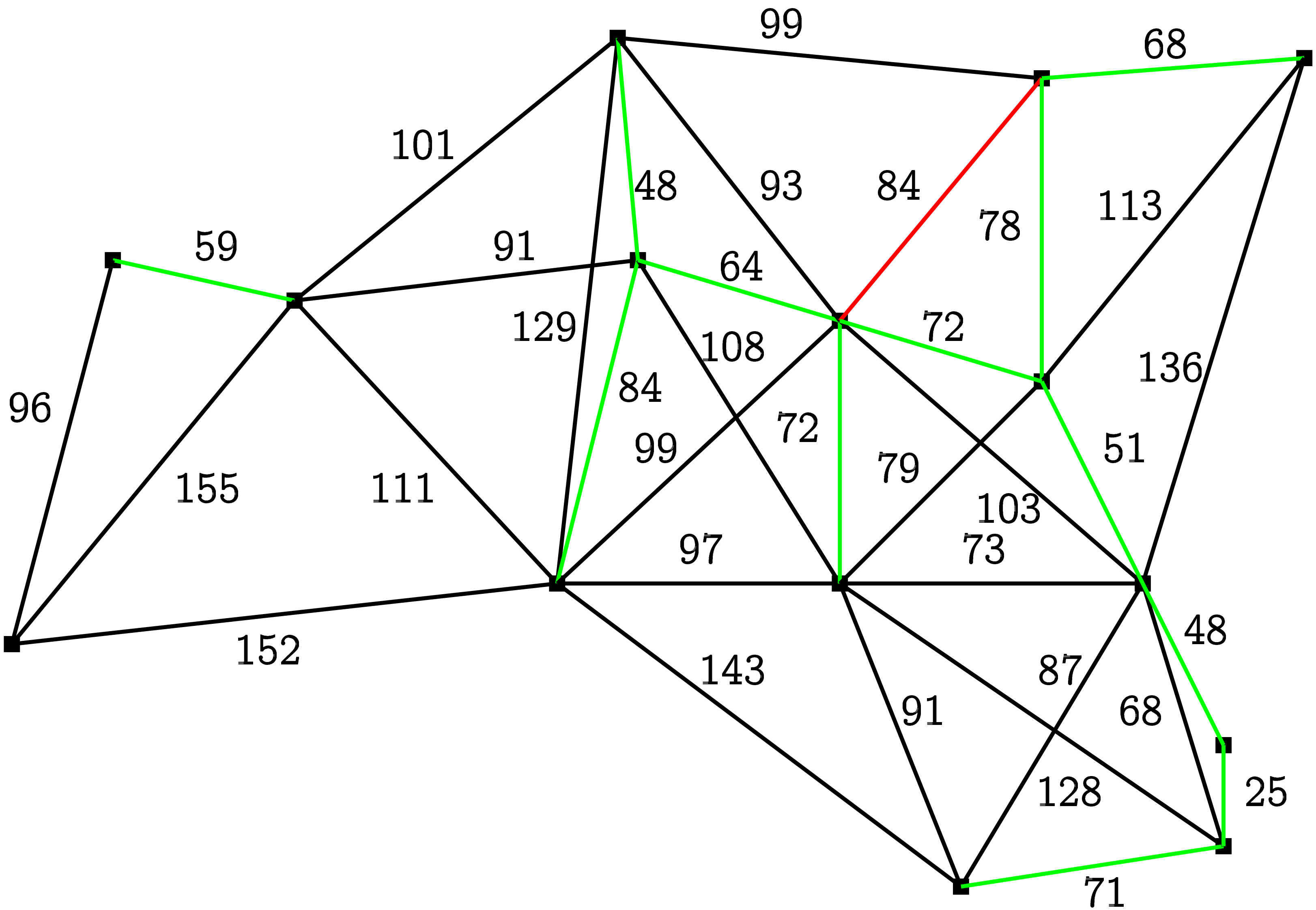

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

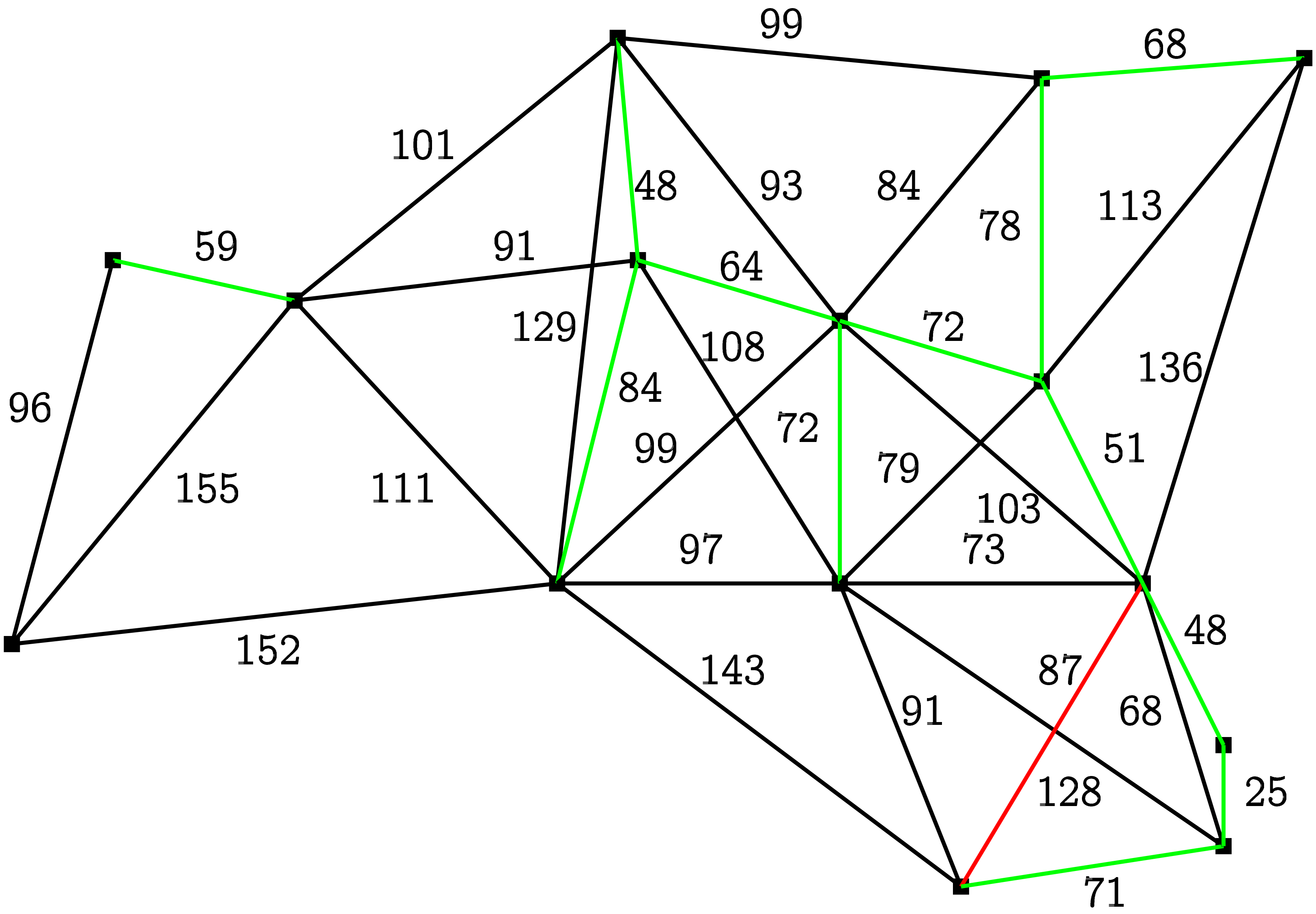

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
51
99
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

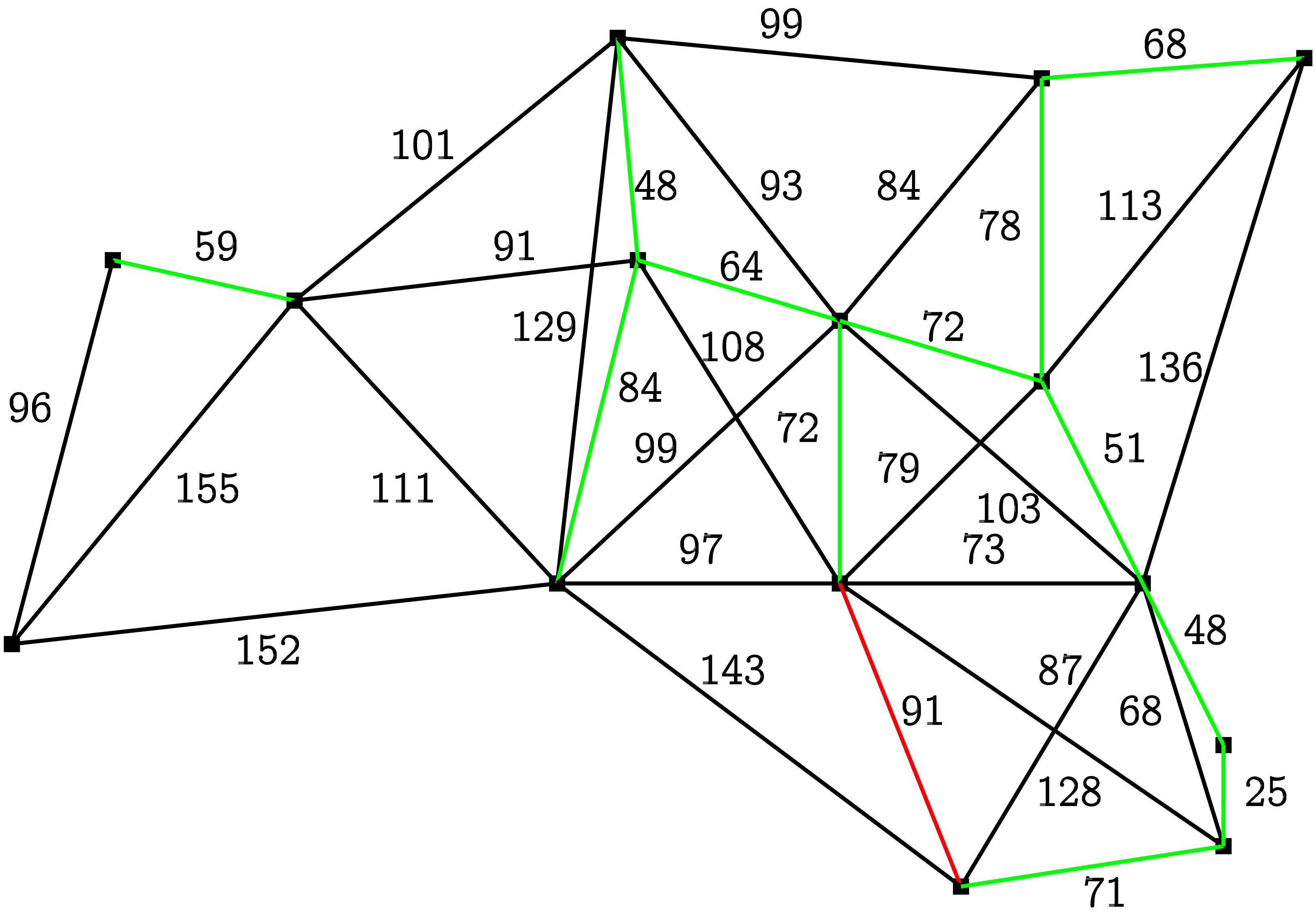

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
72
96
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

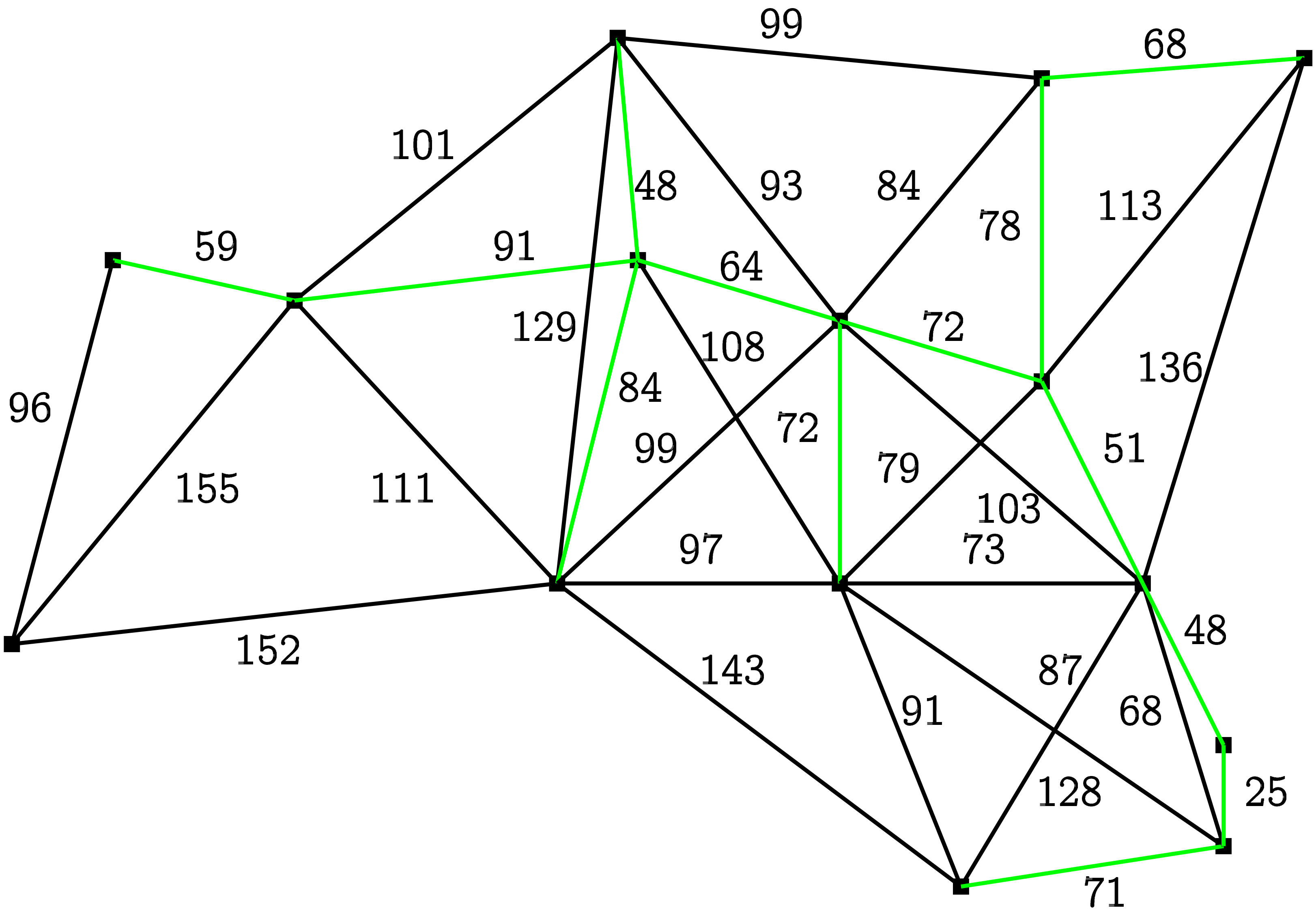

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
72
96
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

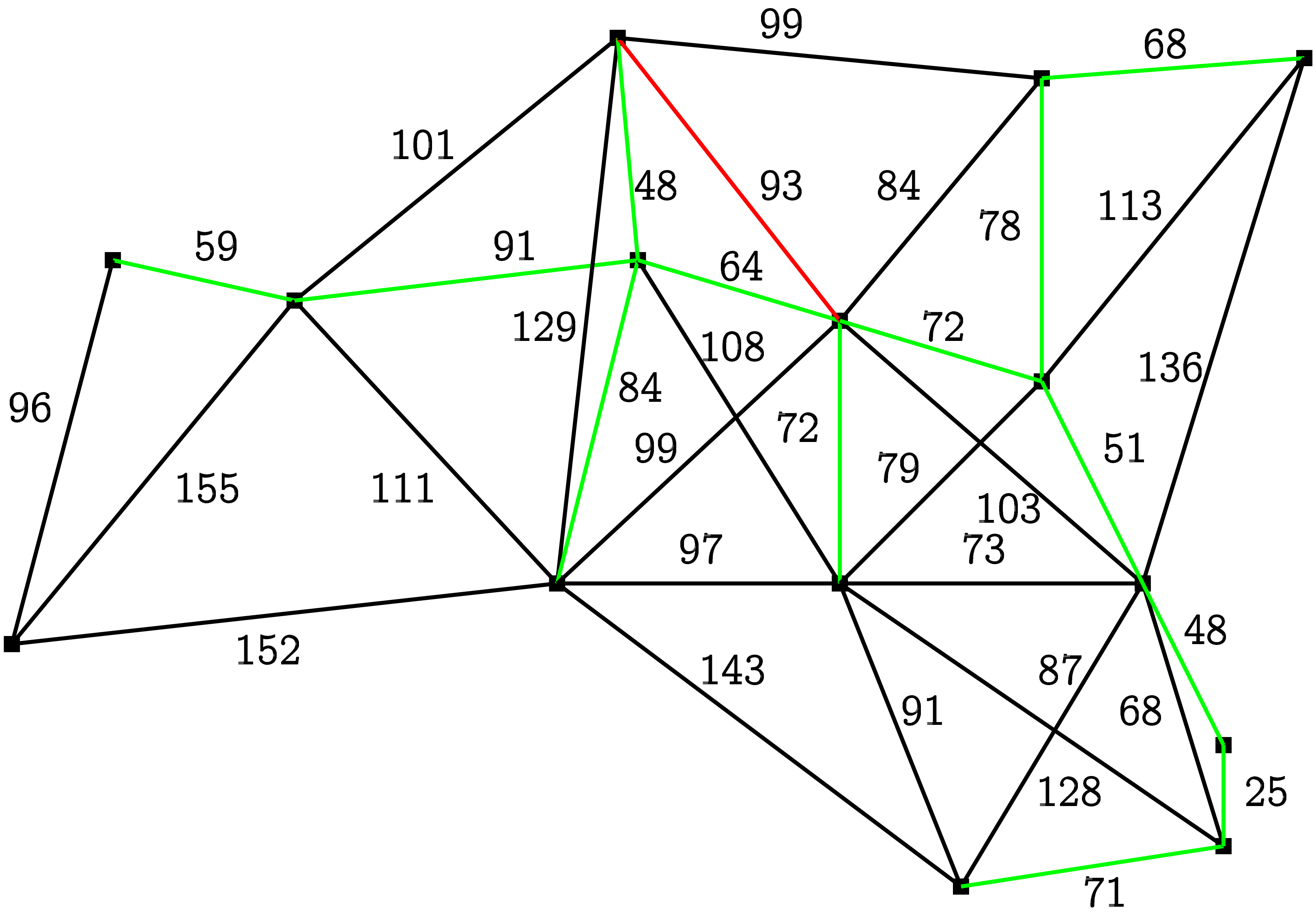

99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
96
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

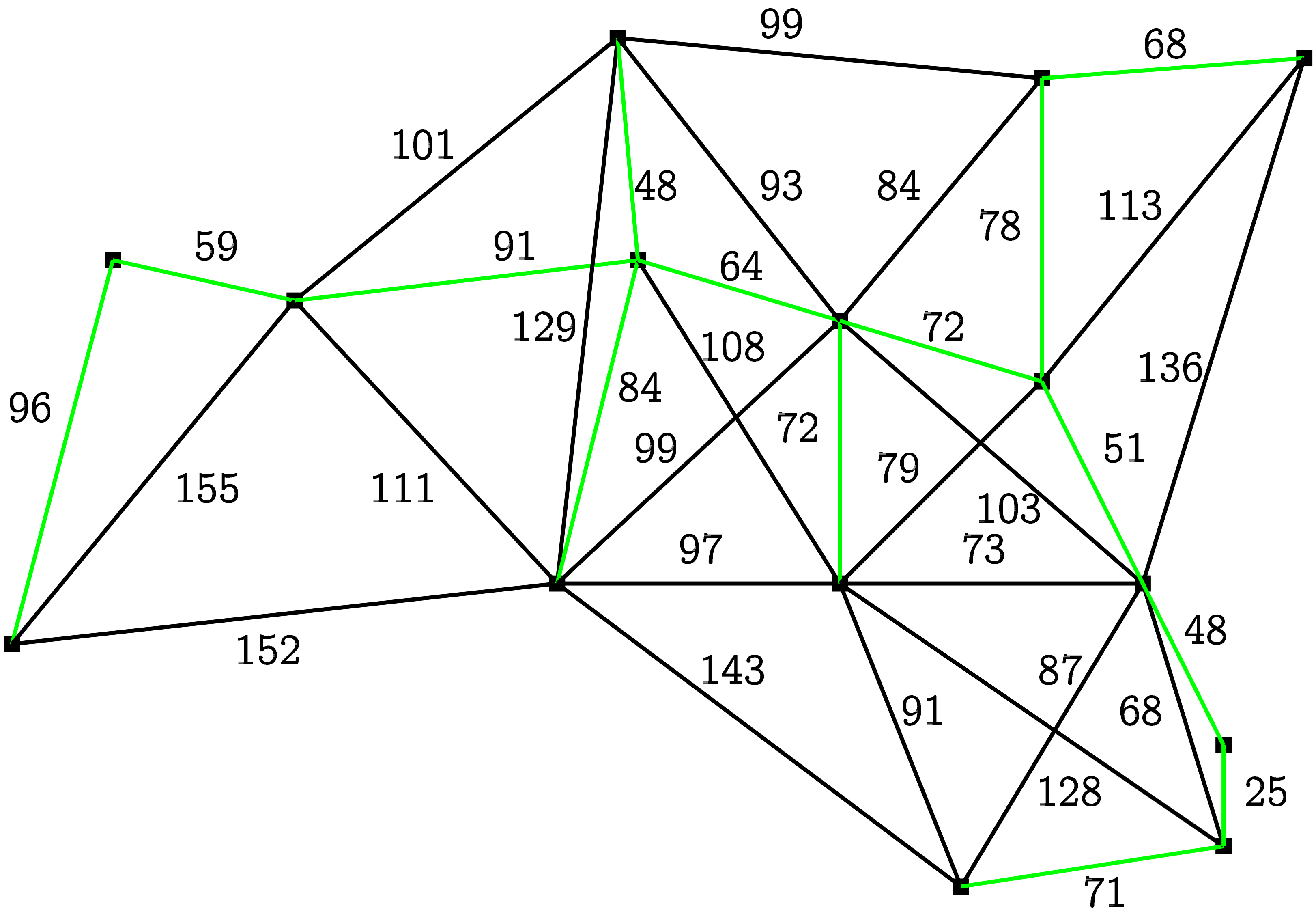


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
129
108
72
96
84
136
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
96
84
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
96
84
136
72
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71


99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
72
96
99
79
51
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71



99
68
101
48
93
84
78
113
59
91
64
72
129
108
136
84
96
99
72
51
79
155
111
103
97
73
48
152
143
87
91
68
128
25
71

Teoreem. Eeltoodud algoritm on korrektne.

Tõestus. T on (alus)puu — ta on tsükliteta, temas on n tippu ja $n-1$ serva.

Oletame, et $w(T)$ pole minimaalne. Olgu T' mõni G minimaalse kaaluga aluspuu. Olgu T' selline, et tal on T-ga maksimaalne arv ühiseid servi.

Olgu $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ vähim selline arv, et $e_k \notin E(T')$.

Olgu $S = T' \cup \{e_k\}$. Graafis S leidub mingi tsükkel C.

Kuna T ja T' on tsükliteta, siis $e_k \in C$ ja leidub $e \in E(T') \backslash E(T)$, nii et $e \in C$.

Graaf $T'' = S \backslash \{e\}$ on sidus ja $n-1$ servaga, s.t. ta on aluspuu.

Serv e on selline, mis

- on erinev servadest $e_1, \ldots, e_{k-1}$,
- ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ tsüklit (sest $e_1, \ldots, e_{k-1} \in E(T')$).

Serv e_k on minimaalse kaaluga servade seas, mis

- on erinevad servadest $e_1, \ldots, e_{k-1}$,
- ei moodusta koos servadega $e_1, \ldots, e_{k-1}$ tsüklit.

Seega $w(e_k) \leq w(e)$.

Saame $w(T'') = w(T') - w(e) + w(e_k) \leq w(T')$, s.t. T'' on minimaalse kaaluga aluspuu.

Puul T'' on rohkem puuga T ühiseid servi kui puul T'. Vastuolu T' valikuga. $\square$

Lause. Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf ja $v \in V$. Järgmised kolm väidet on samaväärsed.

(i) v on lõiketipp.

(ii) leiduvad tipud $u, w \in V \setminus \{v\}$ nii, et suvaline ahel $u \rightsquigarrow w$ läbib tippu v.

(iii) Hulk $V \setminus \{v\}$ on tükeldatav hulkadeks U ja W nii, et suvalise $u \in U$ ja $w \in W$ korral suvaline ahel $u \rightsquigarrow w$ läbib tippu v.

Tõestus. (i) $\Rightarrow$ (iii). Graaf $G \backslash v$ pole sidus. Võtame ühe tema sidususkomponendi tipud hulgaks U ja ülejäänud sidususkomponentide tipud hulgaks W.

Kui $u \in U$ ja $w \in W$, siis graafis $G \backslash v$ pole ahelaid u-st w-sse. Seega läbib iga ahel $u \leadsto w$ graafis G tippu v.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Võtame tipu u hulgast U ja tipu w hulgast W.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kui v asub suvalisel ahelal $u \leadsto w$, siis graafis $G \backslash v$ pole ühtegi ahelat tipust u tippu w, s.t. $G \backslash v$ pole sidus, s.t. v on lõiketipp. $\square$

Sidus graaf on *blokk*, kui temas pole lõiketippe.

Teoreem. Olgu $G = (V, E)$ vähemalt 3-tipuline sidus lihtgraaf. Järgmised seitse väidet on samaväärsed.

(i) G on blokk.

(ii) Suvalised kaks tippu asuvad mingil tsüklil.

(iii) Suvaline tipp ja suvaline serv asuvad mingil tsüklil.

(iv) Suvalised kaks serva asuvad mingil tsüklil.

(v) Suvalise kahe tipu ja suvalise serva jaoks leidub lihtahel, mis ühendab neid tippe ja läbib seda serva.

(vi) Suvalise kolme tipu jaoks leidub lihtahel, mis ühendab neist esimesed kaks ja läbib kolmandat.

(vii) Suvalise kolme tipu jaoks leidub lihtahel, mis ühendab neist esimesed kaks ja ei läbi kolmandat.

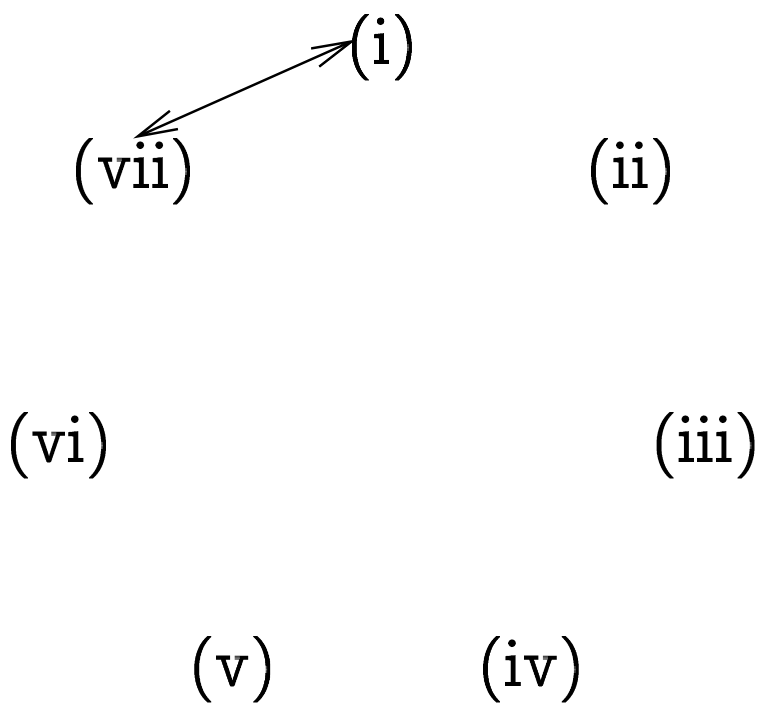
Tõestus.

(i) $\Rightarrow$ (vii)

Olgu $u, v, w \in V$. Kuna v pole lõiketipp, siis ei saa eelmise lause väide (ii) tõene olla, s.t. iga u, w jaoks leidub ahel $u \rightsquigarrow w$, mis ei läbi tippu v.

(vii) $\Rightarrow$ (i)

Olgu $v \in V$, näitame, et ta ei ole lõiketipp. Suvalise $u, w \in V$ jaoks leidub ahel $u \rightsquigarrow w$, mis ei läbi tippu v, seega eelmise lause väide (ii) on väär.


(i)
(vii)
(ii)
(vi)
(iii)
(v)
(iv)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Olgu u, v mingid tipud ning olgu $U \subseteq V \setminus \{u\}$ kõigi selliste tippude hulk, mis asuvad mingil tsüklil koos u-ga.

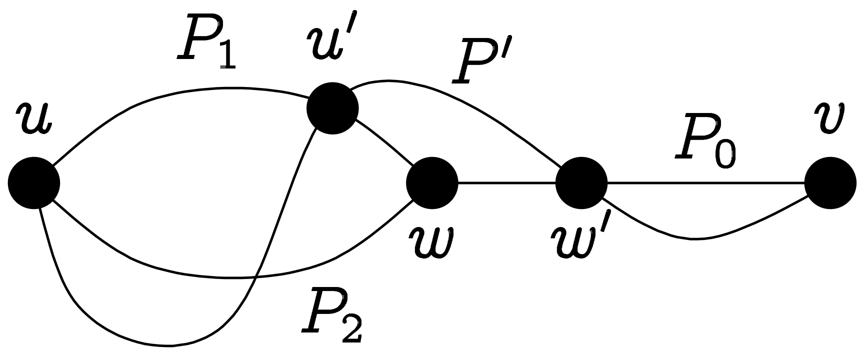
Oletame vastuväiteliselt, et $v \notin U$.

Kuna G-s pole sildu, siis kõik u naabertipud kuuluvad hulka U: kui u — u', siis $G - (u, u')$ on sidus, seal leidub tee $u \rightsquigarrow u'$, see tee koos servaga (u, u') annab tsükli. Seega U pole tühi.

Olgu $w \in U$ selline, mille kaugus v-st on minimaalne. Olgu

- P_0 lühim lihtahel w-st v-sse;
- P_1 ja P_2 teineteisega mittelõikuvad lihtahelad u-st w-sse.

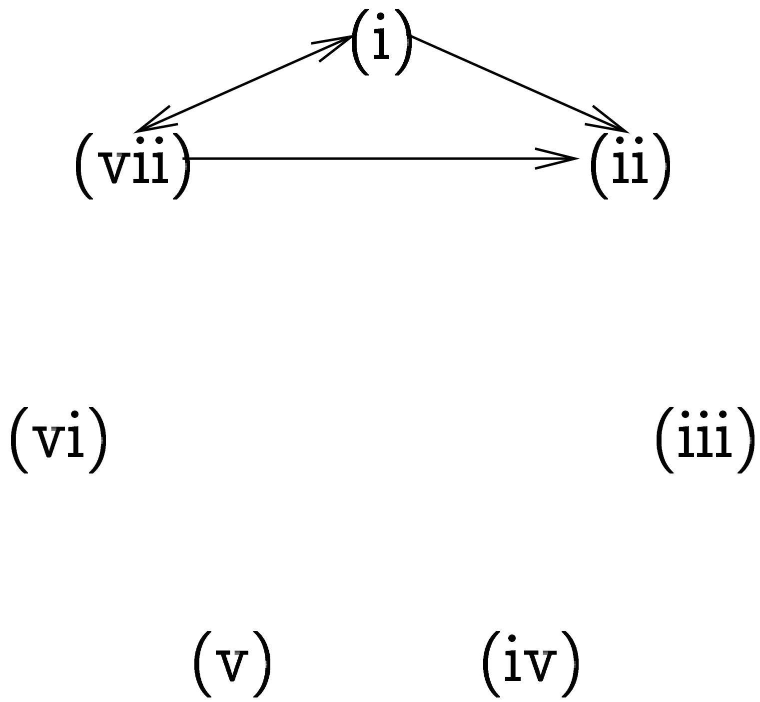
w valiku tõttu ei lõiku P_1 ja P_2 P_0-ga.



Olgu veel

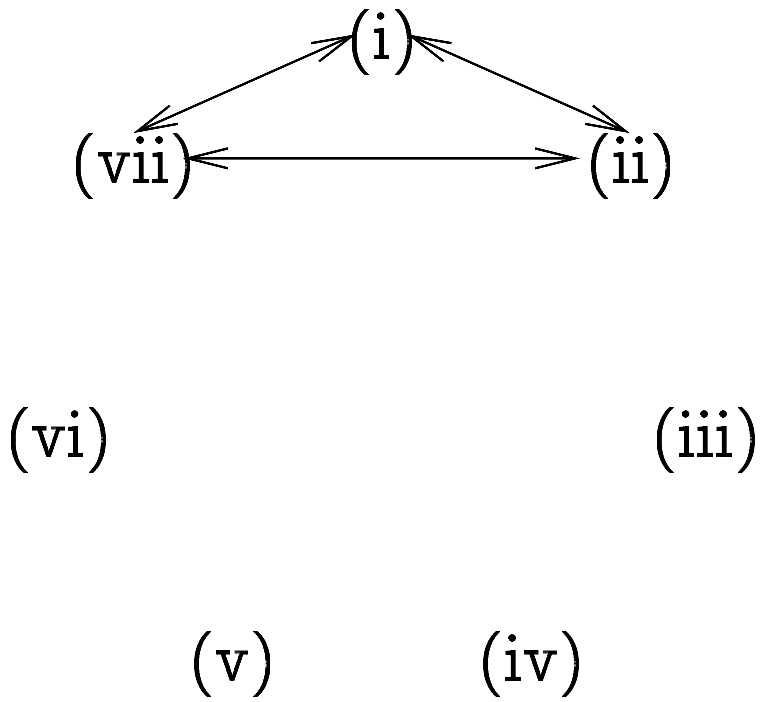
- P' mingi lihtahel $u \rightsquigarrow v$, mis ei läbi tippu w (leidub vastavalt väitele (vii));
- w' esimene (alates u-st) tipp ahelal P', mis asub ahelal P_0;
- u' viimane (alates u-st) tipp ahelal P' enne tippu w', mis asub ahelal P_1 või P_2. Üldisust kitsendamata loeme, et ahelal P_1.

$u \overset{P_2}{\rightsquigarrow} w \overset{P_0}{\rightsquigarrow} w' \overset{P'}{\rightsquigarrow} u' \overset{P_1}{\rightsquigarrow} u$ on tsükkel, seega $w' \in U$ ja $d(w', v) < d(w, v)$. Vastuolu w valikuga.


(i)
(ii)
(iii)
(iv)
(v)
(vi)
(vii)

(ii) $\Rightarrow$ (vii)

Olgu $u, v, w \in V$. Leidub tsükkel, millel asuvad u ja w, seega leiduvad kaks mittelõikuvat lihtahelat $u \rightsquigarrow w$. Vähemalt üks neist ahelatest ei läbi v-d.

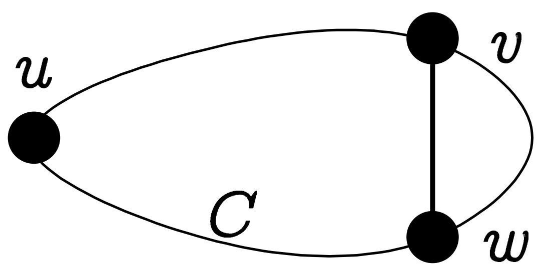


(i)
(vii)
(ii)
(vi)
(iii)
(v)
(iv)

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

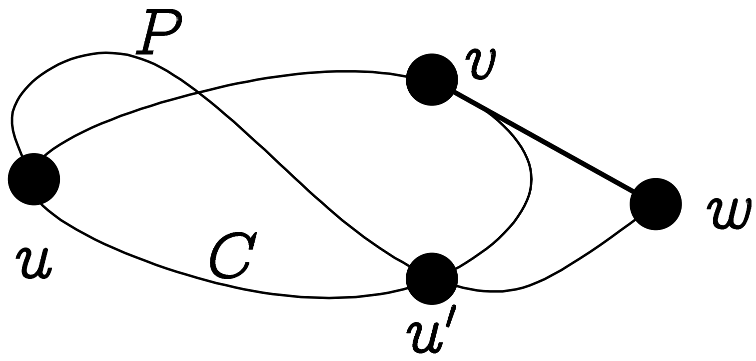
Olgu $u \in V$ ja $(v, w) \in E$. Olgu C tsükkel, millel asuvad u ja v.

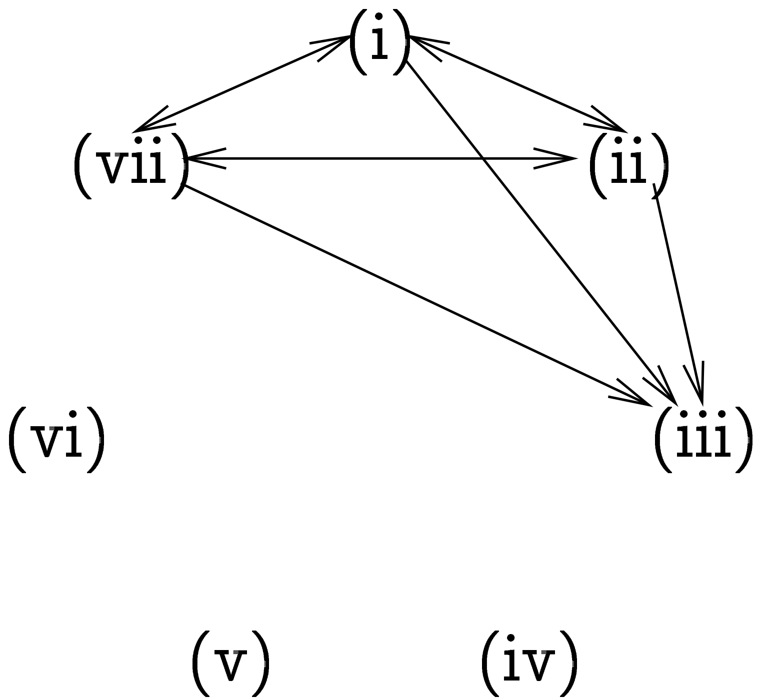
Kui w asub C-l, siis asendame C lõigu v ja w vahel servaga (v, w).



Kui w ei asu C-l, siis olgu P ahel u ja w vahel, mis ei sisalda tippu v (leidub tänu väitele (vii)). Olgu u' viimane (alates u-st) tipp sellel ahelal, mis asub tsüklil C.

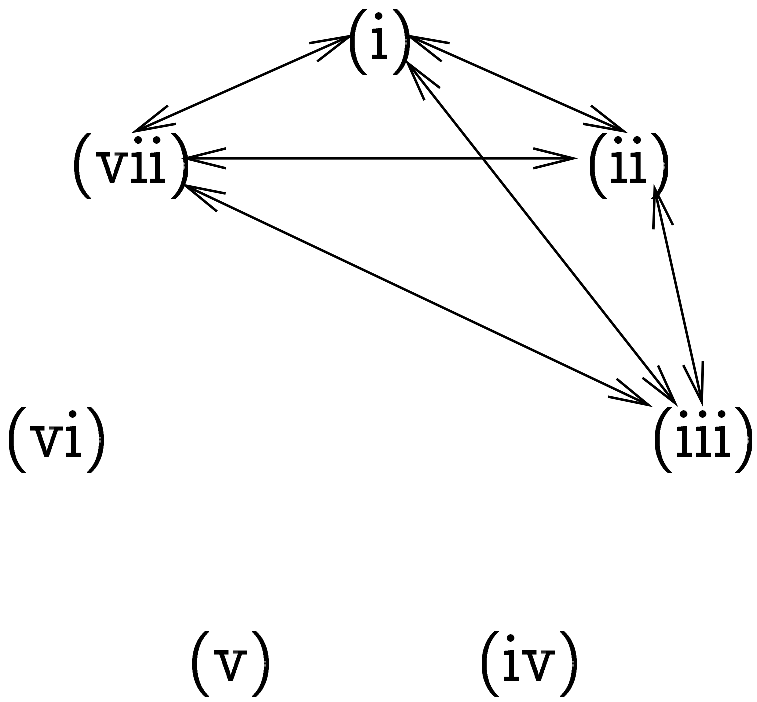
Tsüklis C asendame lõigu u' ja v vahel lõiguga
$u' \overset{P}{\rightsquigarrow} w — v$.




(i)
(vii)
(ii)
(vi)
(iii)
(v)
(iv)

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Olgu $u, v \in V$. Olgu w mõni v-ga intsidentne tipp (leidub, sest G on sidus). Tsükkel, mis läbib tippu u ja serva (v, w), läbib tippe u ja v.

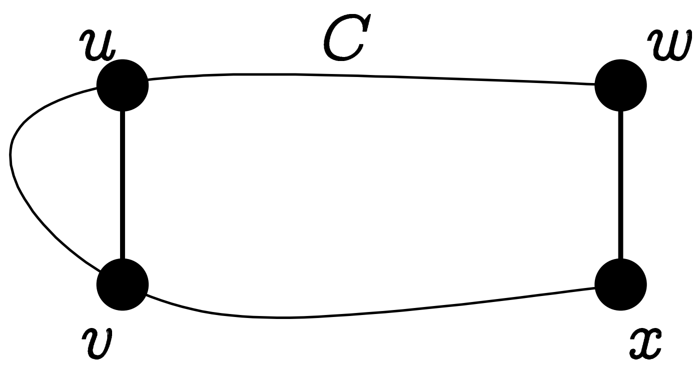

(i)
(vii)
(ii)
(vi)
(iii)
(v)
(iv)

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Olgu $(u, v), (w, x) \in E$. Kui neil kahel serval on ühine tipp, näiteks $v = w$, siis otsitav tsükkel moodustub neist kahest servast ja ahelast $u \rightsquigarrow x$ graafis $G \backslash v$. See ahel leidub väite (i) tõttu.

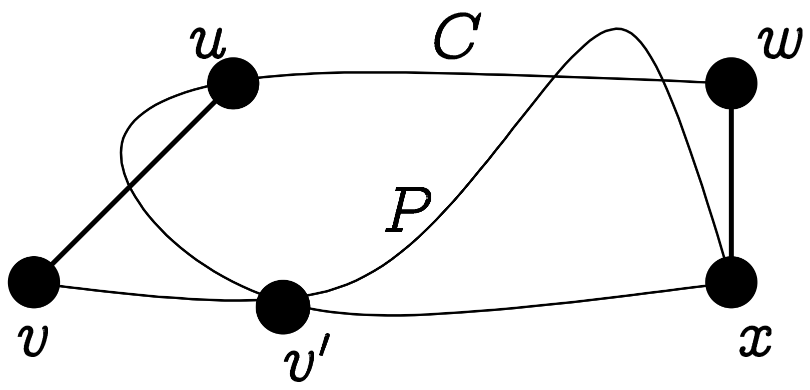
Kui u, v, w, x on kõik erinevad, siis olgu C tsükkel, mis sisaldab tippu u ja serva (w, x).

Kui v asub C-l, siis asendame C-s lõigu u ja v vahel servaga (u, v).

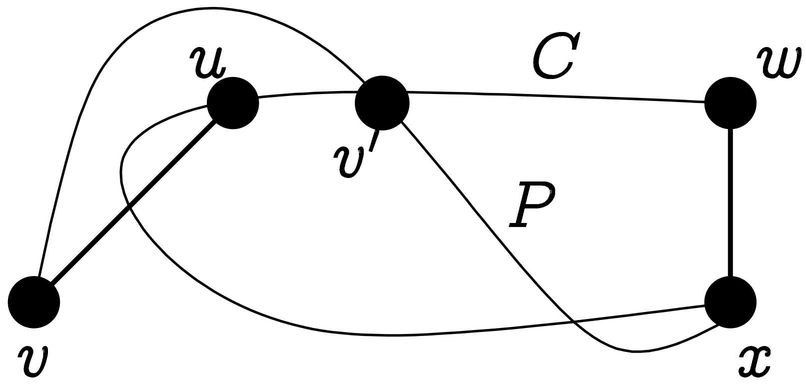


Olgu P ahel $x \rightsquigarrow v$, mis ei läbi tippu u (selline leidub tänu väitele (vii)). Olgu v' viimane (x-st alates) tipp sellel ahelal, mis asub tsüklil C.

Kui v' asub C-l tippude u ja x vahel, siis on otsitavaks tsükliks $x \overset{C}{\rightsquigarrow} v' \overset{P}{\rightsquigarrow} v — u \overset{C}{\rightsquigarrow} w — x$.

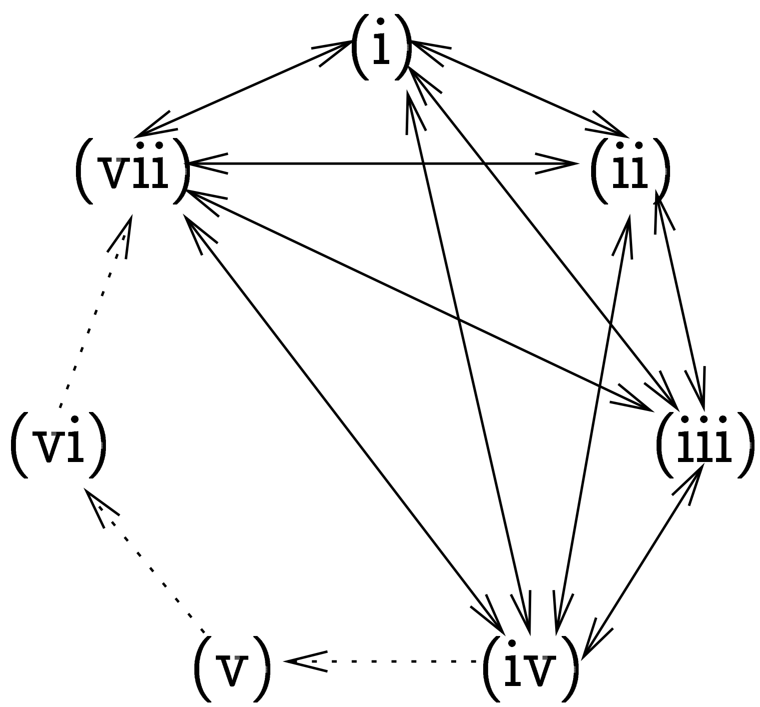


Kui v' asub C-l tippude u ja w vahel, siis on otsitavaks tsükliks $x \overset{C}{\rightsquigarrow} u — v \overset{P}{\rightsquigarrow} v' \overset{C}{\rightsquigarrow} w — x$.



(iv) $\Rightarrow$ (iii)

Nagu (iii) $\Rightarrow$ (ii)


(i)
(vii)
(ii)
(vi)
(iii)
(v)
(iv)

(iv) $\Rightarrow$ (v)

Olgu $u, v \in V$ ja $(w, x) \in E$. Kuna (iv) kehtib, siis graaf G on blokk. Olgu

$$G' = \begin{cases} G & \text{kui } (u, v) \in E \\ G + (u, v) & \text{kui } (u, v) \notin E \end{cases} .$$

Sidusasse graafi servi lisades lõiketippe juurde ei teki, seega on ka G' blokk ja temas kehtib (iv).

Vastavalt (iv)-le leidub G'-s tsükkel C, kuhu kuuluvad servad (u, v) ja (w, x).

Eemaldades C-st serva (u, v) saame lihtahela, mis ühendab u ja v ning läbib serva (w, x).

Selle lihtahela kõik servad on graafis G.

(v) $\Rightarrow$ (vi)

Olgu $u, v, w \in V$. Olgu x mingi v naabertipp. (v) järgi leidub lihtahel $P : u \rightsquigarrow w$, mis sisaldab serva (v, x), seega ka tippu v.

(vi) $\Rightarrow$ (vii)

Olgu $u, v, w \in V$. (vi) järgi leidub lihtahel $P : u \rightsquigarrow v$, mis sisaldab tippu w. Selle ahela lõik u-st w-ni ei sisalda tippu v. $\square$