Täielikud kooskõlad

(üks tarvilik ja piisav tingimus nende leidumiseks)

31. oktoober 2002

4. november 2003

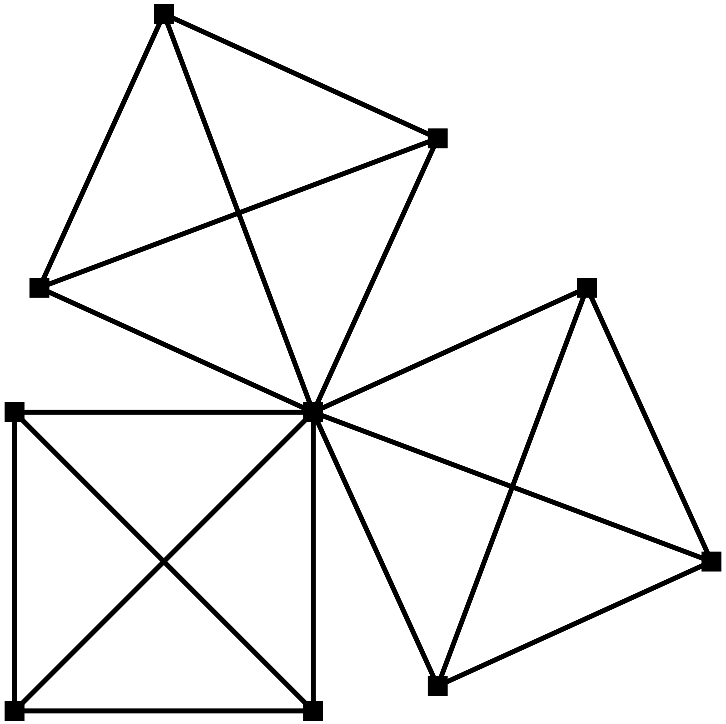
Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. *Kooskõla* graafis G on selline servade hulk $M \subseteq E$, et iga $v \in V$ jaoks $\deg_M(v) \leq 1$.

Kooskõla M on *täielik*, kui $\deg_M(v) = 1$ iga $v \in V$ jaoks.

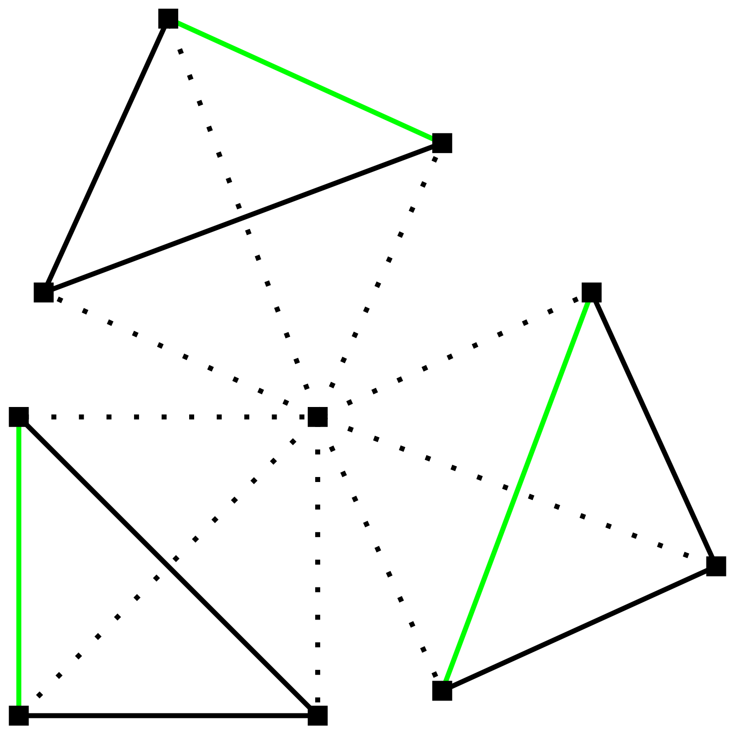
Tänases loengus anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse täieliku kooskõla leidumiseks graafis.

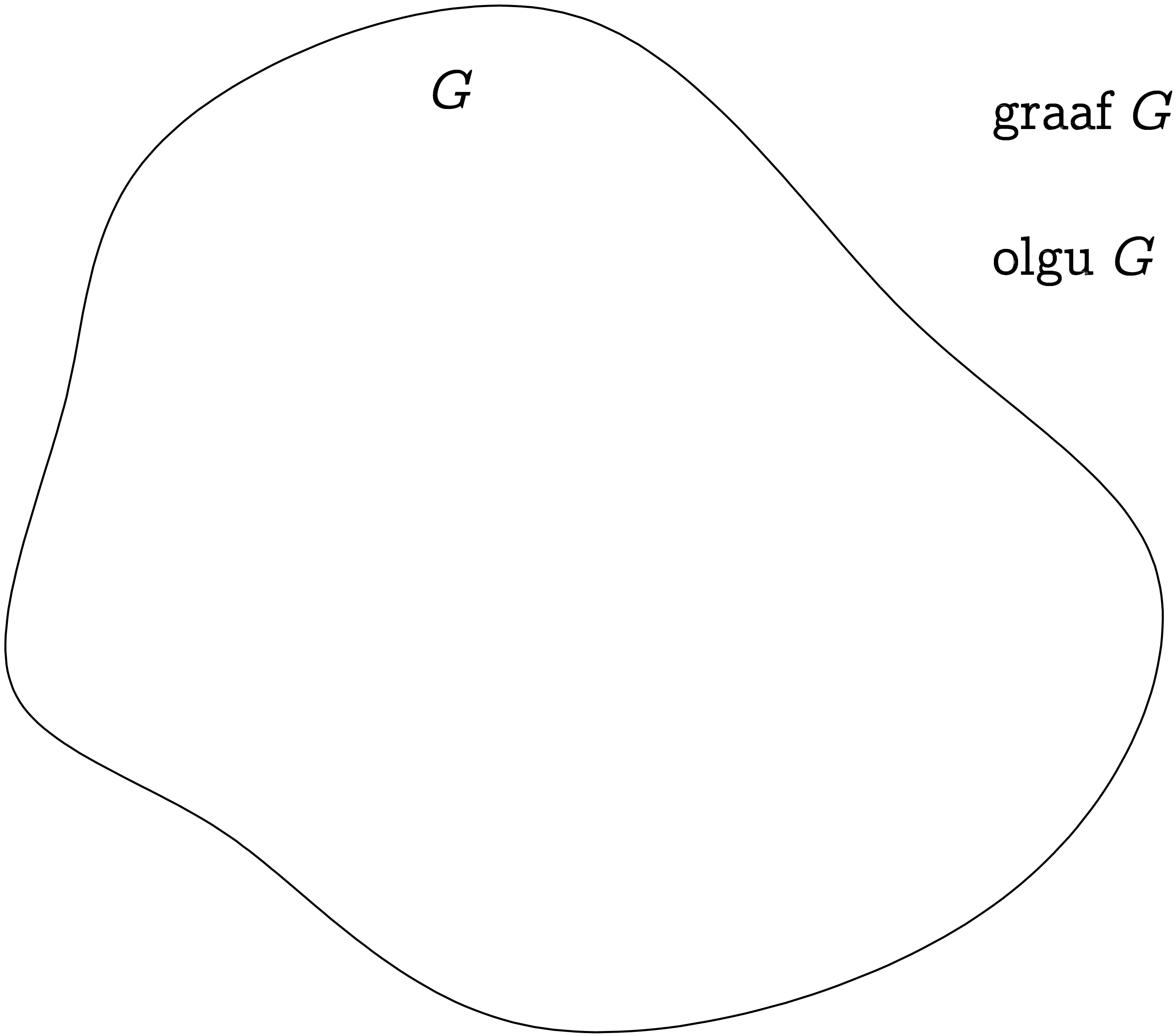
Ilmne on, et graafis on täielik kooskõla parajasti siis, kui tema igas sidususkomponendis on täielik kooskõla. Seepärast vaatame selles loengus ainult sidusaid graafe.

Hästi lihtne tarvilik tingimus — graafis peab olema paarisarv tippe.



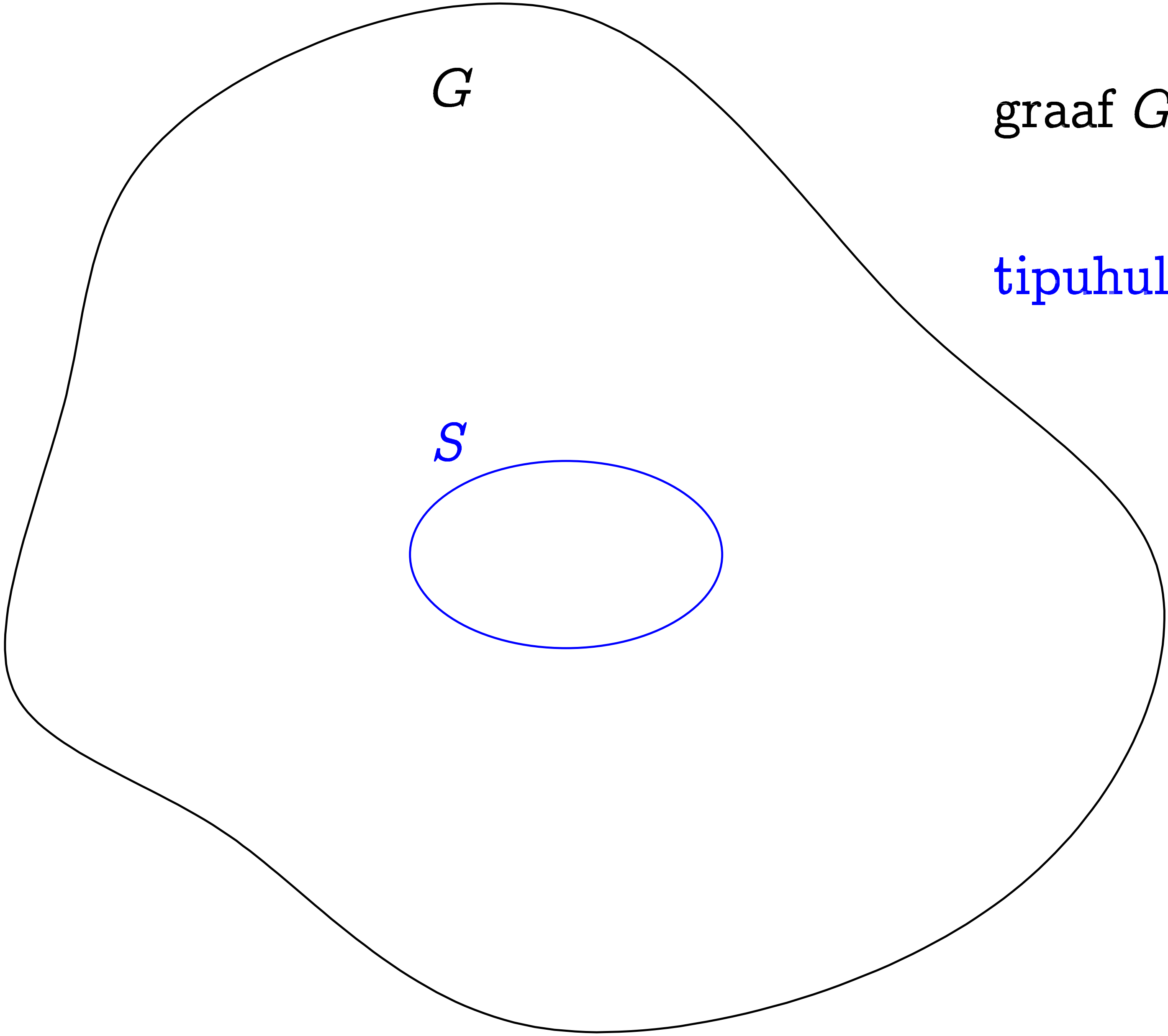
Selles graafis ei ole täielikku kooskõla





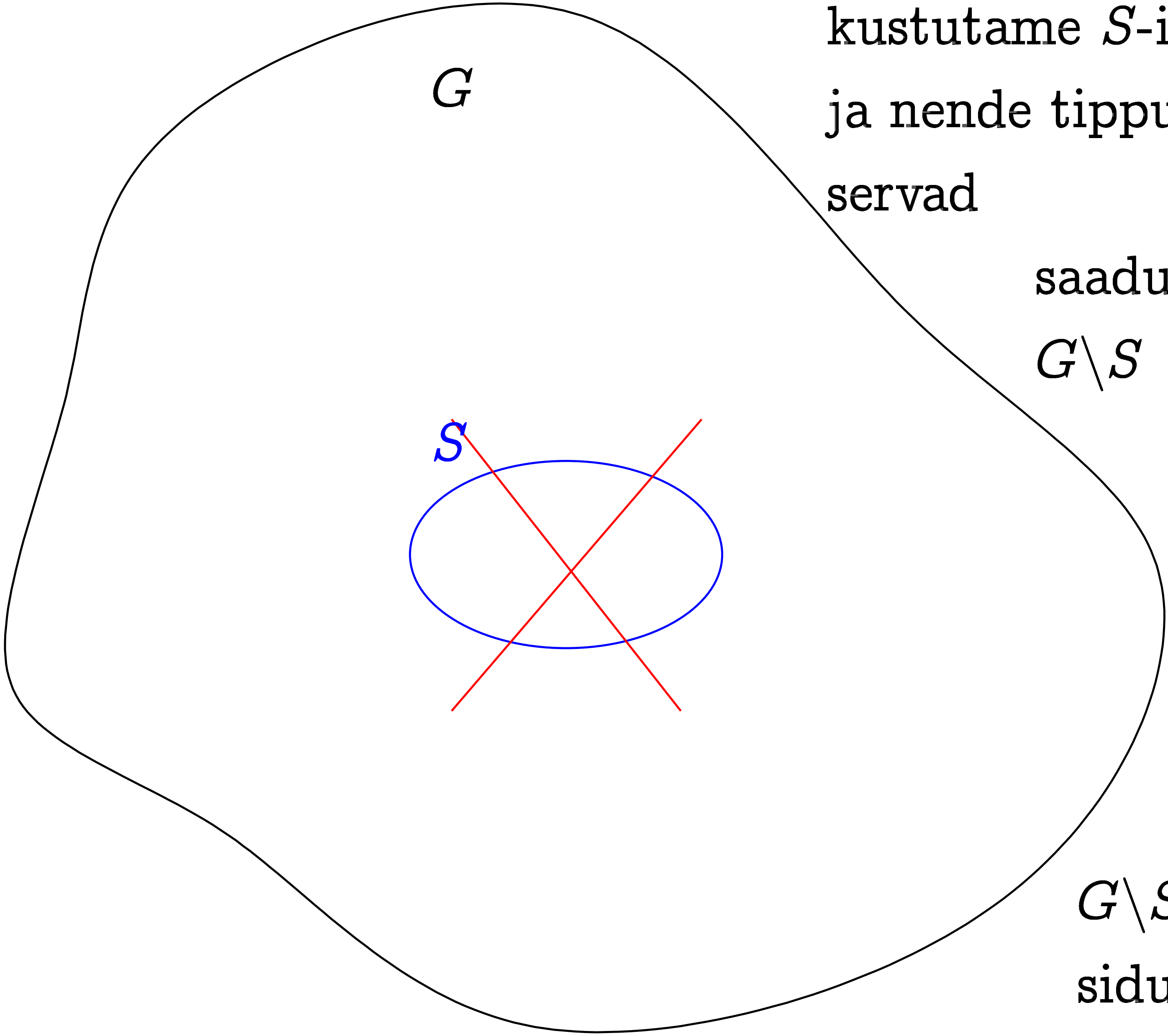
graaf $G = (V, E)$

olgu G sidus



graaf $G = (V, E)$

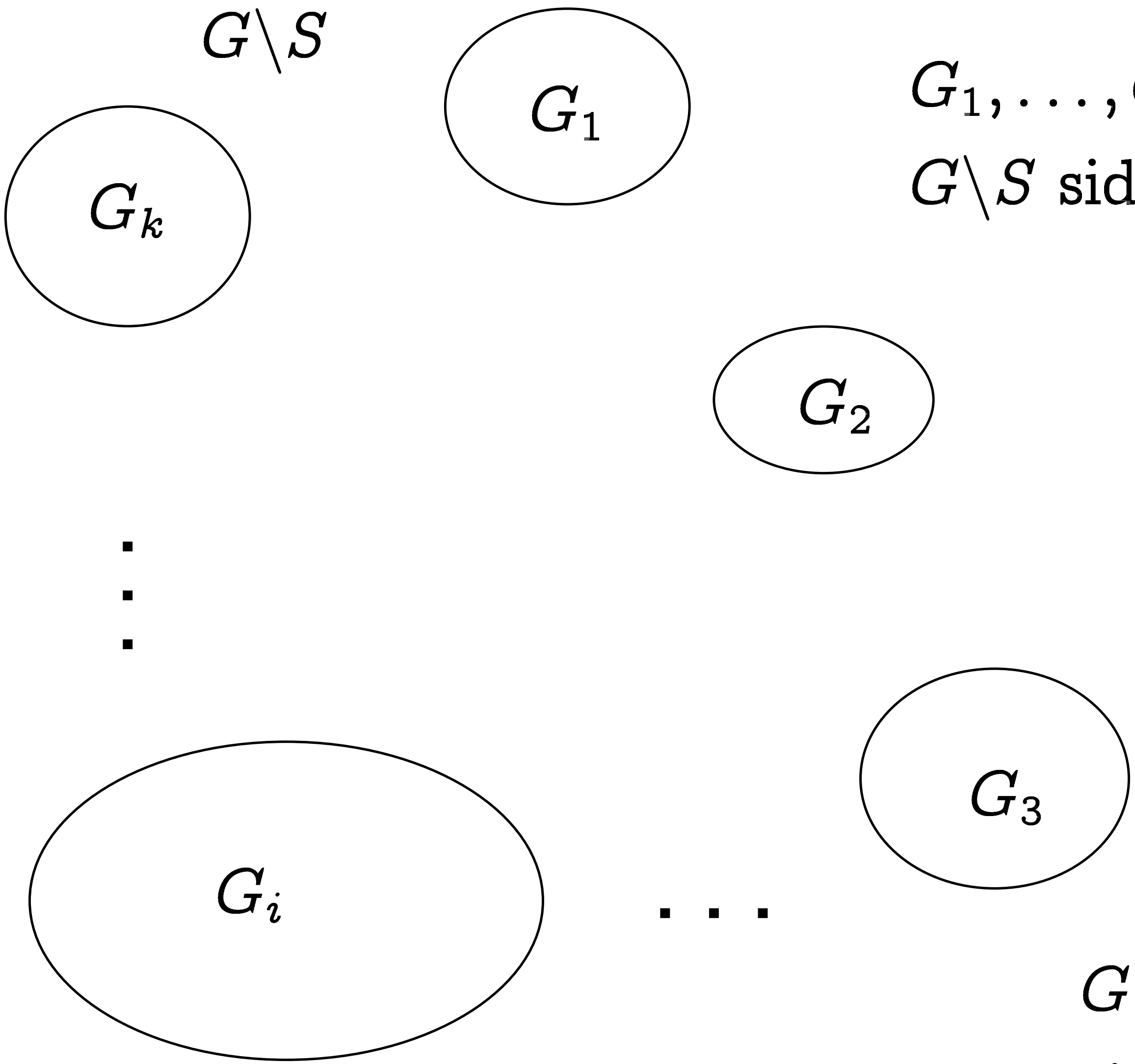
tipuhulk $S \subseteq V$



kustutame S-i kuuluvad tipud ja nende tippudega intsidentsed servad

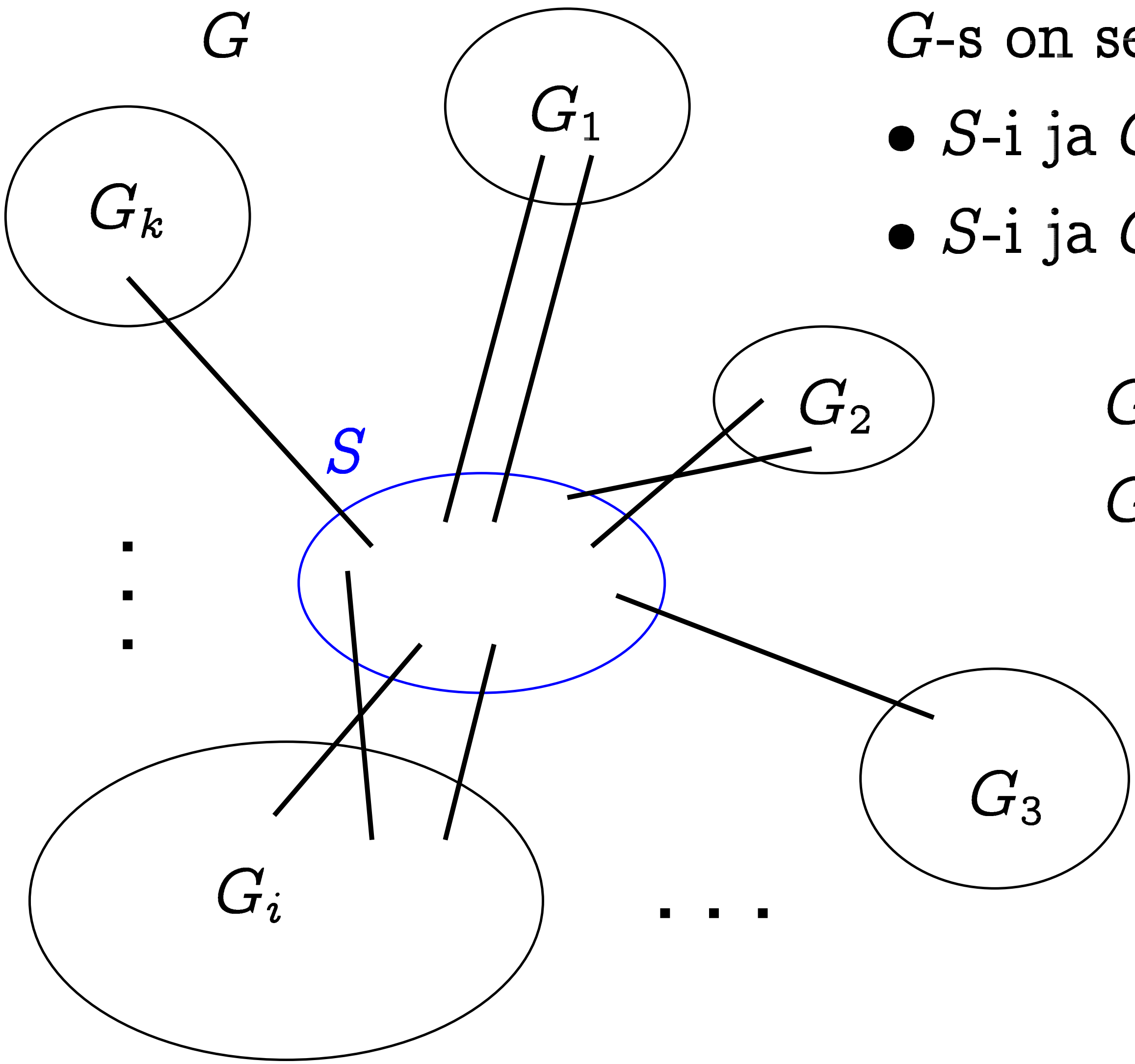
saadud graafi tähistame $G \backslash S$

$G \backslash S$ ei pruugi sidus olla



$G_1, \ldots, G_k$:
$G \setminus S$ sidususkomponendid

$G \setminus S$ ei pruugi sidus olla

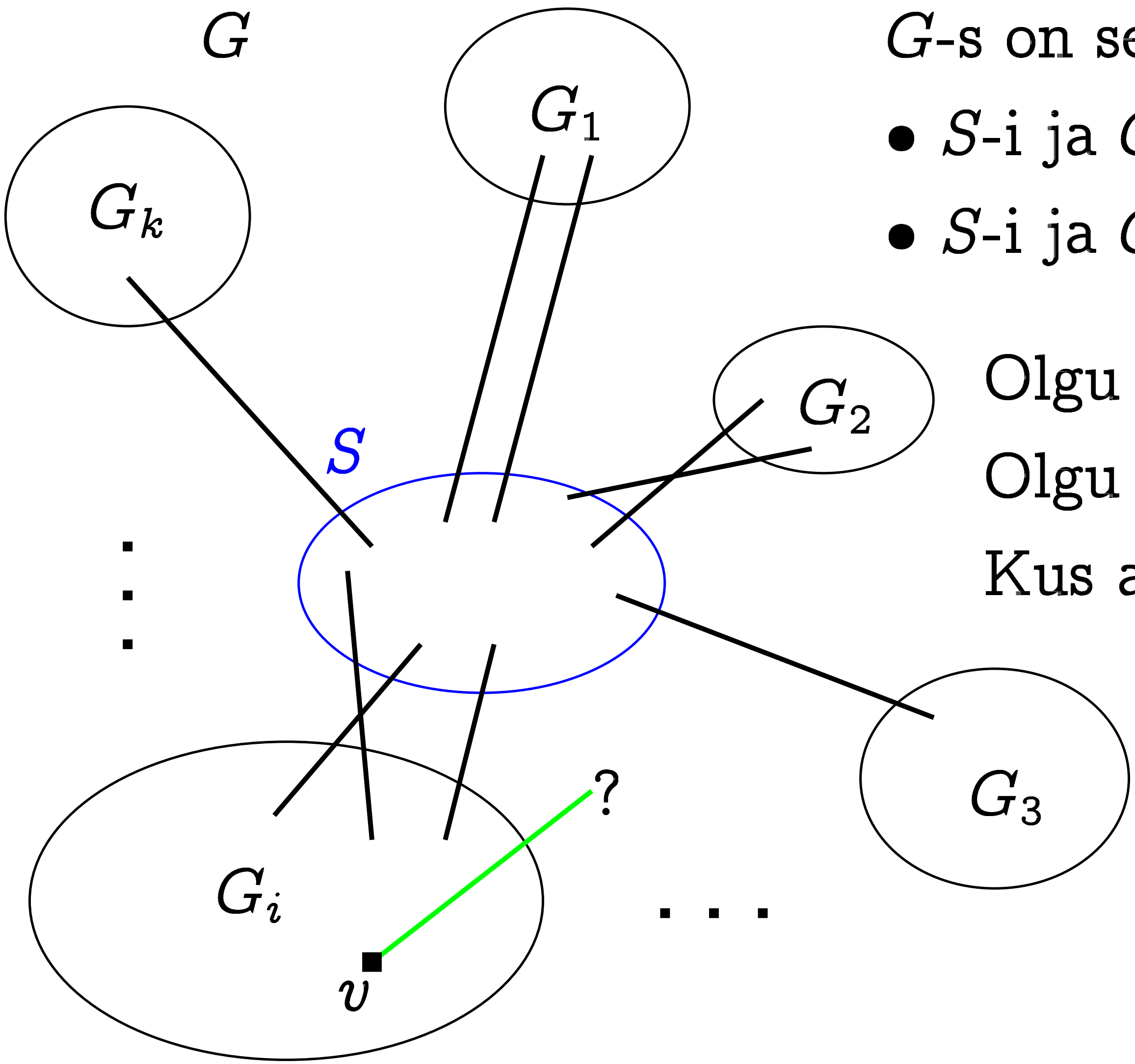


G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

G-s pole servi

G_i-de vahel



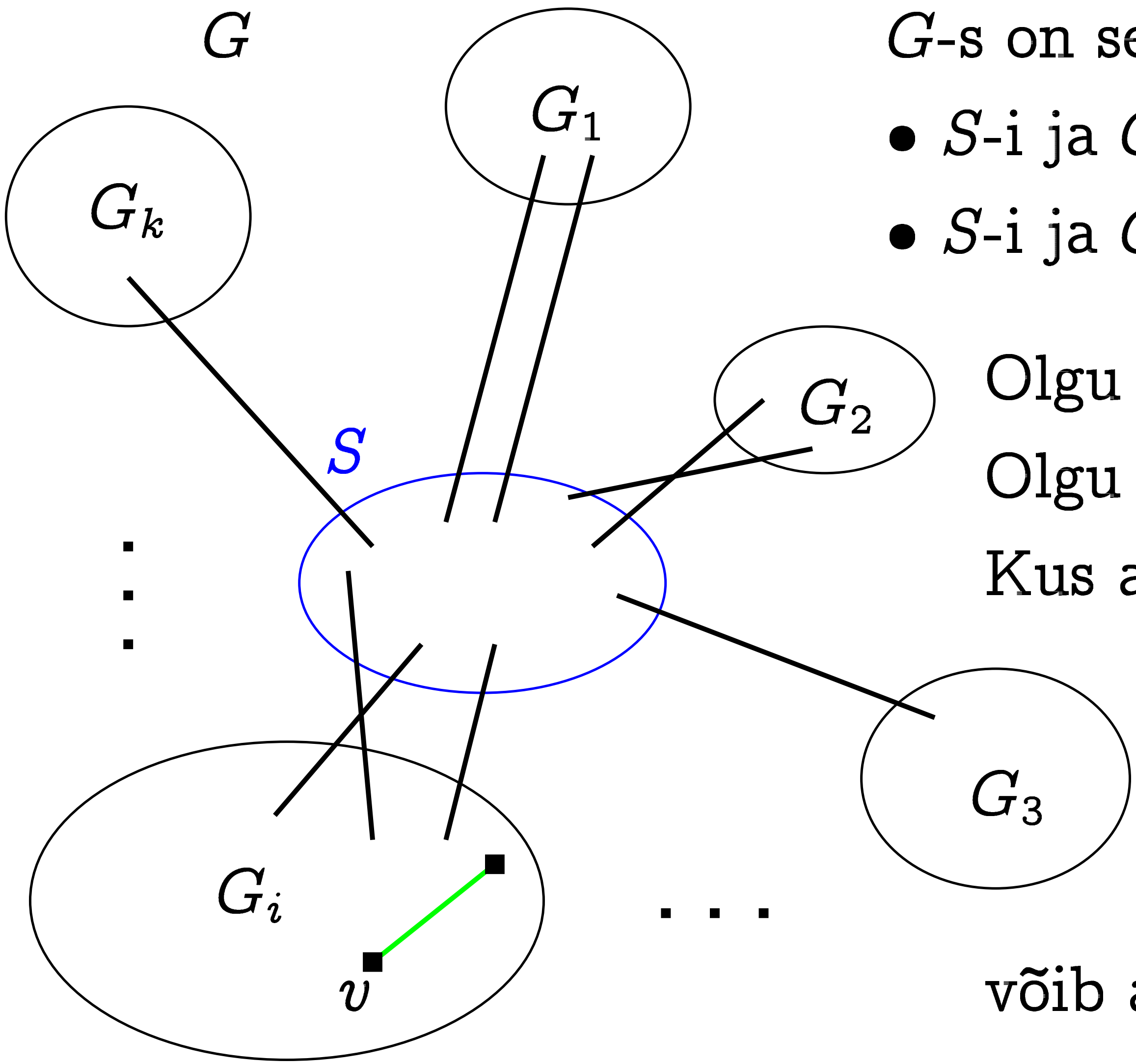
G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?



G-s on servad:

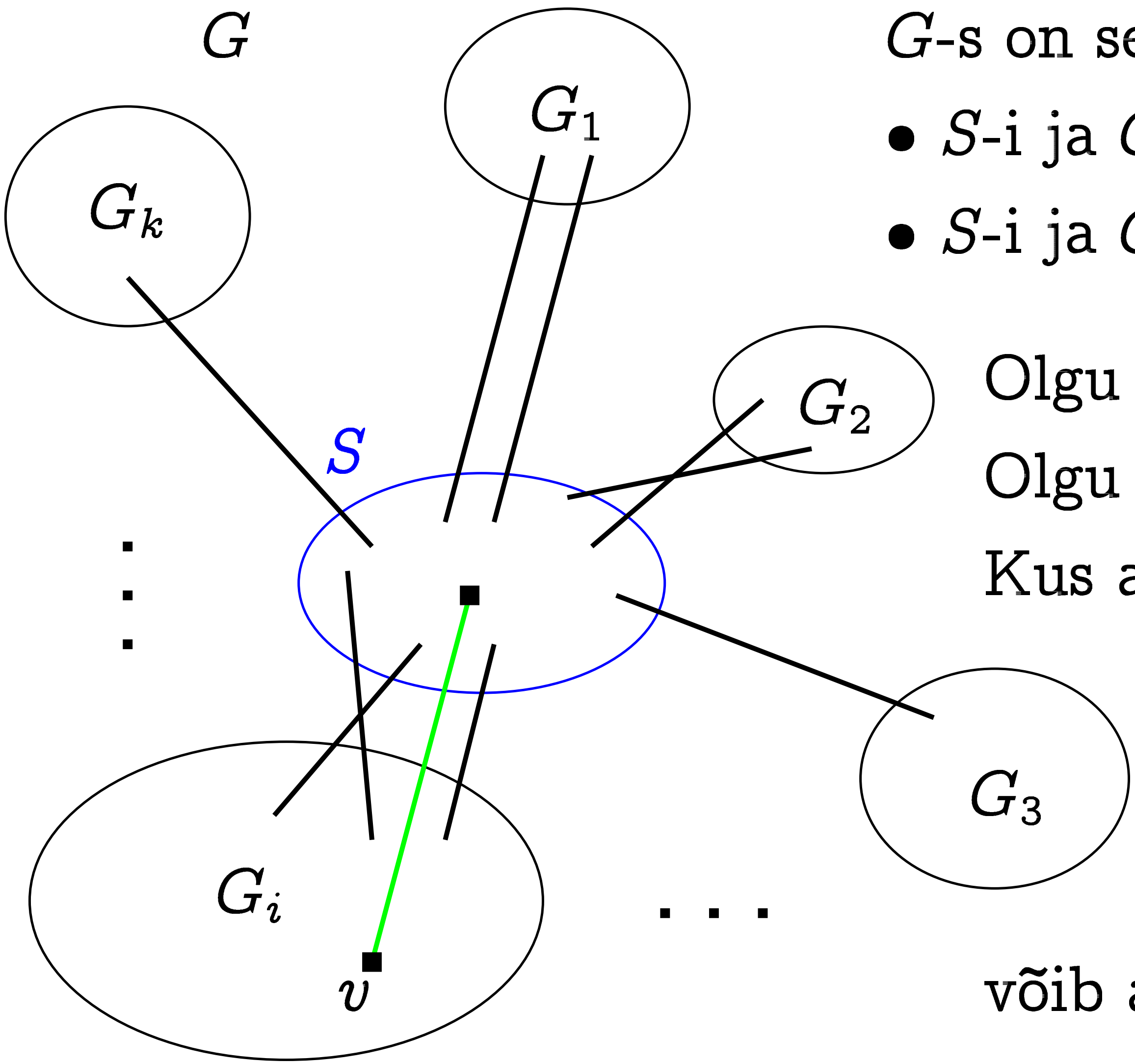
- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda G_i-s



G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

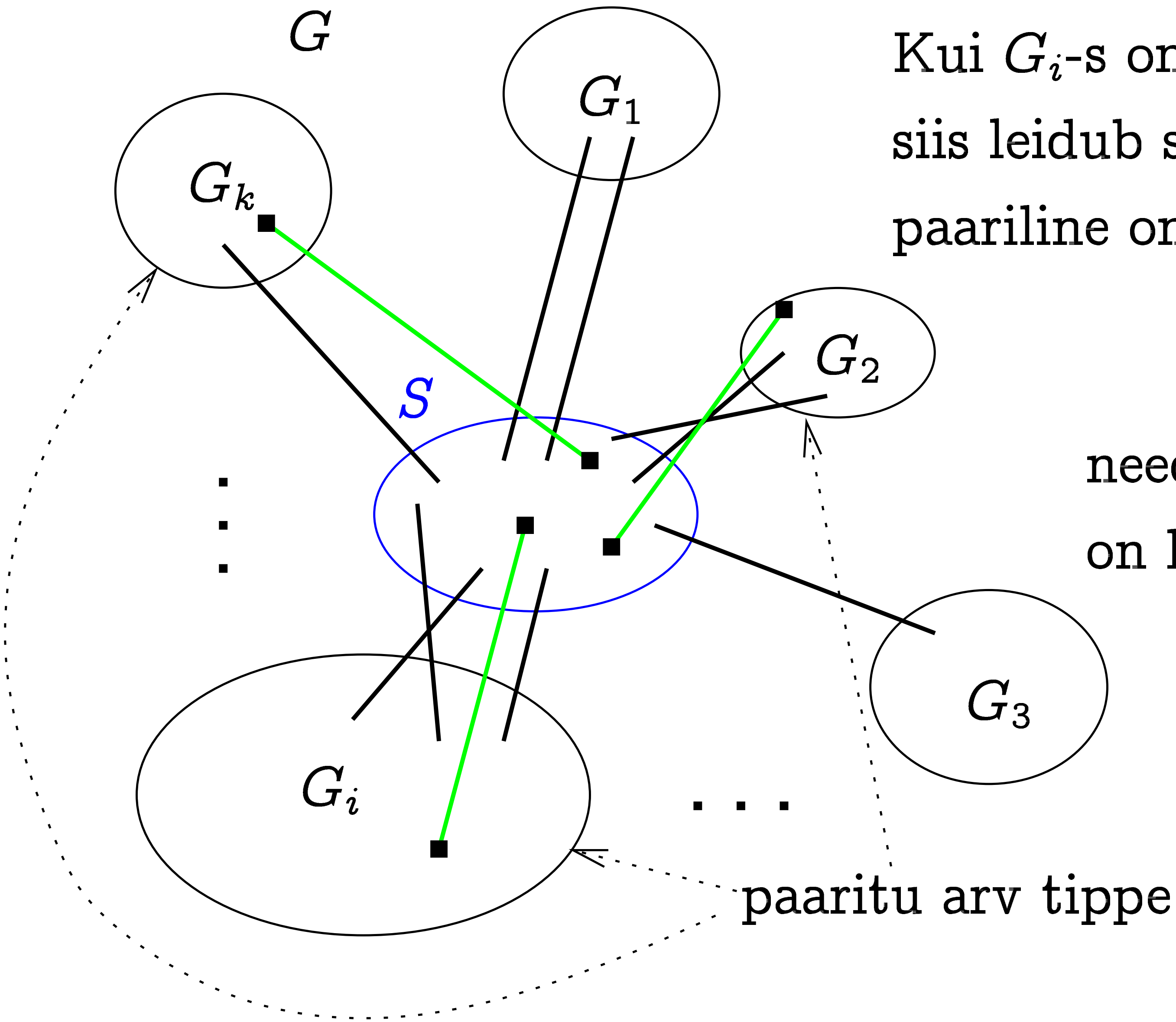
Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda S-is

Kui G_i-s on paaritu arv tippe, siis leidub seal tipp, mille paariline on S-is.



need paarilised S-is on kõik erinevad

Tähistagu $odd(G)$ sidususkomponentide arvu G-s, millel on paaritu arv tippe.

Näitasime, et kui graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla, siis $odd(G \backslash S) \leq |S|$. Seda iga $S \subseteq V$ jaoks.

Teoreem (Tutte). Graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G \backslash S) \leq |S|$.

Tõestus. Tarvilikkust juba näitasime. Näitame piisavust ka.

Vastuväiteliselt oletame, et leidub graaf G, kus iga $S \subseteq V$ jaoks $odd(G \setminus S) \leq |S|$, aga G-s ei leidu täielikku kooskõla.

Muuhulgas siis $odd(G) = odd(G \setminus \emptyset) \leq 0$, seega on G-s paarisarv tippe.

Lisame G-le mingil viisil servi senikaua, kuni jõuame mingi graafini G^*, kus ei ole täielikku kooskõla, aga millele ükskõik millise serva lisamisel saaksime graafi, kus on täielik kooskõla.

Kuna K_{2n}-s on täielik kooskõla, siis me jõuame sellise G^*-ni.

Näitame, et iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib ka $odd(G^* \setminus S) \leq |S|$.

Piisab, kui näitame $odd(G^* \backslash S) \leq odd(G \backslash S)$.

Graaf $G^* \backslash S$ on saadud graafile $G \backslash S$ mingeid servi lisades. Uurime, kuidas muutub $odd(\cdot)$ graafile servi lisades.

Kui lisame graafile mingi serva, siis võib ta ühendada 2 tippu

- samast sidususkomponendist. Sel juhul $odd(\cdot)$ ei muutu.
- kahest erinevast sidususkomponendist. Sel juhul saab neist kahest komponendist üks.

- Kui mõlemis komponendis oli paarisarv tippe, siis on uues komponendis ka paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.

- Kui ühes komponendis oli paaris- ja teises paaritu arv tippe, siis on uues komponendis ka paaritu arv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.

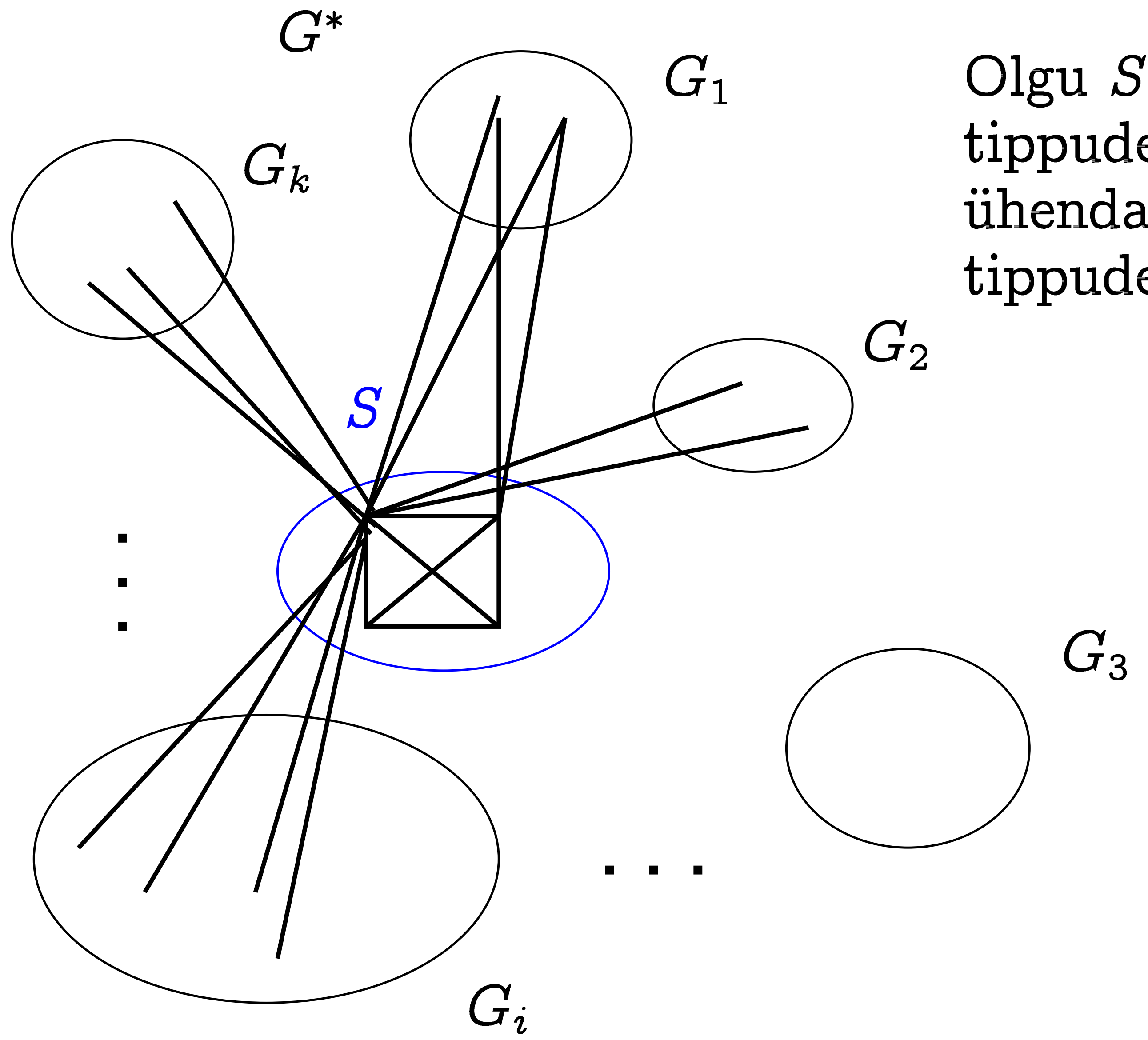
- Kui mõlemis komponendis oli paaritu arv tippe, siis on uues komponendis paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ väheneb 2 võrra.

Seega saab graafile servi lisades $odd(\cdot)$ ainult väheneda. Järelikult $odd(G^*\backslash S) \leq odd(G\backslash S) \leq |S|$.

Oleme näidanud, et teoreemi tõestamiseks piisab, kui tuletada vastuolu järgmisest väitest:

Leidub graaf $G^* = (V, E^*)$, kus

- ei leidu täielikku kooskõla;
- suvalise serva lisamisel tekib täielik kooskõla;
- iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G^* \setminus S) \leq |S|$.

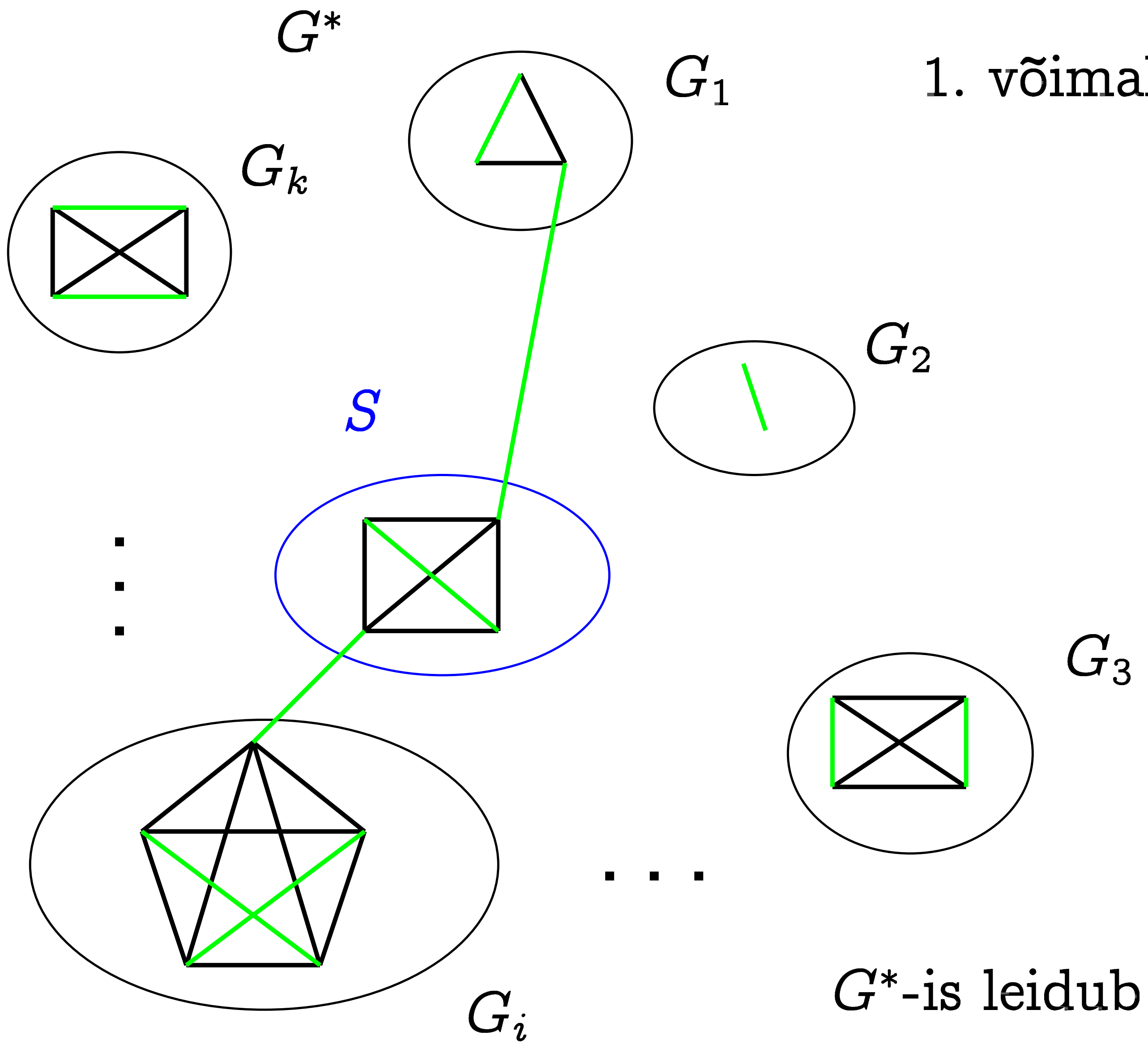


Olgu S kõigi selliste tippude hulk, mis on ühendatud kõigi teiste tippudega

On kaks võimalust:

1. Graafi $G^*\backslash S$ kõik sidususkomponendid on täisgraafid.
2. Leidub $G^*\backslash S$ sidususkomponent, mis ei ole täisgraaf.

1. võimalus



G^*-is leidub kooskõla — vastuolu

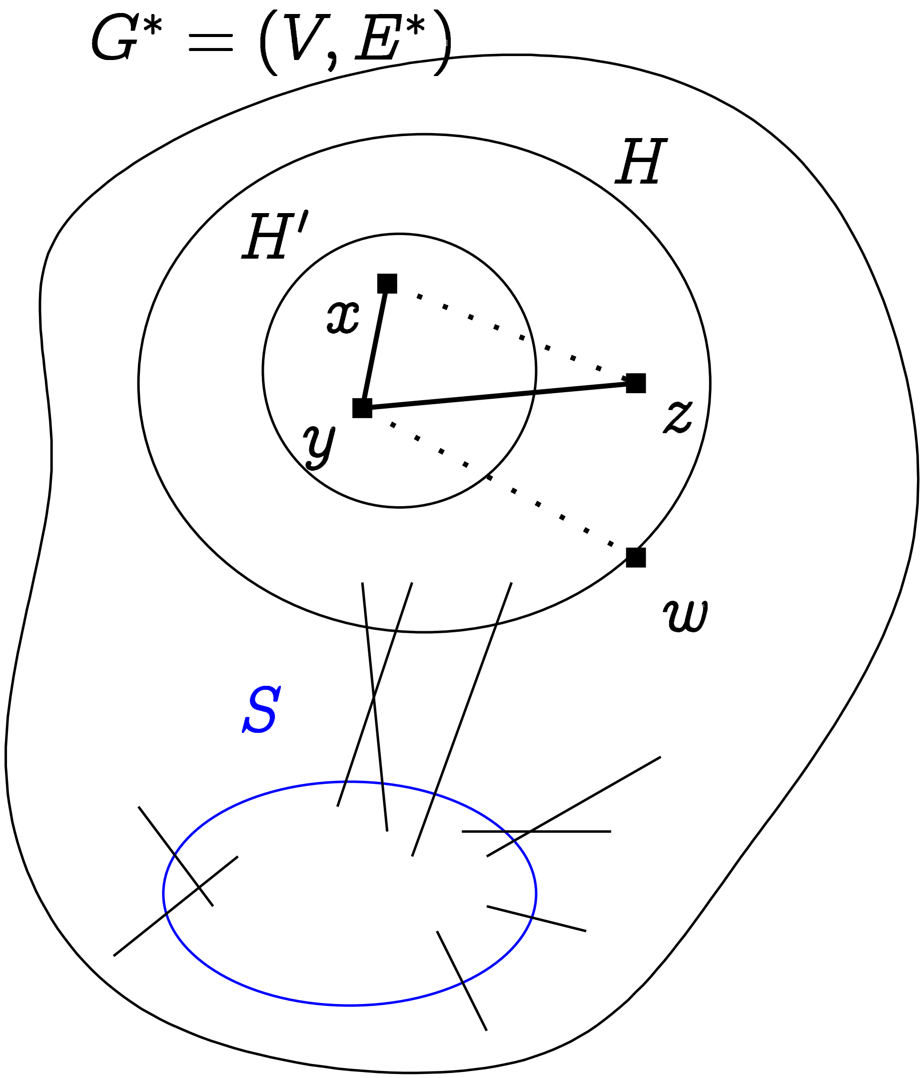
Konstrueerime täieliku kooskõla G^*-s:

- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n} nende komponentide piires.
- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n+1} nende komponentide piires, nii et üks tipp üle jääks.
- $G^* \backslash S$ sidususkomponentides K_{2n+1} üksikud ülejäänud tipud seame igaühe vastavusse mõne S-i tipuga.

  Komponente K_{2n+1} pole rohkem kui $|S|$.

- S-i ülejäänud tipud seame omavahel vastavusse.

  Üle jääb paarisarv, sest G^*-s on paarisarv tippe.



serv

serva pole

2. võimalus

H — $G^* \setminus S$ sidususkomponent
H pole täisgraaf

H' — H max. täisalamgraaf

$y \in V(H')$ ja $z \in V(H) \setminus V(H')$

$x \in V(H')$

$w \in V \setminus S$

$G_1 = (V, E^* \cup \{(x, z)\})$

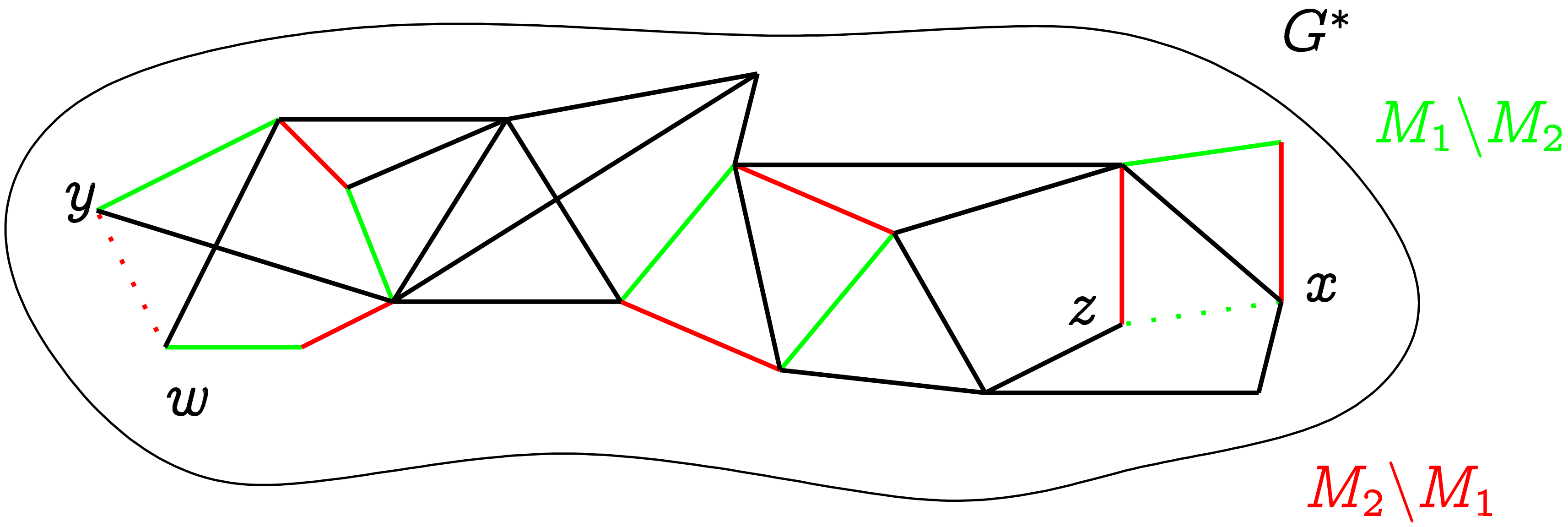
$G_2 = (V, E^* \cup \{(y, w)\})$

Graafides G_1 ja G_2 leiduvad kooskõlad.

Olgu M_1 graafi G_1 täielik kooskõla. Siis $(x, z) \in M_1$, muidu oleks M_1 graafi G^* täielik kooskõla.

Olgu M_2 graafi G_2 täielik kooskõla. Siis $(y, w) \in M_2$.

Olgu $G' = (V, (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1))$.



Olgu $v \in V$. Mis on $\deg_{G'}(v)$ võimalikud väärtused?

Leidub täpselt üks $e_1 \in M_1$ ja $e_2 \in M_2$, nii et e_1 ja e_2 on v-ga intsidentsed.

- Kui $e_1 = e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 0$.
- Kui $e_1 \neq e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 2$.

Seega on G' sidususkomponentideks isoleeritud tipud ja tsüklid.

Tsüklid on paarisarvulise pikkusega — vaheldumisi serv M_1-st ja serv M_2-st.

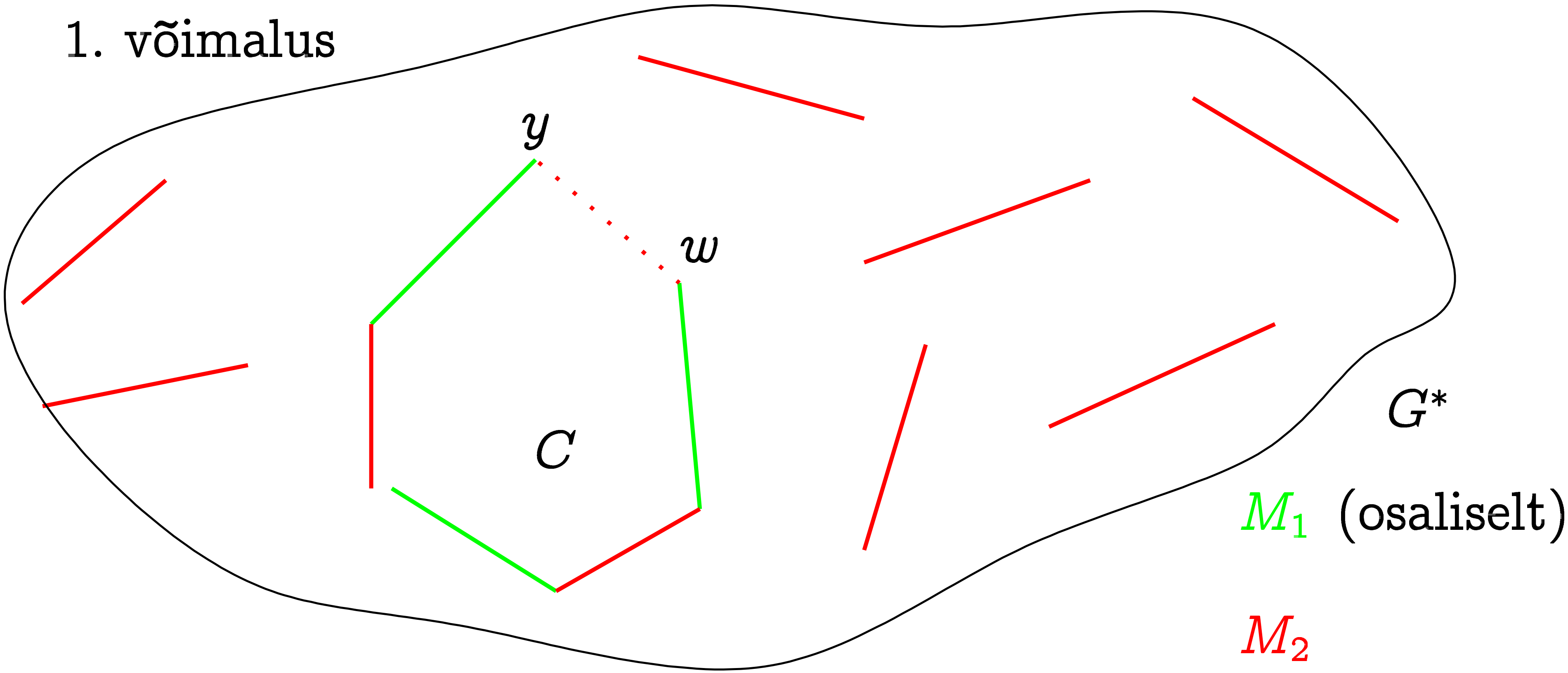
On kaks võimalust:

1. Servad (x, z) ja (y, w) kuuluvad G' erinevatesse sidususkomponentidesse.

2. Servad (x, z) ja $y, w)$ kuuluvad G' samasse sidususkomponenti.

Mõlemal juhul näitame, et G^*-s ikkagi leidub täielik kooskõla.

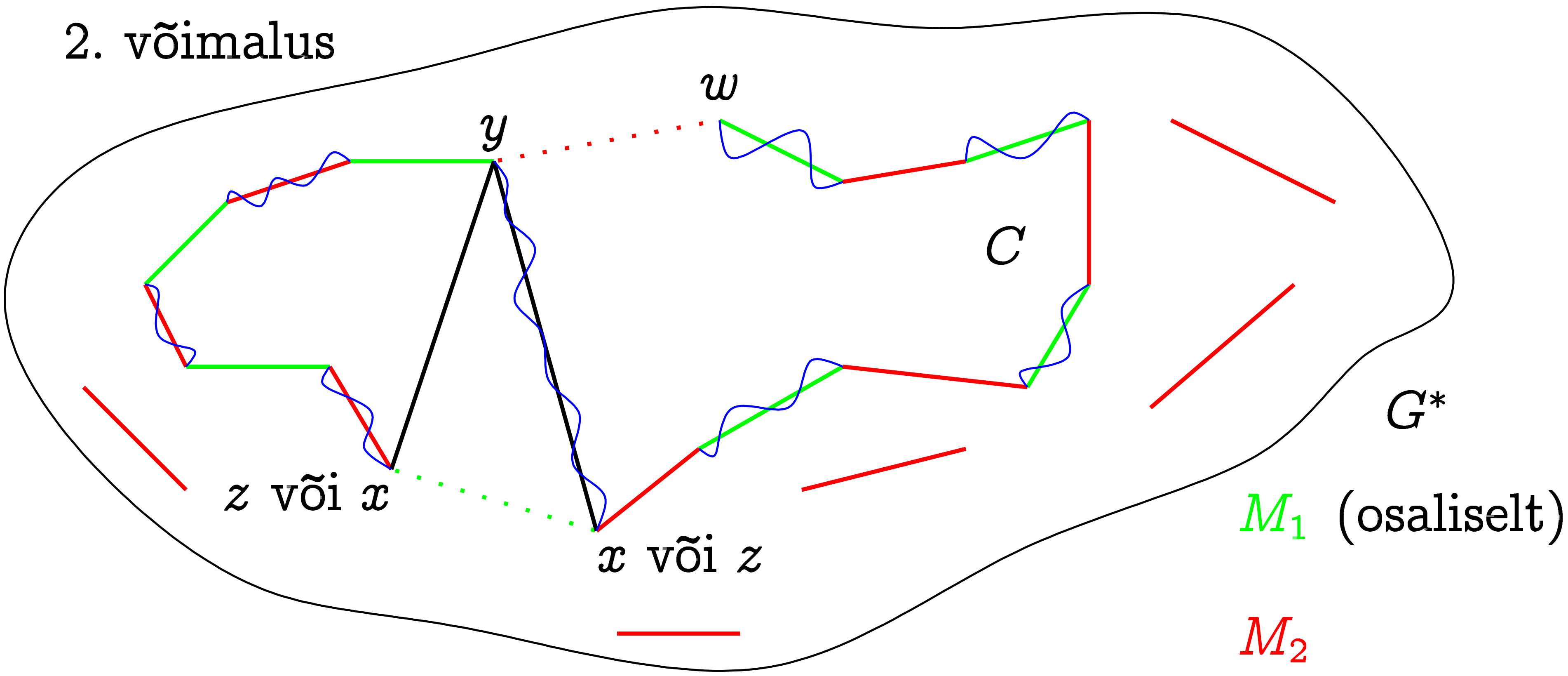
1. võimalus



Kooskõla G^*-il:

- M_1 tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C

2. võimalus



Kooskõla G^*-il:

- sinised servad tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C $\square$

Kuidas leida graafis täielikku kooskõla? Või üldisemalt, maksimaalset kooskõla?

Berge'i teoreemi abil. Kui meil on antud suvaline kooskõla M, siis püüame leida M-laienevat teed.

M-laieneva tee leidmiseks leiame, milliste tippude vahel leidub M-vahelduv tee.

Seda saab leida graafi (laiuti / sügavuti) läbides.