Võrgud ja vood
Ford-Fulkersoni algoritm

10. oktoober 2002

14. oktoober 2003

Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf.

Suunatud graafi tipu $v \in V$ jaoks on defineeritud tema *sisendaste* $\overrightarrow{\deg}(v)$ ja *väljundaste* $\overleftarrow{\deg}(v)$.

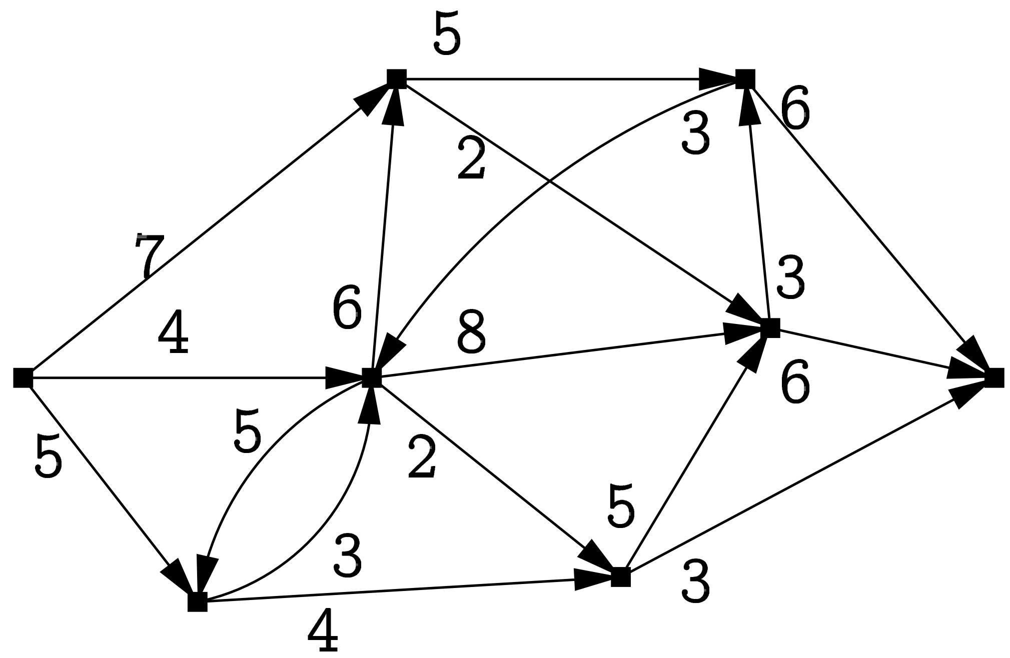
Kui $\overrightarrow{\deg}(v) = 0$, siis on v graafi G *lähe*. Kui $\overleftarrow{\deg}(v) = 0$, siis on v graafi G *suue*.

Läbilaskevõime G-l on mingi funktsioon $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Tipu $v \in V$ *ψ-sisendaste* on $\overrightarrow{\deg_\psi}(v) = \sum\limits_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(u,v)}} \psi(e)$.

ψ-väljundaste on $\overleftarrow{\deg_\psi}(v) = \sum\limits_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(v,u)}} \psi(e)$.

Võrk on paar (G, ψ), kus G on mingi suunatud graaf ja ψ mingi läbilaskevõime sellel.


5
6
3
2
7
3
6
4
8
6
5
5
2
5
3
3
4

Lause. Graafi $G = (V, E)$ kõigi tippude ψ-sisendastmete summa on võrdne G kõigi tippude ψ-väljundastmete summaga.

Tõestus.

$$\sum_{v \in V} \overrightarrow{\deg_\psi}(v) = \sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(u,v)}} \psi(e) = \sum_{e \in E} \psi(e) =$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{\substack{e \in E \\ \mathcal{E}(e)=(v,u)}} \psi(e) = \sum_{v \in V} \overleftarrow{\deg_\psi}(v) \ .$$

$\square$

Olgu (G, ψ) võrk. Loeme, et G-l on täpselt üks lähe s ja täpselt üks suue t.

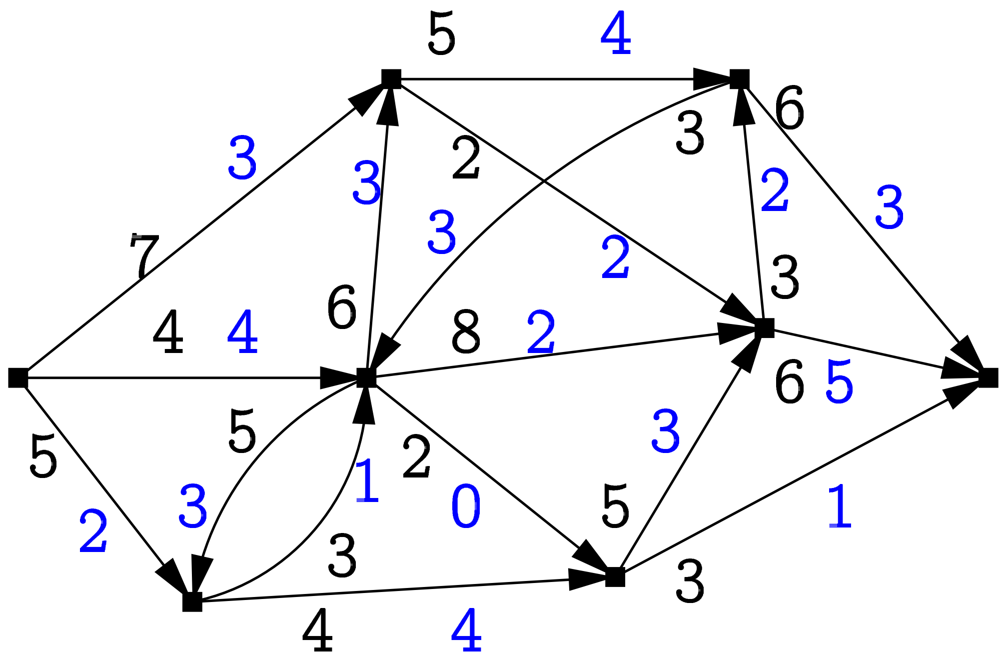
Voog võrgul (G, ψ) on mingi funktsioon $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, nii et

- $\varphi(e) \leq \psi(e)$ iga $e \in E$ jaoks.
- $\overrightarrow{\deg_\varphi}(v) = \overleftarrow{\deg_\varphi}(v)$ iga $v \in V \backslash \{s, t\}$ jaoks.

Eelmisest lausest järeldub $\overleftarrow{\deg_\varphi}(s) = \overrightarrow{\deg_\varphi}(t)$. Seda suurust nimetame voo φ *väärtuseks* ja tähistame $|\varphi|$.

Voog on *maksimaalne*, kui tema väärtus on maksimaalne võimalik.

Tänases loengus loeme, et graafis $G = (V, E)$ pole silmuseid ja kordseid suunatud servi. Siis võime lugeda $E \subseteq V \times V$.



5
4
6
3
2
3
3
2
3
3
7
2
3
6
4
4
8
2
6
5
5
5
2
3
3
1
2
0
5
3
1
4
4

Lemma. Olgu (G, ψ) võrk, kus $G = (V, E)$. Olgu $V = V_s \dot\cup V_t$, nii et $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Olgu

$$\Phi(V_s, V_t) = \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \varphi(e) - \sum_{e \in E \cap (V_t \times V_s)} \varphi(e) \ .$$

Siis on $\Phi(V_s, V_t)$ võrdne φ väärtusega.

Tõestus. Induktsioon üle $|V_s|$.

Baas. $|V_s| = 1$. Siis $V_s = \{s\}$. Hulk $V_s \times V_t$ sisaldab parasjagu kõik s-st väljuvad servad ja hulk $V_t \times V_s$ on tühi.

Samm. Kehtigu lause väide mingite hulkade V_s ja V_t jaoks. Olgu $x \in V_t \backslash \{t\}$, $V_s' = V_s \cup \{x\}$ ja $V_t' = V_t \backslash \{x\}$. Piisab, kui näitame, et $\Phi(V_s, V_t) = \Phi(V_s', V_t')$.

$\Phi(V_s, V_t)$:

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s		$+\varphi$	$+\varphi$
x	$-\varphi$		
V_t'	$-\varphi$		

$\Phi(V_s', V_t')$:

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s			$+\varphi$
x			$+\varphi$
V_t'	$-\varphi$	$-\varphi$	

$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V_s', V_t') =$

$V \times V$	V_s	x	V_t'
V_s		$+\varphi$	
x	$-\varphi$		$-\varphi$
V_t'		$+\varphi$	

$$= \overrightarrow{\deg}_\varphi(x) - \overleftarrow{\deg}_\varphi(x) = 0 \ . \qquad \square$$

Võrgu (G, ψ), kus $G = (V, E)$, *lõige* on mingi servade hulk $L \subseteq E$, nii et iga suunatud tee G lähtest suudmesse kasutab mõnda serva hulgast L.

Alternatiivselt: $L \subseteq E$ on lõige, kui graafis $(V, E \backslash L)$ ei leidu ühtki suunatud teed tipust s tippu t.

Lõike L *läbilaskevõime* on summa $\sum_{e \in L} \psi(e)$. Tähistame $\psi(L)$.

Lõige on *minimaalne*, kui tema läbilaskevõime on minimaalne võimalik.

Teoreem (Ford ja Fulkerson). Võrgu maksimaalsete voogude väärtus on võrdne selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõimega.

Tõestus. Olgu (G, ψ) võrk, olgu $G = (V, E)$. Olgu s tema lähe ja t tema suue. Näitame, et

I. Ühegi voo väärtus pole suurem kui ühegi lõike läbilaskevõime.

II. Maksimaalse voo jaoks leidub lõige, mille läbilaskevõime on võrdne selle voo väärtusega.

I osa. Olgu φ mingi voog ja L mingi lõige.

Olgu $V_s \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, kuhu leidub tipust s suunatud tee, kasutamata servi hulgast L. Olgu $V_t = V \backslash V_s$. Kuna $E \cap (V_s \times V_t) \subseteq L$, siis

$$\psi(L) \geq \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \psi(e) \geq \sum_{e \in E \cap (V_s \times V_t)} \varphi(e) \geq \Phi(V_s, V_t) = |\varphi| \ .$$

II osa. Olgu φ mingi maksimaalne voog.

Olgu $V_s \subseteq V$ kõigi selliste tippude v hulk, et:
Leidub *suunamata* tee $s = v_0 \overset{e_1}{\text{---}} v_1 \overset{e_2}{\text{---}} \cdots \overset{e_m}{\text{---}} v_m = v$, nii et

- Kui $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, siis $\varphi(e_i) < \psi(e_i)$.
- Kui $e_i = (v_i, v_{i-1})$, siis $\varphi(e_i) > 0$.

Ütleme, et tippude v_{i-1} ja v_i vahel on voog *küllastamata*.

Sellist teed nimetame *suurendavaks*.

Olgu $V_t = V \backslash V_s$. Näitame, et $t \in V_t$. Tõepoolest, kui $t \in V_s$, siis pole φ maksimaalne:

Olgu $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$ mingi suurendav tee. Defineerime positiivsed reaalarvud δ_i järgmiselt:

$$\delta_i = \begin{cases} \psi(e_i) - \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases} .$$

Olgu $\varepsilon = \min\limits_i \delta_i$. Olgu φ' järgmine voog:

$$\varphi'(e) = \begin{cases} \varphi(e), & \text{kui } e \notin \{e_1, \ldots, e_m\} \\ \varphi(e) + \varepsilon, & \text{kui } e = e_i = (v_{i-1}, v_i) \\ \varphi(e) - \varepsilon, & \text{kui } e = e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases} .$$

Siis φ' on voog ja $|\varphi'| = |\varphi| + \varepsilon$.

Hulkade V_s ja V_t konstruktsioon annab:

- Kui $e \in E \cap (V_s \times V_t)$, siis $\varphi(e) = \psi(e)$.
- Kui $e \in E \cap (V_t \times V_s)$, siis $\varphi(e) = 0$.

Olgu $L = E \cap (V_s \times V_t)$. Siis L on lõige ja $\psi(L) = |\varphi|$. $\square$

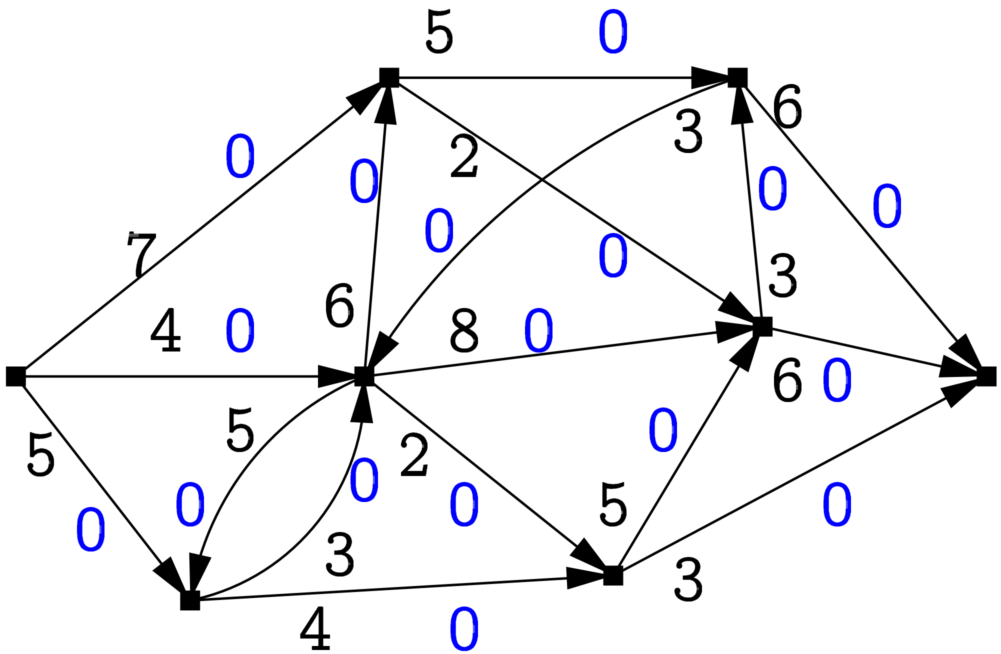
Algoritm max. voo leidmiseks (Ford-Fulkerson). Olgu (G, ψ) võrk, kus $G = (V, E)$.

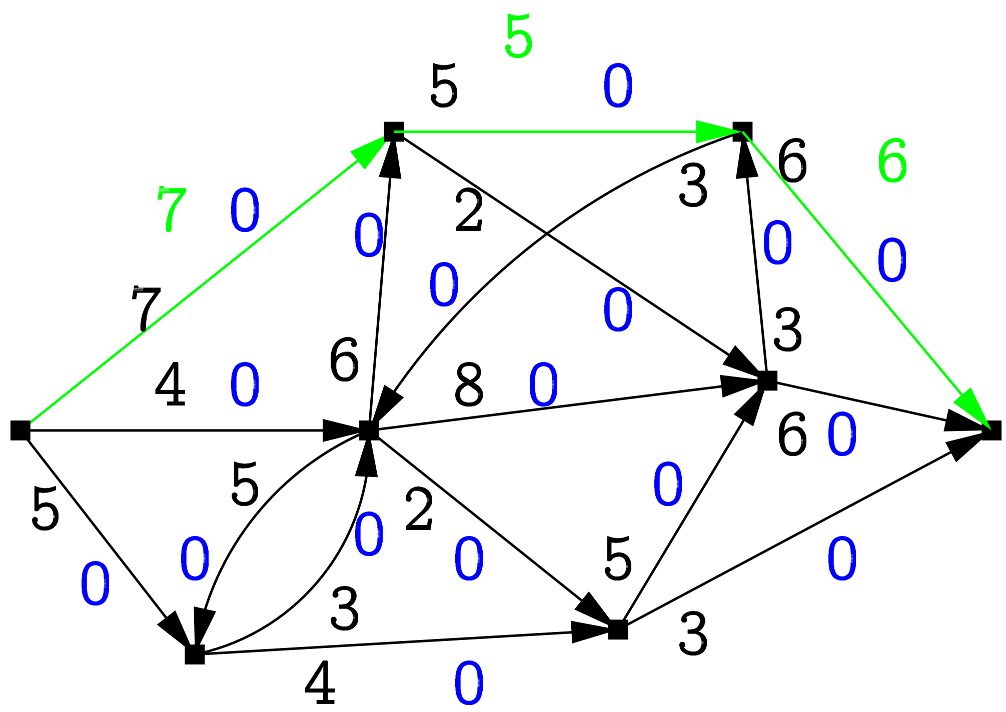
Olgu φ mingi voog võrgul (G, ψ), näiteks $\forall e : \varphi(e) = 0$.

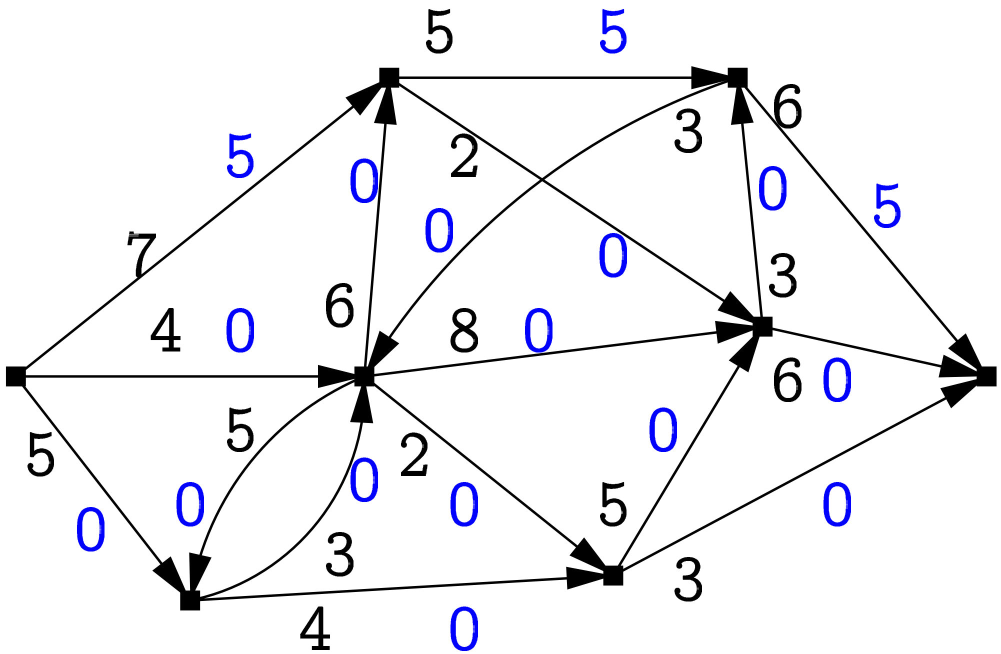
Korda:

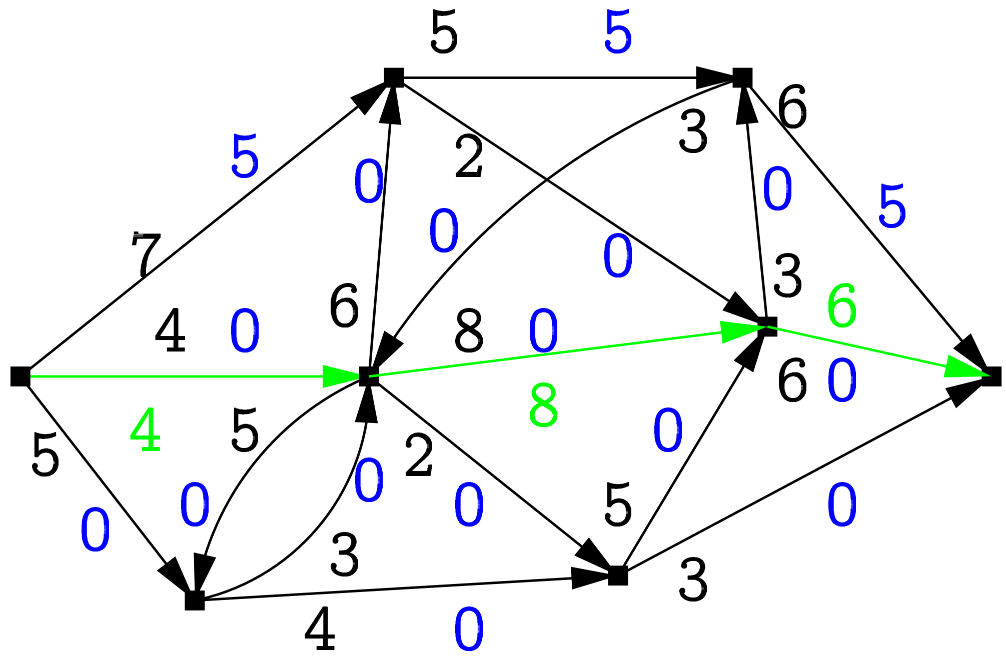
1. Leia mingi suurendav tee $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$. Kui sellist teed ei leidu, siis lõpeta ja väljasta φ.
2. Konstrueeri φ' nagu kujutatud 2 slaidi tagasi.
3. Omista $\varphi := \varphi'$.

Mingi suurendav tee leitakse graafi mingil viisil läbides.

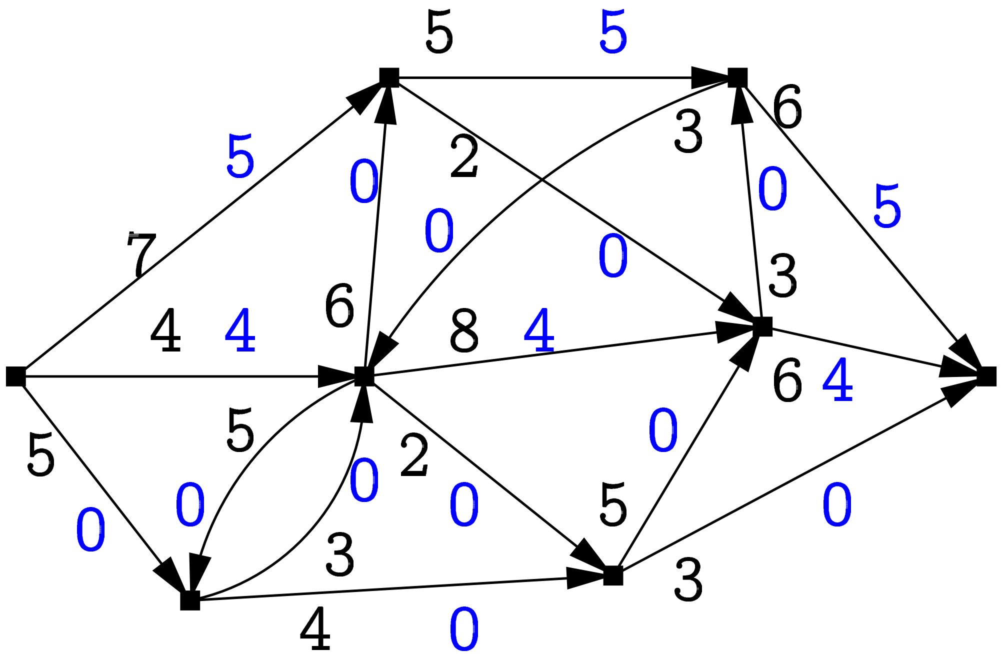

5
0
6
3
0
2
0
0
0
0
7
3
0
4
0
6
8
0
6
0
5
5
0
0
0
2
0
5
0
3
3
0
4
0

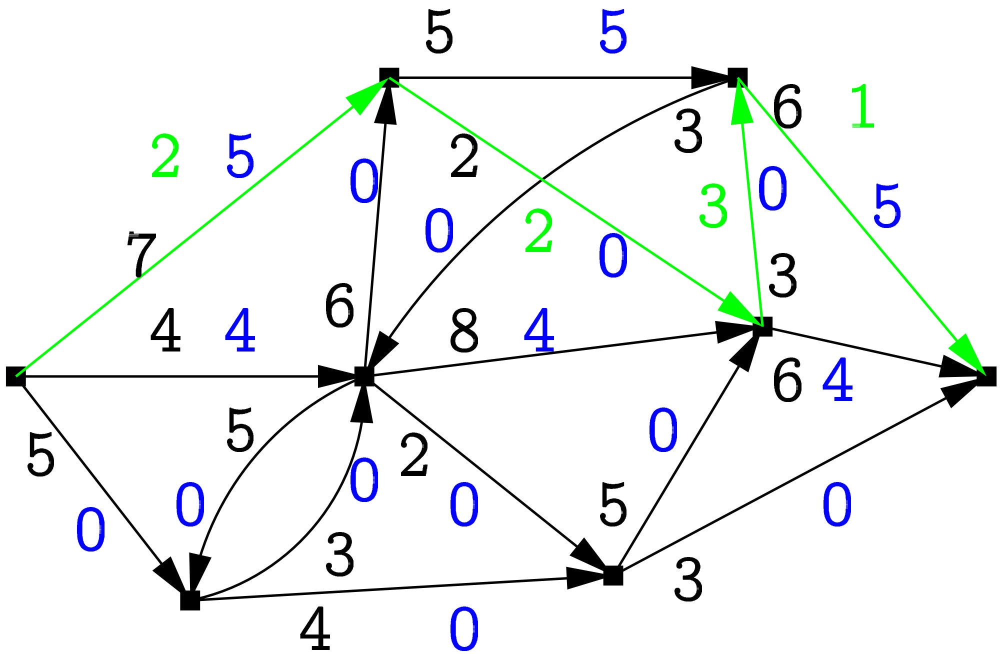

5
5
0
6
6
7
0
3
0
2
0
0
0
7
3
6
4
0
8
0
6
0
5
0
5
0
2
0
0
5
3
0
4
0
3

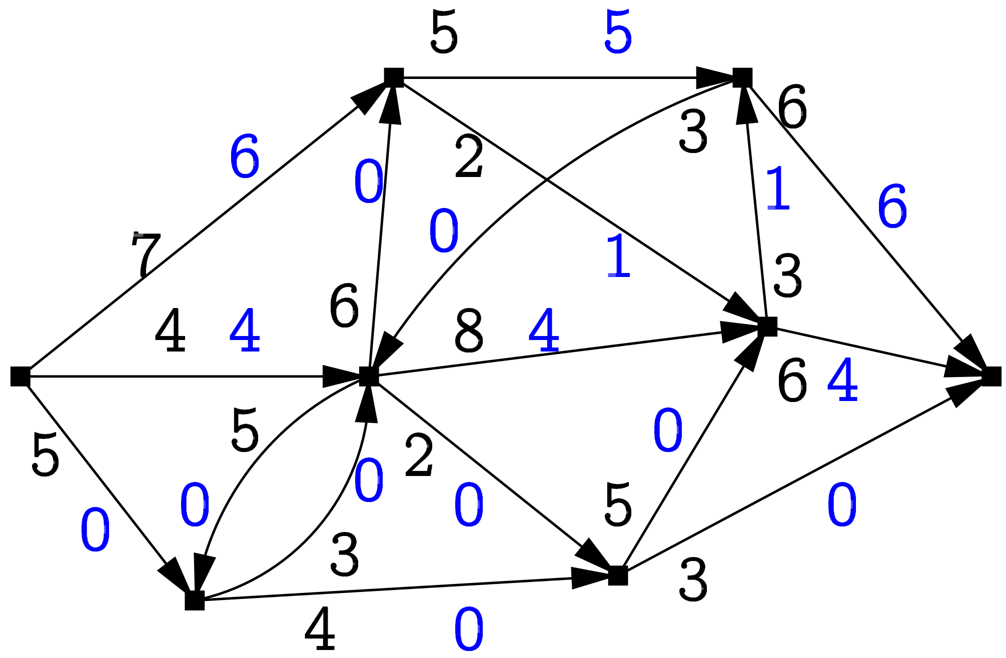

5
5
6
3
5
2
0
0
5
0
7
3
0
6
4
0
8
0
6
0
5
5
0
0
2
0
0
5
3
0
3
4
0

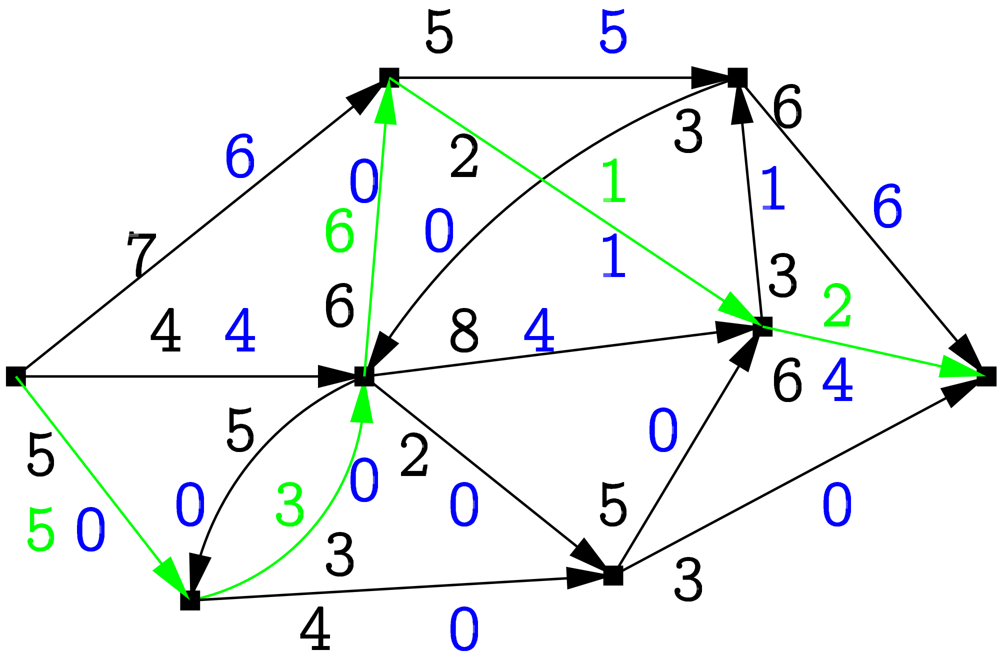


5
5
6
5
3
2
0
0
5
0
7
0
3
6
4
0
6
8
0
6
0
4
5
8
0
5
2
0
0
0
5
0
3
3
4
0

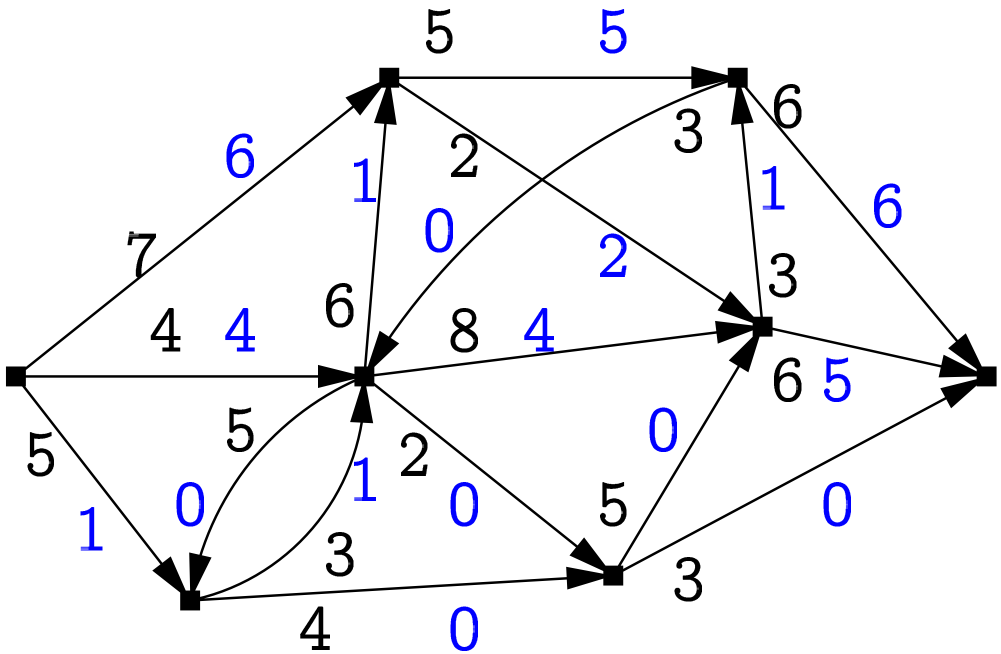

5
5
5
7
0
2
3
6
0
0
5
0
3
4
4
6
8
4
6
4
5
0
5
2
0
0
0
5
3
0
3
4
0

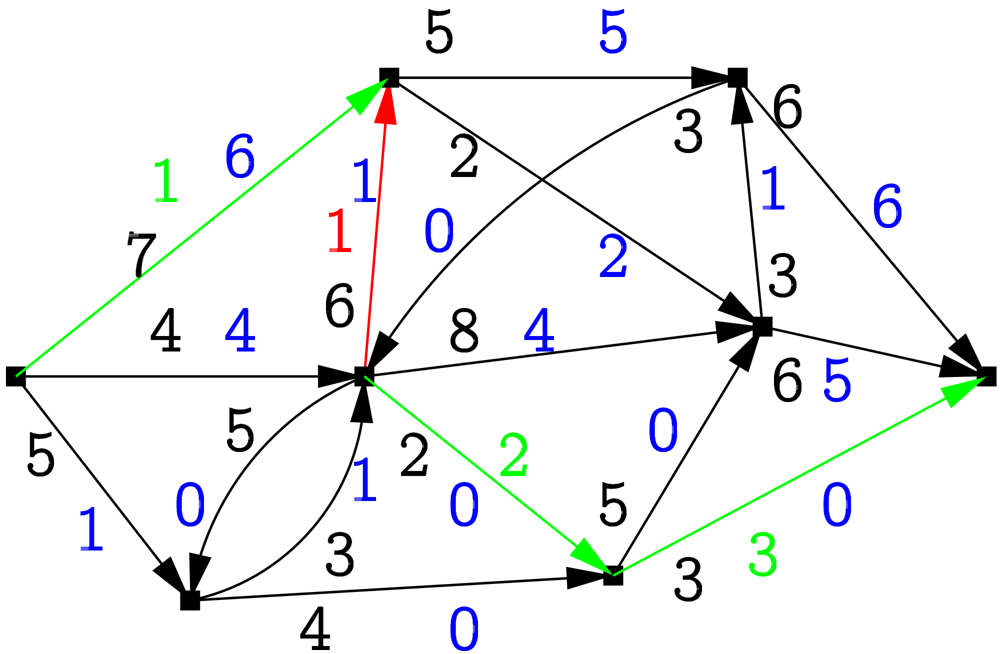

5
5
6
1
2
5
3
2
0
0
3
5
7
0
2
0
3
6
4
4
8
4
6
4
5
5
0
2
0
0
0
5
0
0
3
3
4
0


5
5
6
6
3
2
0
1
7
0
6
1
3
4
4
6
8
4
6
4
5
5
0
0
0
2
0
5
0
0
3
3
4
0

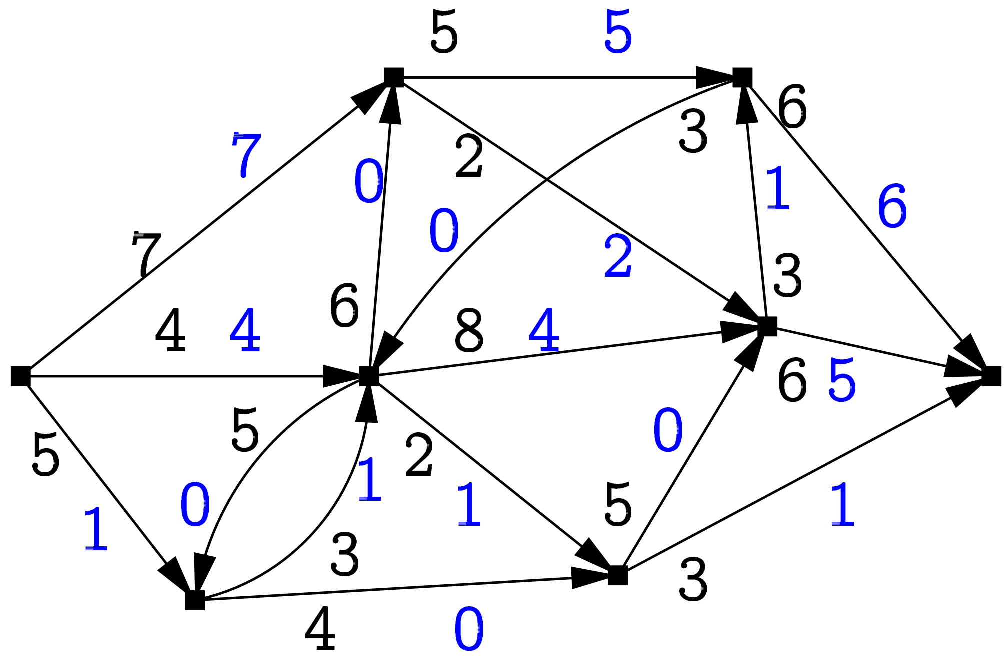


5
5
6
6
7
3
2
0
1
6
0
1
1
4
4
6
3
2
8
4
6
4
5
5
2
0
0
0
5
0
3
0
5
3
3
4
0

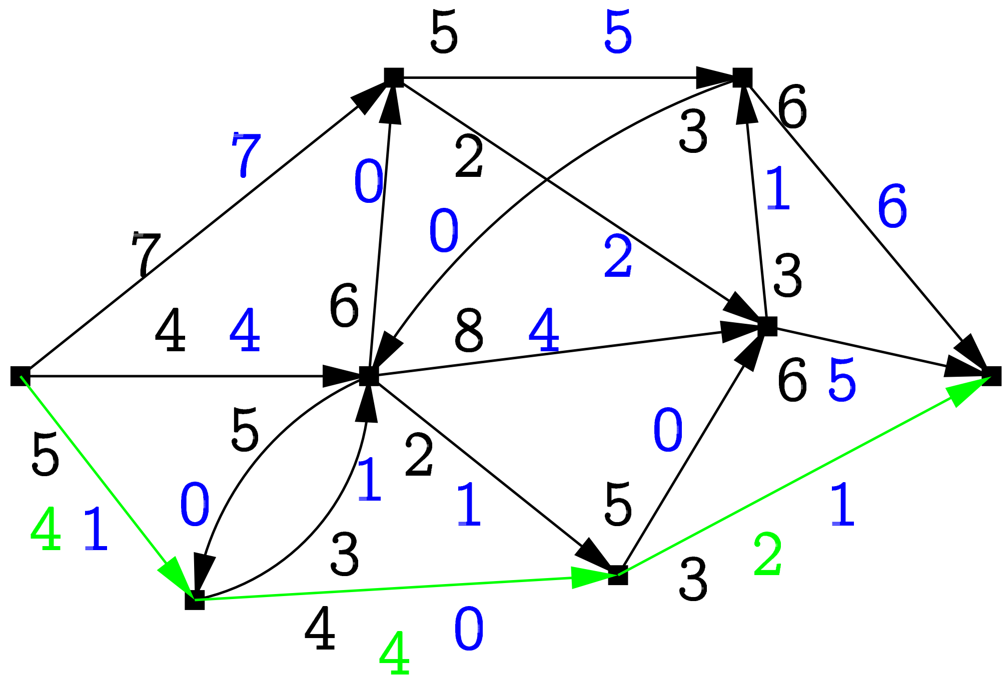

5
5
6
6
7
1
2
3
0
2
1
6
6
3
4
4
8
4
5
5
6
5
0
1
2
1
0
0
5
3
3
4
0



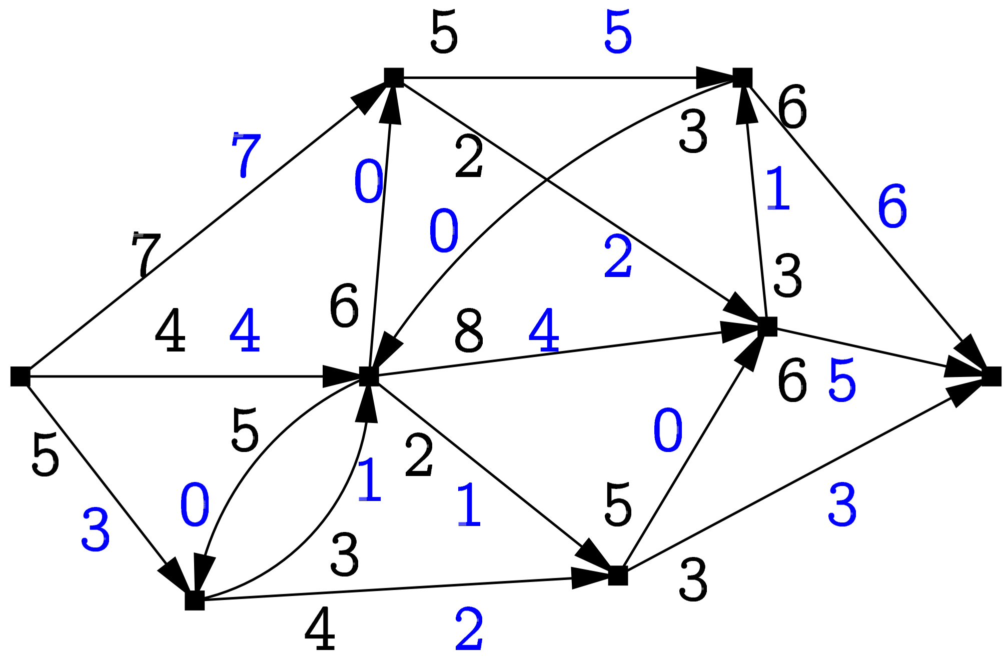
5
5
6
3
1
6
2
1
6
1
0
7
2
3
6
4
4
8
4
6
5
5
2
2
0
1
5
0
1
0
0
5
3
3
3
4
0

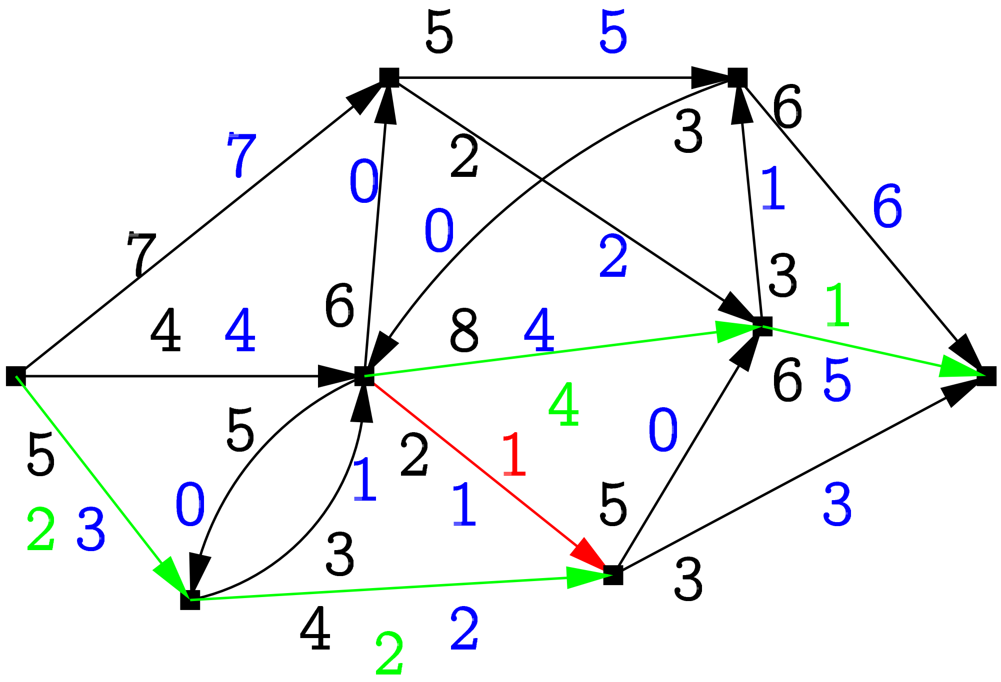


5
5
6
3
7
2
0
1
6
0
2
7
3
4
4
6
8
4
6
5
5
0
5
2
0
1
1
1
5
3
3
4
0

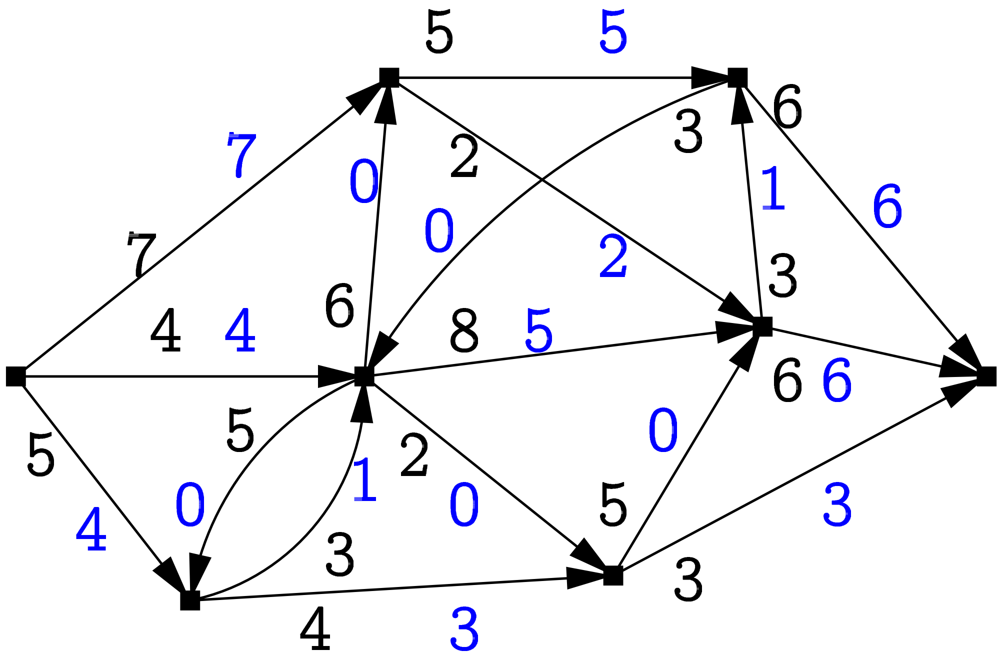


5
5
7
6
3
0
2
1
6
0
7
2
3
4
4
6
8
4
6
5
5
0
5
2
0
1
1
5
4
1
3
3
2
4
4
0


5
5
7
6
3
2
0
1
0
6
7
2
3
6
4
4
8
4
6
5
5
5
2
0
3
0
1
1
5
3
3
3
4
2



5
5
6
7
3
2
0
1
6
7
0
2
3
1
6
4
4
8
4
6
5
4
0
5
5
2
1
0
1
5
2
3
3
3
3
4
2
2



5
5
6
7
3
2
0
1
6
0
2
7
3
6
4
4
8
5
6
6
5
0
5
0
2
1
0
5
4
3
0
3
3
4
3

Suurendava tee leidmine:

Olgu $V_s = \{s\}$, $W = \{s\}$.

Korda, seni kuni $W \neq \emptyset$ ja $t \notin V_s$.

1. Vali mingil viisil $v \in W$. Eemalda ta hulgast W.
2. Iga $e \in E$ jaoks, mille üks otspunkt on v: kui v ja serva e teise otspunkti w vahel on voog küllastamata ning kui $w \notin V_s$, siis
   (a) lisa w hulkadesse V_s ja W.
   (b) Jäta meelde, et w-le „eelnev tipp“ on v.

Kui $t \notin V_s$, siis ei leidu suurendavat teed. Kui $t \in V_s$, siis konstrueeri suurendav tee, liikudes t-st mööda „eelnevaid tippe“ tippu s.

Lause. Kui võrgu kõigi servade läbilaskevõimed on täisarvulised, siis täidetakse max. voo leidmise algoritmis tsüklit ülimalt $|\varphi|$ korda, kus φ on mingi maksimaalne voog.

Tõestus. Igal iteratsioonil suureneb juba leitud voo väärtus. Kuna murdarvud ei saa mitte kuskilt sisse tulla, siis suureneb ta iga kord vähemalt 1 võrra. $\square$

Loeme nüüd, et suurendav tee lähtest suudmesse leitakse graafi laiuti läbides (Edmonds-Karpi täiendus).

Siis on leitud suurendaval teel $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$ järgmine omadus:
Iga i jaoks on $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_i} v_i$ lühima pikkusega suurendav tee lähtest tippu v_i.

Kui (G, ψ), kus $G = (V, E)$ on mingi võrk ja φ mingi voog sellel, siis tähistagu $\delta_\varphi(v)$, kus $v \in V$, lühima suurendava tee pikkust lähtest tippu v.

Lemma. Olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ voogude jada, mis tekivad max. voo leidmise algoritmi järjestikustel iteratsioonidel. Siis on suvalise $v \in V$ jaoks jada $\delta_{\varphi_i}(v)$ mittekahanev.

Tõestus. Vaatame mingeid vooge φ_n ja φ_{n+1} selles voogude jadas, olgu $B = \{v \mid \delta_{\varphi_{n+1}}(v) < \delta_{\varphi_n}(v)\}$. Oletame vastuväiteliselt, et B pole tühi. Olgu $v \in B$ selline, mille jaoks $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ on minimaalne.

Olgu P' lühim suurendav tee lähtest tippu v voo φ_{n+1} järgi. Olgu u selle tee eelviimane tipp. Kuna $\delta_{\varphi_{n+1}}(u) < \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$, siis $u \notin B$.

Vaatame voogu φ_n tippude u ja v vahel.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastamata, siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) + 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja seega $v \notin B$, vastuolu.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastatud, siis olgu P_n suurendav tee lähtest suudmesse, nii et φ_{n+1} on konstrueeritud φ_n-st, lisades talle täiendava voo läbi tee P_n.

Kuna lisamisel muutub voog u ja v vahel küllastamatuks, siis leidub tees P_n serv $\cdots — v — u — \cdots$. Vastavalt P_n omadustele $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1$. Saame

$$\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) - 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 2 < \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja seega $v \notin B$, vastuolu. $\square$

Teoreem. Max. voo leidmise algoritm teeb ülimalt $(|V|-2)\cdot|E|$ iteratsiooni.

Tõestus. Vaatame algoritmi mingit iteratsiooni (olgu ta järjekorranumber n). Sel iteratsioonil konstrueeritakse suurendav tee $P_n : s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_m} v_m = t$. Ütleme, et tipupaar (v_{i-1}, v_i) on *kriitiline*, kui talle vastav suurus δ_i (mis näitab, kui palju tuleb voogu tippude v_{i-1} ja v_i vahel suurendada, et ta küllastuks) on minimaalne (s.t. $\delta_i = \varepsilon$).

Igal iteratsioonil on vähemalt üks kriitiline tipupaar. Järgmisel iteratsioonil on see tipupaar küllastatud.

Loeme, mitmel iteratsioonil korda saab mingi tipupaar (u, v) kriitiline olla. Kui ta on kriitiline n-ndal iteratsioonil, siis $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) + 1$.

Et (u, v) saaks kunagi hiljem jälle kriitiline olla, peab millalgi olema iteratsioon nr. $n' > n$, millel leitav suurendav tee $P_{n'}$ sisaldab serva $\cdots — v — u — \cdots$. Siis

$$\delta_{\varphi_{n'}}(u) = \delta_{\varphi_{n'}}(v) + 1 \geq \delta_{\varphi_n}(v) + 1 = \delta_{\varphi_n}(u) + 2,$$

seega iga kord, kui (u, v) saab kriitiliseks, on $\delta_\varphi(u)$ eelmise korraga võrreldes vähemalt kahe võrra suurem.

Suurus $\delta_\varphi(u)$ ei saa olla suurem kui $|V| - 2$ (kui (u, v) on kriitiline). Seega on (u, v) kriitiline ülimalt $\frac{|V|-2}{2}$ korral. Meid huvitavaid paare (u, v) on ülimalt $2 \cdot |E|$ tükki. $\square$

Järgmise loengu ajal toimub kontrolltöö. Ta katab esimeses viies loengus (ja praktikumides) räägitu. Töö ajal on matejalide kasutamine lubatud.