

# Graafid, 1. kontrolltöö

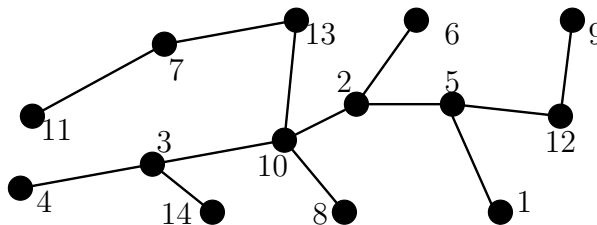
20. oktoober 2004

- (10 punkti)** Leia  $|E(L(K_{m,n}))|$ . Siin  $L(G)$  on graafi  $G$  servograaf.
- (10 punkti)** Olgu  $G = (V, E)$  mingi lihtgraaf, olgu  $e \in E$ . Serva  $e = (u, v)$  kokkutõmbamine graafis  $G$  annab meile lihtgraafi  $G/e$ , kus tipud  $u$  ja  $v$  on asendatud üheainsa tipuga  $w$ , mis on servaga ühendatud kõigi nende tippudega, millega oli ühendatud  $u$  või  $v$ .  
Näita, et kui  $G$  on vähemalt nelja tipuga blokk ja  $e \in E(G)$ , siis kas  $G - e$  või  $G/e$  on blokk.
- (10 punkti)** Kui graafis  $G$  on tsükleid, siis minimaalse pikkusega tsükli pikkust nimetame graafi *vööümbermõõduks* ja tähistame  $g(G)$ . Näita, et kui graafis leidub tsükleid, siis  $g(G) \leq 2d(G) + 1$ . Siin  $d(G)$  on graafi  $G$  diameeter.
- (5 punkti)** Olgu antud graaf  $G = (V, E)$ , mille servadel on defineeritud pikkused, vaatame Hiina postiljoniprobleemi selles graafis. Loengust on teada, et probleemi lahendus koosneb Euleri tsüklist selles graafis ning mingitest täiendavatest ahelatest  $P_i$  paarituarvuliste astmetega tippude vahel.  
Näita, et ükski graafi serv ei kuulu rohkem kui ühele neist ahelatest  $P_i$ .
- (10 punkti)** Olgu  $G = (V, E)$  mingi graaf ning tähistagu  $t(U)$  iga  $U \subseteq V$  jaoks minimaalset sellist arvu  $k$ , mille korral leiduvad graafis  $G[U]$  lihtahelad  $P_1, \dots, P_k$  nii, et iga tipp  $U$ -st kuulub täpselt ühele neist ahelatest. Näita, et kui graafis  $G$  mingi  $U \subseteq V$  jaoks  $t(U) > |V| - |U|$ , siis pole  $G$  Hamiltoni graaf.
- (10 punkti)** Näita, et vähemalt kolme tipuga puus  $T$  on ülimalt

$$\frac{|V(T)|(\Delta(T) - 2) + 2}{\Delta(T) - 1}$$

lehte, kus  $\Delta(T)$  on  $T$  tippude maksimaalne aste.

- (5 punkti)** Näita, et kui graafis  $G$  on kõigile servadele omistatud erinevad kaalud, siis on  $G$ -l üksainus minimaalse kaaluga aluspuu.
- (5 punkti)** Leia märgendatud puu märgendite hulgaga  $\{1, \dots, 14\}$  ja Prüferi koodiga  $(4, 3, 5, 4, 1, 5, 3, 5, 3, 5, 2, 8)$ .
- (5 punkti)** Leia järgmise märgendatud puu Prüferi kood.



Töö eest saab ülimalt 45 punkti. Materjalide kasutamine on lubatud.