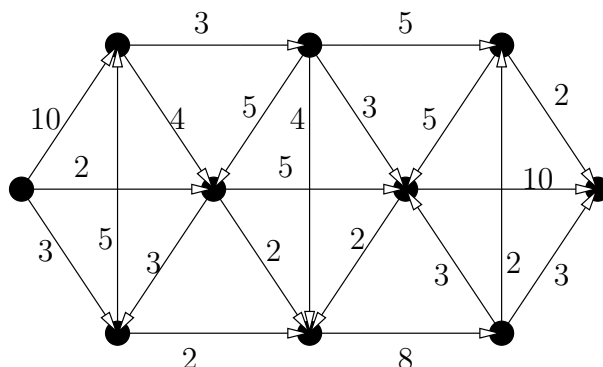


Graafid, 2. kontrolltöö

15. detsember 2004

1. (10 punkti) Leia mingi maksimaalne voog ja minimaalne lõige järgmises võrgus.



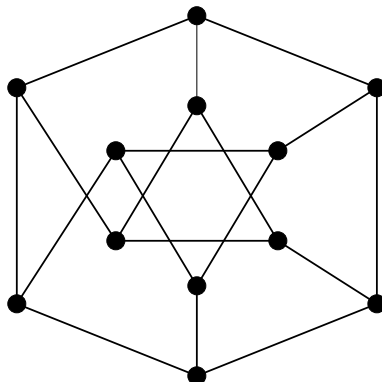
2. (10 punkti) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuseline graaf alustega X ja Y . Iga $S \subseteq X$ jaoks kehtigu $|N(S)| > |S|$. Näita, et siis iga $e \in E$ jaoks leidub graafis G mingi maksimaalne kooskõla M , kus $e \in M$.
3. (10 punkti) 15-mäng koosneb 15-st ruudukujulisest klotsist küljepikkusega 1, mis on nummerdatud arvudega 1-st 15-ni, ning ruudukujulisest karbist küljepikkusega 4, mille sees need klotsid on. Karbis on ruumi 16-le klotsile, üks koht jääb seega vabaks. Võimalikuks käiguks mängus on vaba koha kõrval (horisontaalis või vertikaalis) asuva klotsi nihutamine vabale kohale, seejuures vabaneb koht, kus see klots ennem oli.

12	9	3	5
7	1		8
4	13	11	2
15	10	6	14

Kõrval on kujutatud ühte võimalikku 15-mängu seis. Selles seisus on neli võimalikku käiku: lubatud on nihutada ruutu 1 paremale või ruutu 8 vasakule või ruutu 3 alla või ruutu 11 üles.

Kaks mängijat mängivad järgmist mängu. Algseisuks on 15-mängu mingi seis (s.t. klotsid kuidagi paigutatud ja vaba koht mingis kohas). Mängijad teevad vaheldumisi 15-mängu käike. Seejuures ei tohi korrata juba esinenud seis (kaasa arvatud algseis). Mängija, kellel ei ole ühtegi lubatud käiku, kaotab. Näita, et esimesena käival mängijal leidub võitev strateegia.

4. (10 punkti) Mitme värviga on värvitavad järgmise graafi servad?



5. (10 punkti) Graafi nimetame *välistasandiliseks*, kui teda saab tasandile joonistada nii, et kõik tema tipud asuvad lõpmatu tahu ääres. Näita, et välistasandilise graafi tipud on värvitavad kolme värviga.

6. (10 punkti) Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf, kus $|V| = n$ ja $|E| = m$, olgu $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$ tema kromaatileine polünoom. Olgu $cl_3(G)$ kolmeelemendiliste klikkide arv G -s, s.t.

$$cl_3(G) = |\{U \subseteq V : G[U] \cong K_3\}|.$$

Näita, et $a_{n-2} = m(m-1)/2 - cl_3(G)$.

7. (10 punkti) Kas leidub graafe, mille kromaatileine polünoom on $k^6 - 6k^5 + 14k^4 - 15k^3 + 6k^2$? Kui jah, siis leia kõik sellised graafid.

8. (10 punkti) Malendi X graafiks $n \times n$ malelaua nimetame graafi $G_X^{n \times n}$, mille tippude hulgaks on $n \times n$ ruudustiku ruutude hulk ja serv kahe tipu vahele on tõmmatud parajasti siis, kui malendi X ühe käiguga saab ühele tipule vastavalt ruudult liikuda teisele tipule vastavale ruudule.

Leia $\chi(G_{\text{Lipp}}^{3 \times 4})$. Põhjenda vastust (s.t. põhjenda, miks väiksemast arvust värvidest ei piisa).

Märkus. Lipp võib käia kuitahes mitu ruutu horisontaal-, vertikaal- või diagonaalsihis.

Töö eest saab ülimalt 45 punkti. Materjalide kasutamine on lubatud.