Kooskõlad ja katted

24. oktoober 2002

28. oktoober 2003

Olgu meil hulk X. Me tahame selle hulga elemente paaridesse panna.

Kitsendus: suvalisi kahte elementi ei saa paari panna. Antud on hulk

$$P \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in X, x \neq y\},$$

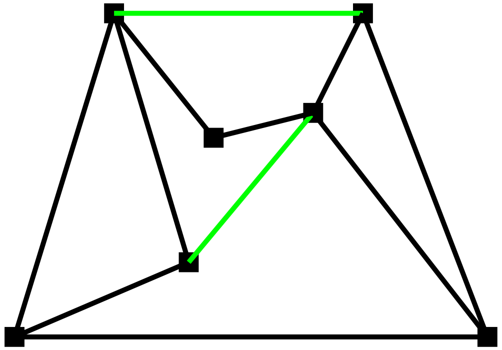
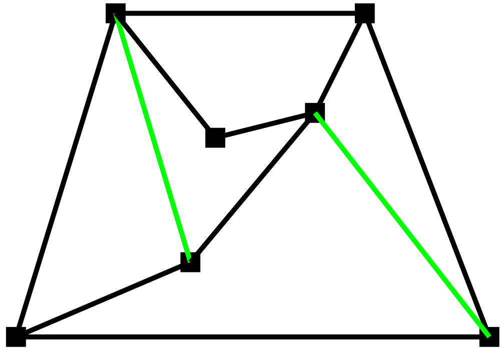
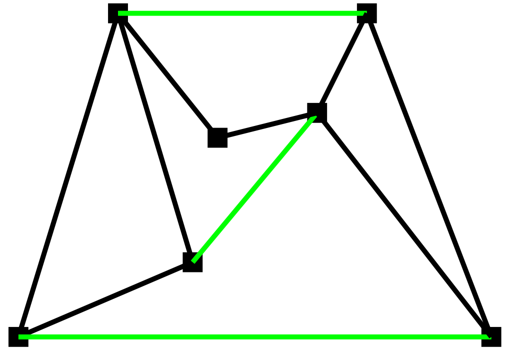
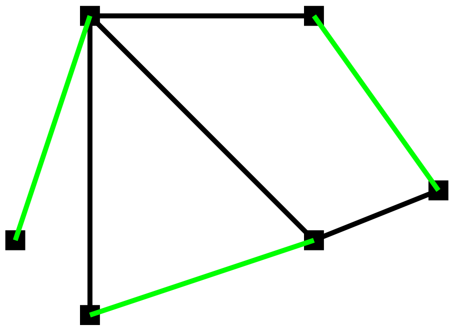
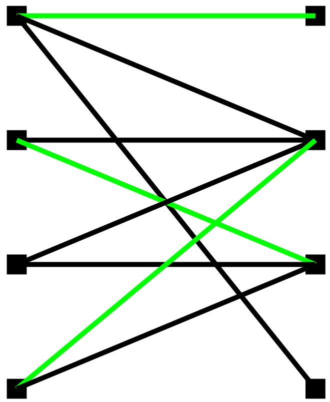
mis näitab, milliseid elemente üleüldse võib paari panna.

Paar (X, P) on lihtgraaf. Tänases loengus vaatamegi ainult lihtgraafe.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. *Kooskõla* graafis G on selline servade hulk $M \subseteq E$, et iga $v \in V$ jaoks $\deg_M(v) \leq 1$.

Kooskõla on *maksimaalne*, kui tema võimsus on suurim võimalik.

Kooskõla M on *täielik*, kui $\deg_M(v) = 1$ iga $v \in V$ jaoks.

Terminoloogiline märkus:

Ülo Kaasiku tungival soovitusel on eelmise aastaga võrreldes termineid muudetud:

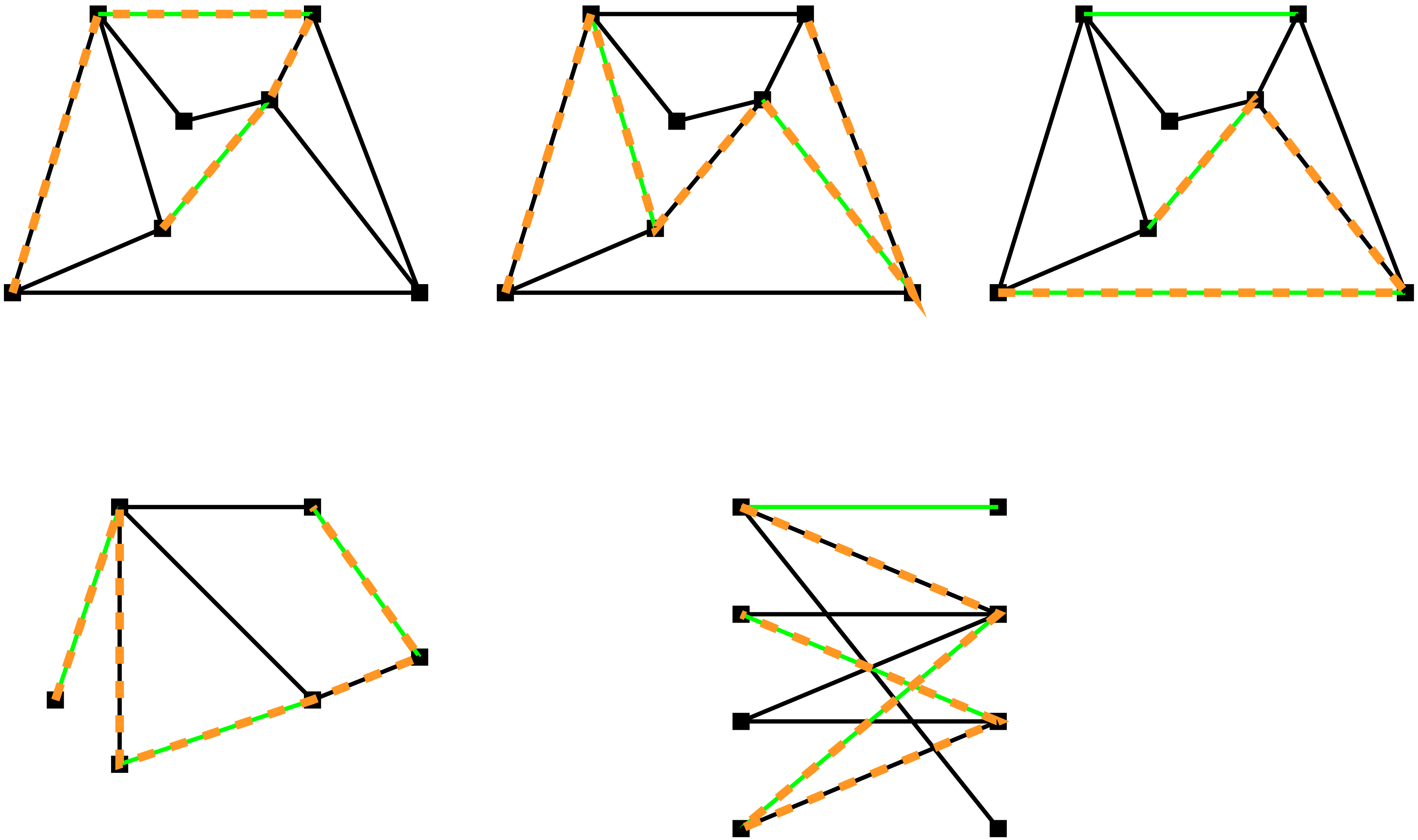
eelmisel aastal	sellel aastal
vastavus	kooskõla
kooskõla	täielik kooskõla

Põhjus: sõnale „vastavus“ ei ole ilus täiendavaid tähendusi anda.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu $M \subseteq E$ mingi kooskõla ja olgu P mingi lahtine lihtahel graafis G.

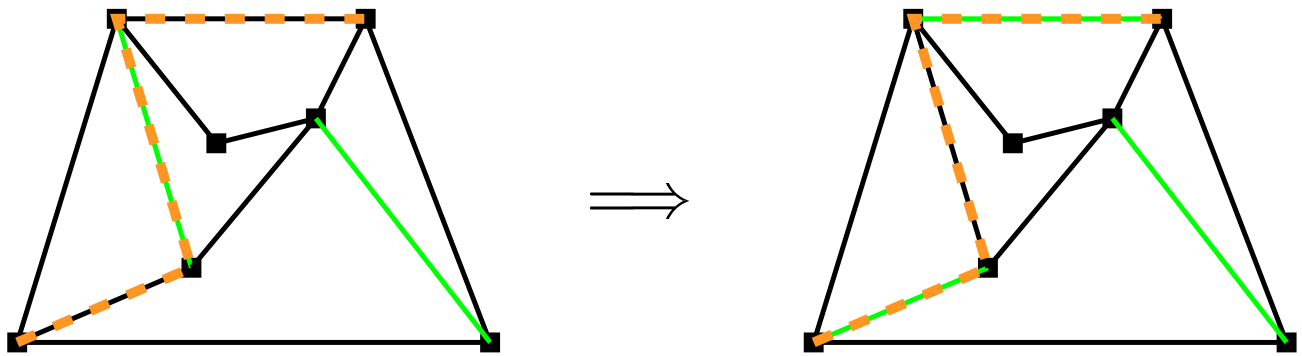
Ahel P on *M-vahelduv*, kui temas olevad servad kuuluvad vaheldumisi hulka M ja hulka $E \backslash M$.

Ahel P otstippudega x ja y on *M-laienev*, kui ta on M-vahelduv ning $\deg_M(x) = \deg_M(y) = 0$.



Teoreem (Berge). Kooskõla M graafis $G = (V, E)$ on maksimaalne parajasti siis, kui G-s ei leidu M-laienevat ahelat.

Tõestus $\Rightarrow$. Oletame vastuväiteliselt, et graafis G leidub mingi M-laienev ahel P.



Vaatame P-d kui servade hulka.

Olgu $M' = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$. Siis $|M'| = |M| + 1$.

Lihtne on kontrollida, et M' on kooskõla. Olgu $v \in V$, kontrollime, et $\deg_{M'}(v) \leq 1$. On kolm võimalust.

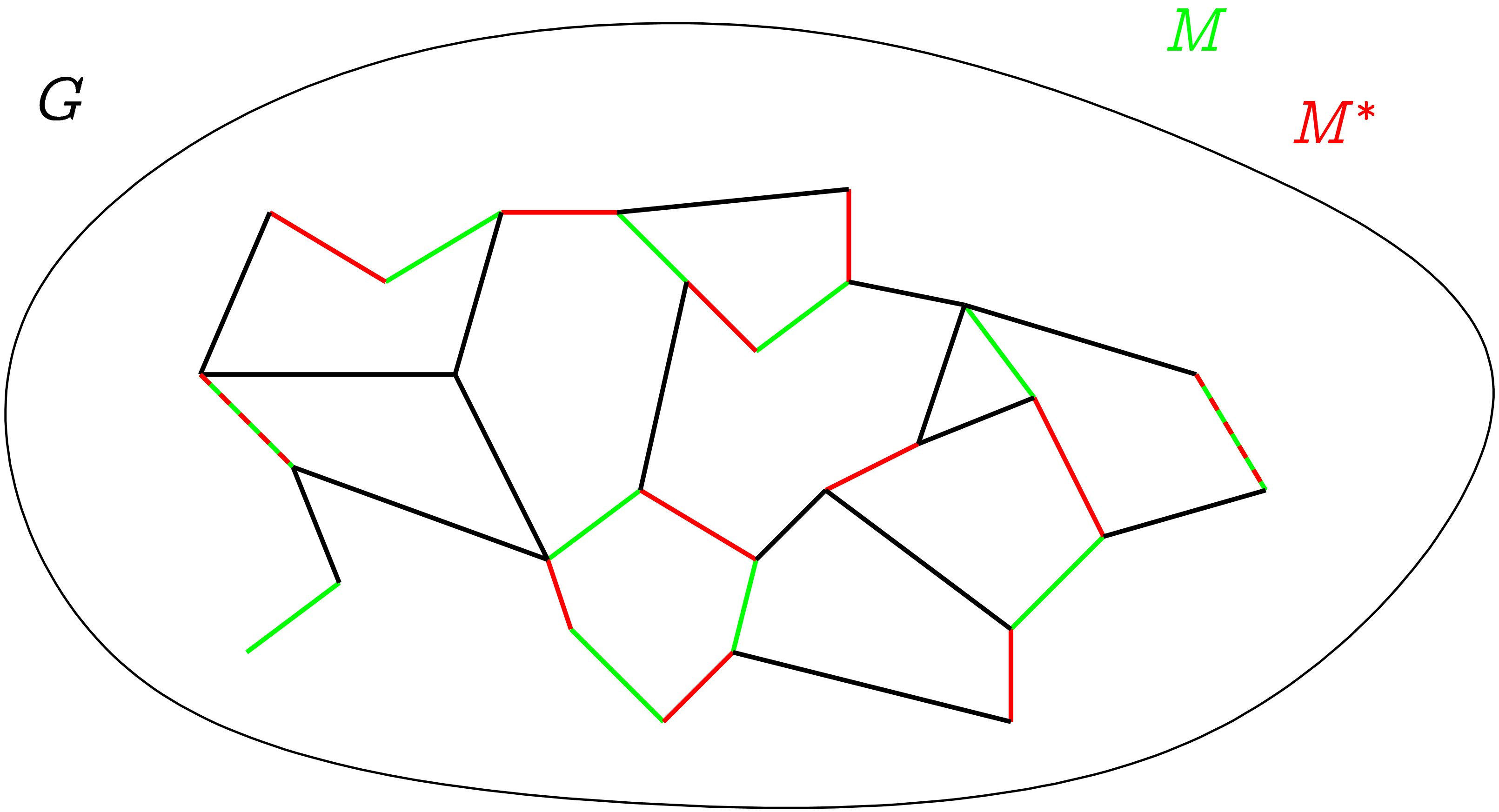
- v ei asu ahelal P. Siis $\deg_M(v) = \deg_{M'}(v)$. Tõepoolest, olgu $e \in E$ tipuga v intsidentne. Kuna $e \notin P$, siis $e \in M \Leftrightarrow e \in M'$.

- v on ahela P otstipp. Siis $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) + 1 = 1$.

- v on ahela P mõni sisemine tipp. Siis $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) = 1$.

Tõestus $\Leftarrow$. Meil tuleb konstrueerida mingi M-laienev ahel.

Olgu M^* mingi maksimaalne kooskõla graafis G. Siis $|M| < |M^*|$. Vaatame graafi $H = (V, M \cup M^*)$.



Iga $v \in V$ jaoks on $\deg_H(v) \leq 2$. Graafi H võimalikud sidususkomponendid on:

- Isoleeritud tipud.
- Ahelad.
  - Kinnised ehk tsüklid.
    - M ja M^* elemendid vaheldumisi.
  - Lahtised. Võimalused:
    - Üksainus serv $e \in M \cap M^*$.
    - M ja M^* elemendid vaheldumisi. Võimalused:
      - Ühes otsas M-i, teises M^*-i element.
      - Mõlemas otsas M-i element.
      - Mõlemas otsas M^*-i element.

Kuna $|M| < |M^*|$, siis peab leiduma H-i sidususkomponent, kus on M^*-i kuuluvaid servi rohkem, kui M-i kuuluvaid servi.

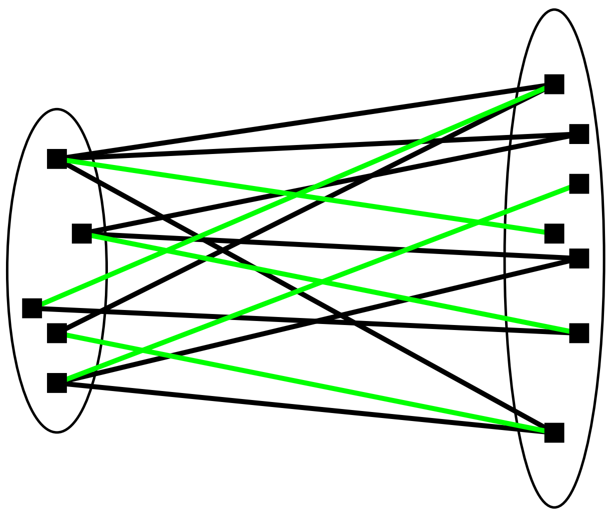
Ainsad sellised komponendid on lahtised ahelad, mis algavad ja lõppevad M^*-i elemendiga.

Need ahelad on M-laienevad. $\square$

Olgu $G = (V, E)$ graaf ja olgu $S \subseteq V$. Tipuhulga S *naabrus* on hulk

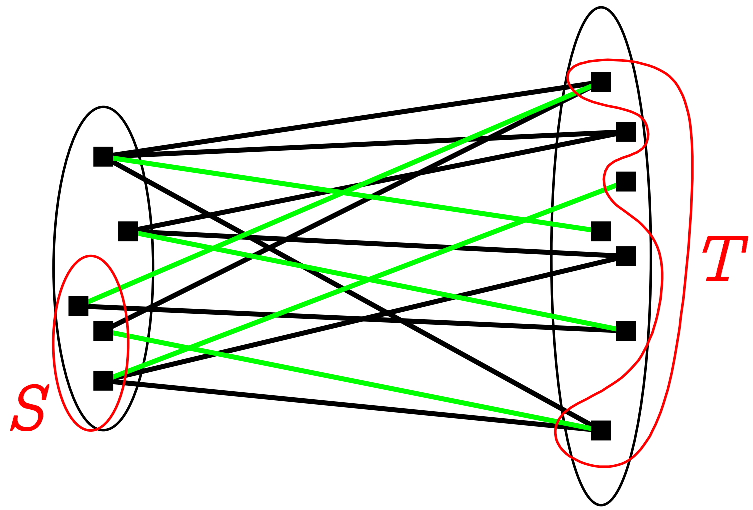
$$N(S) = \{w \mid w \in V, \exists e \in E, \exists v \in S : \mathcal{E}(e) = \{v, w\}\} \ .$$

Teoreem (Hall). Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline lihtgraaf alustega X ja Y. Graafis G leidub kooskõla M omadusega $\forall x \in X : \deg_M(x) = 1$ parajasti siis, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|N(S)| \geq |S|$.



Tõestus $\Rightarrow$. Olgu M mingi kooskõla etteantud omadusega. Olgu $S \subseteq X$. Vaatame hulka

$$T = \{y \mid y \in Y, \exists x \in S : (x, y) \in M\} \ .$$

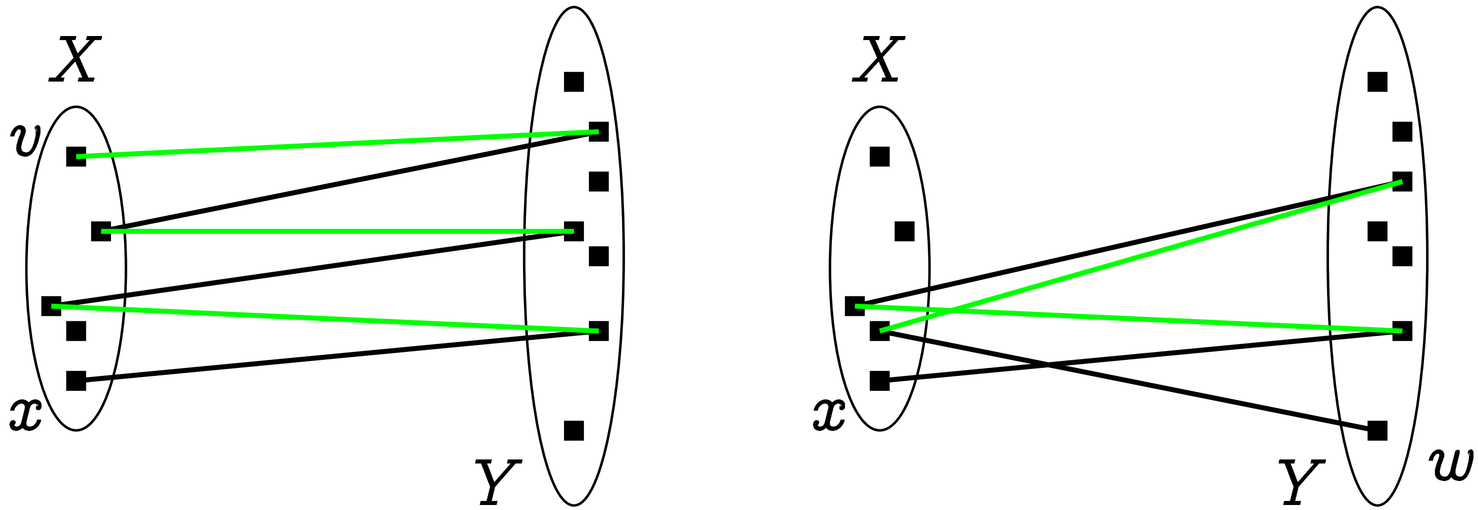


Siis $|T| = |S|$, sest iga $x \in S$ defineerib erineva y-i. Samas $T \subseteq N(S)$. Kokkuvõttes $|S| = |T| \leq |N(S)|$.

Tõestus $\Leftarrow$. Olgu M mingi maksimaalne kooskõla. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x \in X$, nii et $\deg_M(x) = 0$.

Olgu $S \subseteq X$ kõigi selliste tippude $v \in X$ hulk, nii et leidub M-vahelduv tee x-st v-sse. Paneme tähele, et $x \in S$.

Olgu $T \subseteq Y$ kõigi selliste tippude $w \in Y$ hulk, nii et leidub M-vahelduv tee x-st w-sse.



Me näitame, et

I. $N(S) = T$;

II. $|S \backslash \{x\}| = |T|$.

Kokkuvõttes viib see meid vastuoluni eeldustega:

$$|N(S)| = |T| = |S \backslash \{x\}| = |S| - 1 < |S| \ .$$

I osa. Olgu $v \in S$. Olgu P M-vahelduv tee x-st v-sse. Paneme tähele, et viimane serv ahelas P kuulub M-i.

Olgu $w \in Y$ mõni tipu v naabertipp. On kaks võimalust:

1. w asub ahelal P. Siis on ahela P osa x-st w-ni M-vahelduv tee x-st w-sse. Seega $w \in T$.

2. w ei asu ahelal P. Jälle on kaks võimalust:

   - $(v, w) \in M$. Siis on (v, w) viimane serv ahelas P, sest ei leidu ühtki teist serva hulgas M, mis oleks v-ga intsidentne. Seega realiseerub antud juhul esimene variant.

   - $(v, w) \notin M$. Siis on P koos täiendava servaga (v, w) M-vahelduv tee x-st w-sse. Seega $w \in T$.

II osa. Me konstrueerime bijektsiooni $S \setminus \{x\}$ ja T vahel.

Olgu $v \in S \setminus \{x\}$. Siis leidub $e \in M$, mis on intsidentne v-ga (viimane serv M-vahelduvas tees x-st v-sse). Tipule v seame vastavusse e teise otspunkti w. Eelmisel slaidil näitasime, et $w \in T$.

Olgu $w \in T$. Kui ei leiduks serva $e \in M$, mis on w-ga intsidentne, siis oleks M-vahelduv tee x-st w-sse M-laienev. Berge'i teoreem M-laienevate teede leidumist ei luba. Seega selline serv e leidub.

w-le seame vastavusse e teise otspunkti v. On ilmne, et $v \in S$. Samuti $v \neq x$, sest e teine otspunkt ei ole x, kuna $\deg_M(x) = 0$. $\square$

Järeldus. Regulaarses (s.t. kõigi tippude aste on sama) kahealuselises graafis, mis pole nullgraaf, leidub täielik kooskõla.

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf alustega X ja Y. Olgu $k > 0$ kõigi tippude aste. Kuna

$$|X| \cdot k = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y) = |Y| \cdot k,$$

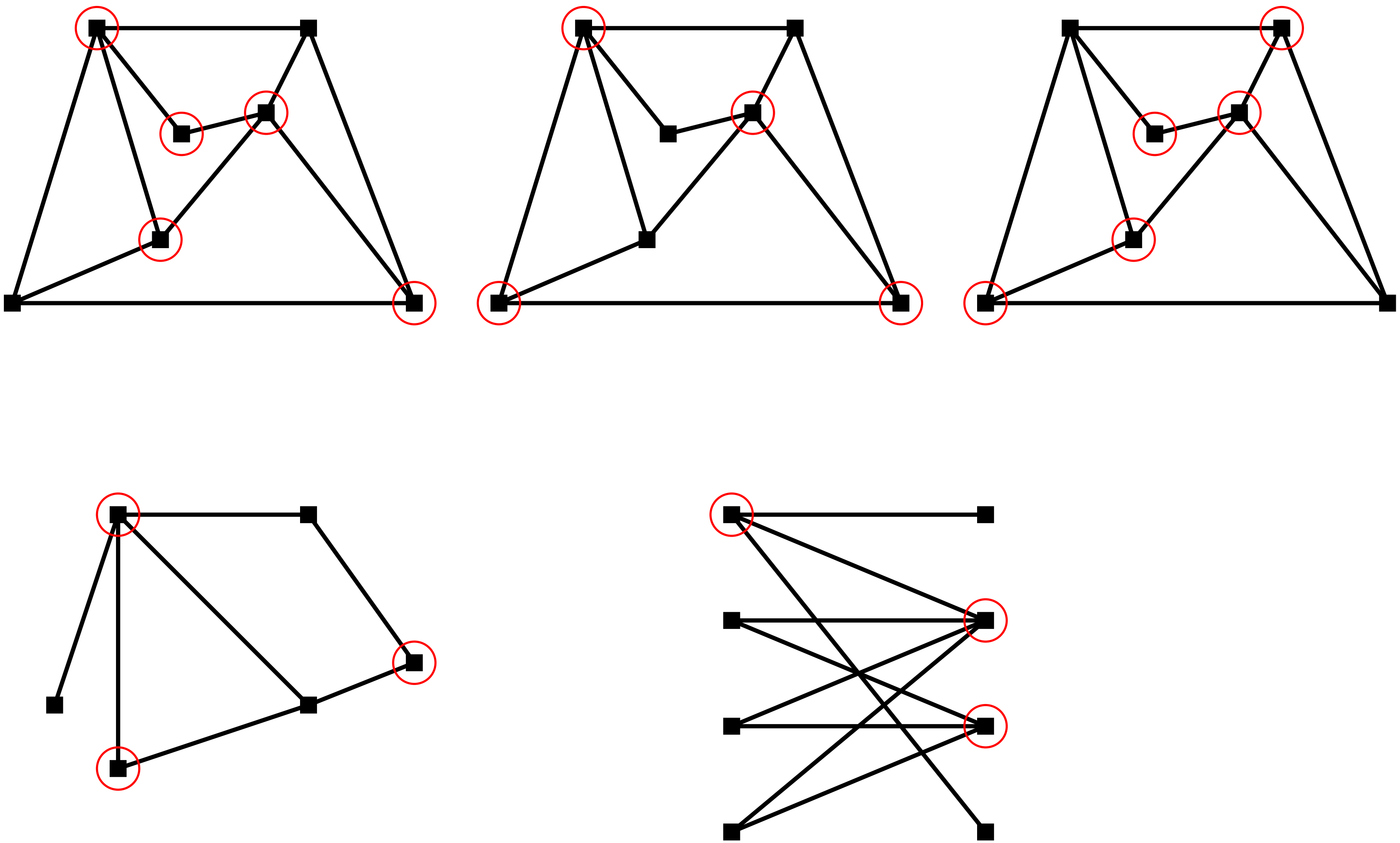
siis $|X| = |Y|$. Olgu $S \subseteq X$. Kuna

$$|S| \cdot k = \sum_{x \in S} \deg(x) \leq \sum_{y \in N(S)} \deg(y) = |N(S)| \cdot k,$$

siis $|S| \leq |N(S)|$. Seega leidub kooskõla M, nii et $\deg_M(x) = 1$ iga $x \in X$ jaoks. Kuna $|X| = |Y|$, siis ka $\deg_M(y) = 1$ iga $y \in Y$ jaoks. $\square$

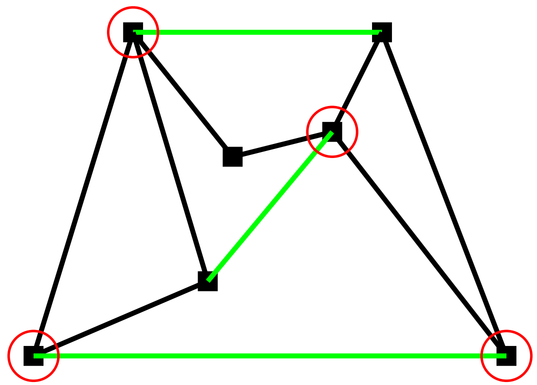
Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Graafi G *kate* on selline tippude hulk $K \subseteq V$, et iga serv $e \in E$ on mõne K-sse kuuluva tipuga intsidentne.

Kate on *minimaalne*, kui tema võimsus on vähim võimalik.



Lemma. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu M mingi tema kooskõla ja K mingi tema kate. Siis $|M| \leq |K|$.

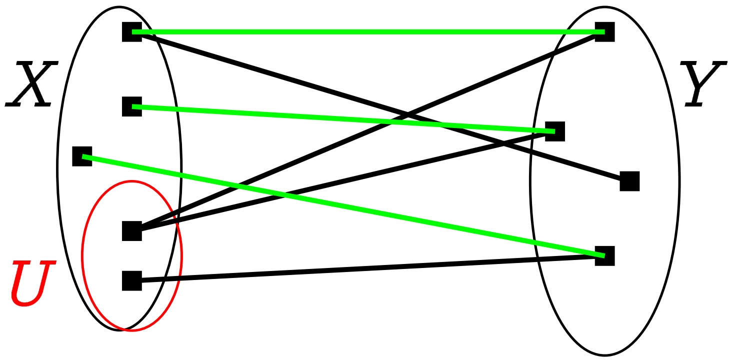
Tõestus. Iga serva $e \in M$ jaoks leidub mingi tipp $v \in K$, nii et e on intsidentne K-ga. Erinevate servade jaoks on need tipud erinevad, kuna erinevatel M-i kuuluvatel servadel pole ühiseid otstippe. $\square$



Teoreem (König). Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf. Siis on tema maksimaalsete kooskõlade ja minimaalsete katete võimsused võrdsed.

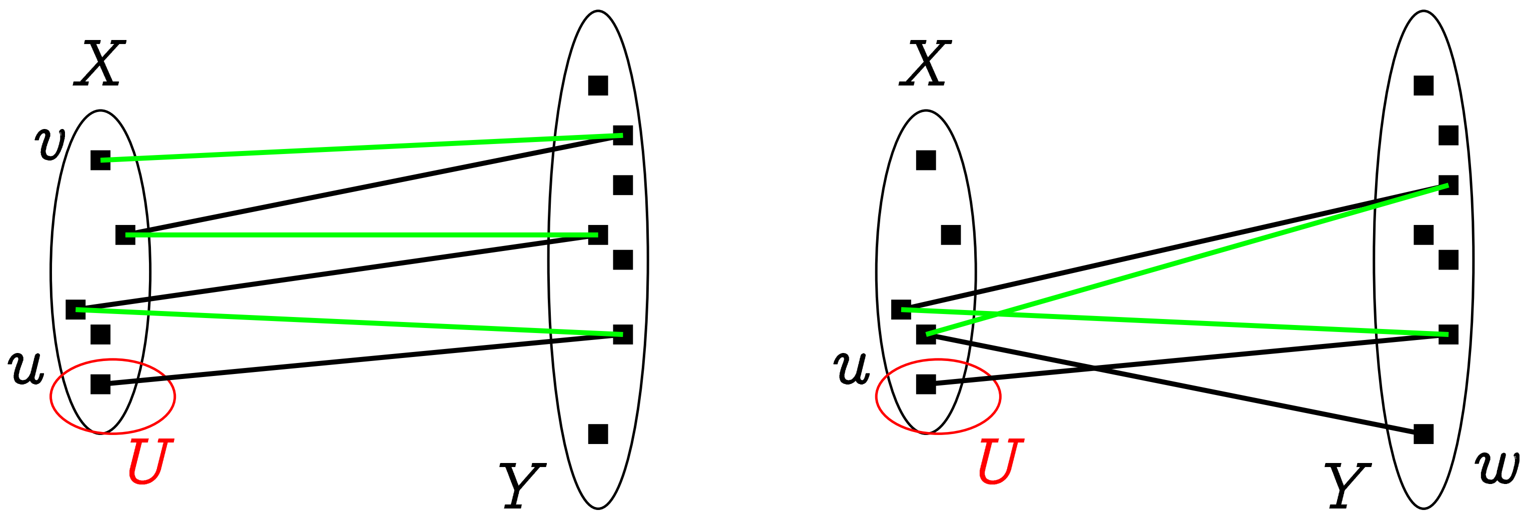
Tõestus. Olgu X ja Y graafi G alused, olgu M tema mingi maksimaalne kooskõla. Konstrueerime katte K, nii et $|M| = |K|$.

Olgu $U \subseteq X$ kõigi selliste tippude $u \in X$ hulk, et $\deg_M(u) = 0$. Siis $|M| = |X \backslash U|$.



Olgu $S \subseteq X$ kõigi selliste tippude $v \in X$ hulk, nii et mingi $u \in U$ jaoks leidub M-vahelduv tee u-st v-sse. Siis $U \subseteq S$.

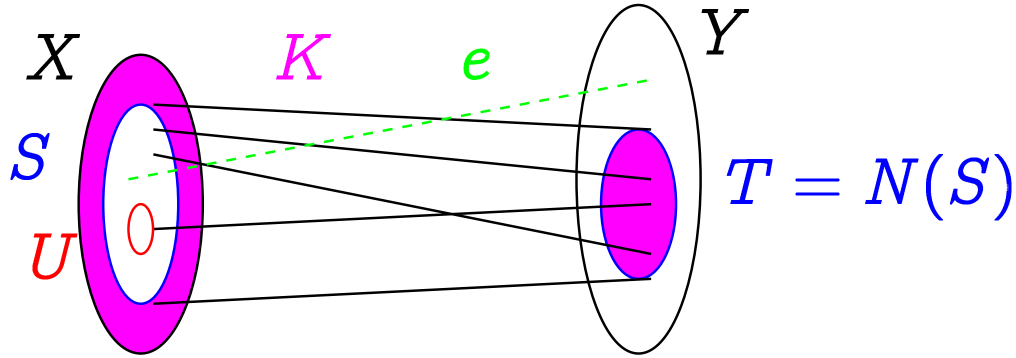
Olgu $T \subseteq Y$ kõigi selliste tippude $w \in Y$ hulk, nii et mingi $u \in U$ jaoks leidub M-vahelduv tee u-st w-sse.



Analoogiliselt Halli teoreemi tõestusega $N(S) = T$ ja $|T| = |S \backslash U|$.

Olgu $K = T \cup (X \setminus S)$. Siis K on kate.

Tõepoolest, oletame et leidub $e \in E$, nii et e pole intsidentne ühegi K-sse kuuluva tipuga. Siis on e üks otstipp S-s ja teine $Y \setminus T$-s. Vastuolu väitega $N(S) = T$.



$$|K| = |T| + |X \setminus S| = |S \setminus U| + |X \setminus S| = |X \setminus U| = |M| \quad .$$

$\square$