# Graafid

(MTAT.05.080, 4 AP)

| | |
|---|---|
| Loengud: | K 14:15, aud. 405 |
| Praktikumid: | E 10:15, aud. 202 |
| | E 14:15, aud. 512 |
| | T 16:15, aud. 315 |

koduleht:

`http://www.ut.ee/~peeter_l/teaching/graafid04s`

(sisaldab loengumaterjale)

Hinde saamiseks: [2 kontrolltööd **või** eksam] ja kodutööd.

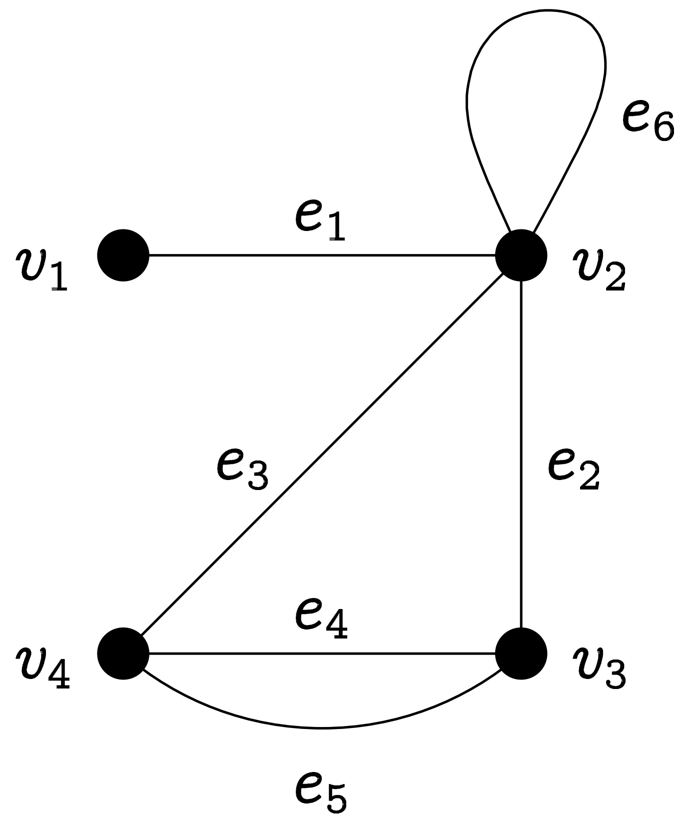
*(Mittesuunatud) graaf* on objekt $G$, millel on järgmised osad:

- Tippude hulk $V$ (tähistame ka $V(G)$).
- Servade hulk $E$ (tähistame ka $E(G)$).
- Intsidentsusfunktsioon $\mathcal{E} : E \longrightarrow \mathcal{P}(V)$, nii et iga $e \in E$ jaoks on $\mathcal{E}(e)$ kas 1- või 2-elemendiline.

Käesolevas kursuses vaatleme graafe, kus $V$ ja $E$ on lõplikud hulgad ning $V \neq \emptyset$.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ning

| $e$ | $\mathcal{E}(e)$ |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_2$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_4\}$ |
| $e_4$ | $\{v_3, v_4\}$ |
| $e_5$ | $\{v_3, v_4\}$ |
| $e_6$ | $\{v_2\}$ |




Graafi võib illustreerida joonisega.

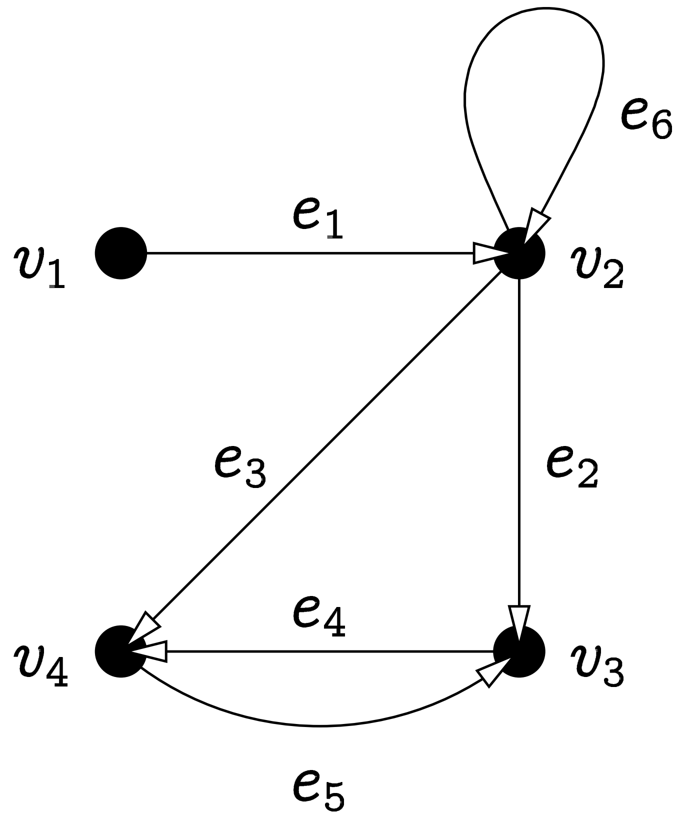
Käesolevas kursuses mõistame graafi all objekti $(V, E, \mathcal{E})$.

*Suunatud graaf* koosneb tipuhulgast $V$, servahulgast $E$ ja intsidentsusfunktsioonist $\mathcal{E} : E \longrightarrow V \times V$.

Suunatud graafi servi nimetatakse ka *kaarteks*.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ning

| $e$ | $\mathcal{E}(e)$ |
|---|---|
| $e_1$ | $(v_1, v_2)$ |
| $e_2$ | $(v_2, v_3)$ |
| $e_3$ | $(v_2, v_4)$ |
| $e_4$ | $(v_3, v_4)$ |
| $e_5$ | $(v_4, v_3)$ |
| $e_6$ | $(v_2, v_2)$ |



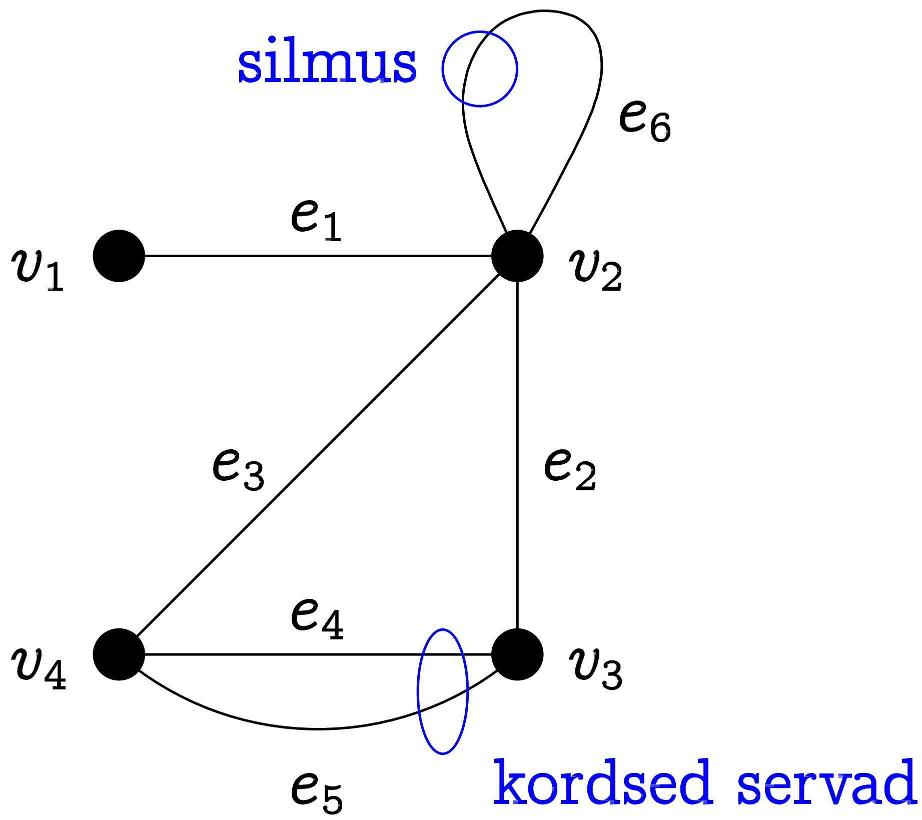
Olgu $G = (V, E, \mathcal{E})$ mingi graaf. Nimetusi:

- Kui $v \in \mathcal{E}(e)$, siis $v$ ja $e$ on *intsidentsed*.
- Kui leidub $e$, et $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, siis $v_1$ ja $v_2$ on *naabertipud*.
- Kui $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, siis tipud $v_1$ ja $v_2$ on serva $e$ *otstipud*. Tähistame ka $v_1 \overset{e}{\text{---}} v_2$.

Olgu $G = (V, E, \mathcal{E})$ mingi suunatud graaf. Nimetusi:

- Kui $\mathcal{E}(e) = (v_1, v_2)$, siis $v_1$ on serva $e$ *algtipp* ja $v_2$ serva $e$ *lõpptipp*.

$e \in E$ on *kordne serv*, kui leidub serv $e' \in E \setminus \{e\}$, nii et $\mathcal{E}(e) = \mathcal{E}(e')$. $e \in E$ on *silmus*, kui $|\mathcal{E}(e)| = 1$.




*Lihtgraaf* on graaf ilma kordsete servade ja silmusteta.

Suunatud lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$.

Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = (v_1, v_2)$, vastab $(v_1, v_2) \in V \times V$.

Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning

| $e$ | $\mathcal{E}(e)$ |
|---|---|
| $e_1$ | $(v_1, v_2)$ |
| $e_2$ | $(v_2, v_3)$ |
| $e_3$ | $(v_2, v_4)$ |
| $e_4$ | $(v_3, v_4)$ |

Siis võime lugeda, et $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$.

Ka suunamata lihtgraafis võime lugeda, et $E \subseteq V \times V$. Servale $e \in E$, kus $\mathcal{E}(e) = \{v_1, v_2\}$, vastab $\{(v_1, v_2), (v_2, v_1)\} \subseteq V \times V$.

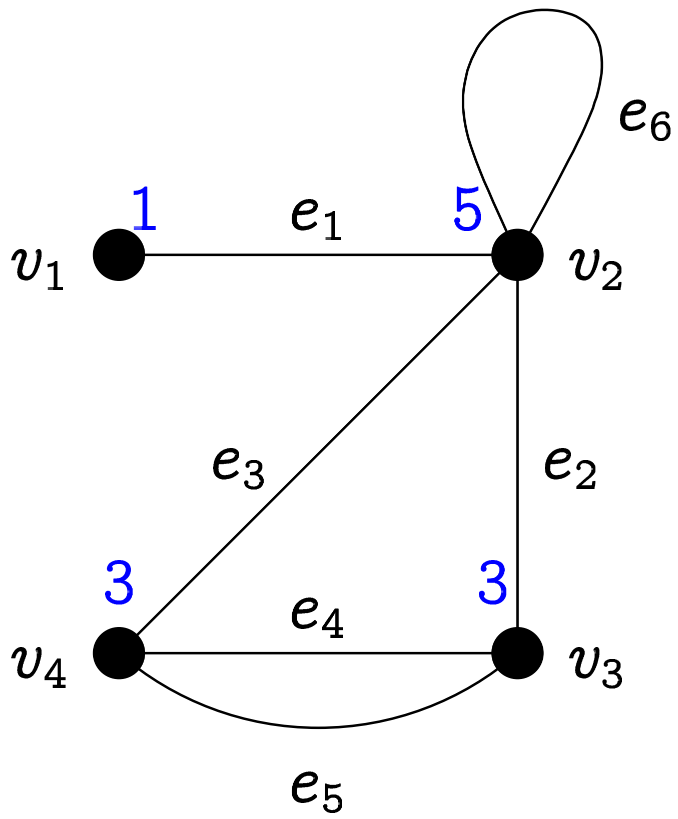
Näide: olgu $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ning

| $e$ | $\mathcal{E}(e)$ |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_2$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_4\}$ |
| $e_4$ | $\{v_3, v_4\}$ |

Siis võime lugeda, et $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$.

Graafi $(V, E, \mathcal{E})$ tipu $v$ *aste* ehk *valents* on selle tipuga intsidentsete servade arv, kusjuures silmuseid loetakse kahekordselt. Tähistus: $\deg(v)$.

$$\deg(v) = |\{e \in E \mid v \in \mathcal{E}(e)\}| + |\{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v\}\}|$$

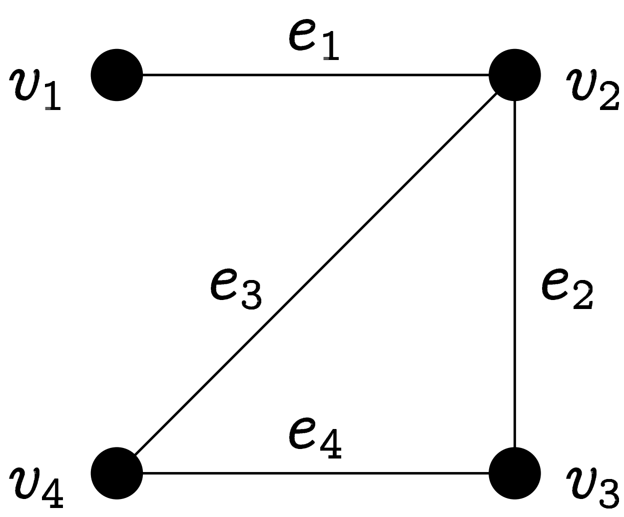


Olgu $G = (V, E)$ mittesuunatud lihtgraaf. Olgu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Graafi $G$ *naabrusmaatriks* on $n \times n$ maatriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, kus

- Kui $(v_i, v_j) \in E$, siis $a_{ij} = 1$.
- Kui $(v_i, v_j) \notin E$, siis $a_{ij} = 0$.

Naabrusmaatriks on sümmeetriline ja tema peadiagonaalil on nullid.

Näide:




| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**Teoreem.** Mittesuunatud lihtgraafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

Tõestus. Loeme, mitu ühte on $G = (V, E)$ naabrusmaatriksis.

- Neid on $2 \cdot |E|$.
- Neid on $\sum_{v \in V} \deg(v)$.

Need kaks suurust on võrdsed. Järelikult on kõigi tippude astmete summa paarisarv. Täisarvude summa on paarisarv parajasti siis, kui paarisarv liidetavaid on paaritud. $\square$

Analoogiliselt: suvalises graafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

Tõestus. Olgu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Vaatame hulki

$$\begin{array}{ll}
\{e \in E \mid v_1 \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_1\}\} \\
\{e \in E \mid v_2 \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_2\}\} \\
\multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\
\{e \in E \mid v_n \in \mathcal{E}(e)\} & \{e \in E \mid \mathcal{E}(e) = \{v_n\}\}
\end{array}$$

Iga $e \in E$ kuulub täpselt kahte hulka.

Seega $\sum\limits_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$, mis on paarisarv. $\square$

Suunatud graafis $(V, E, \mathcal{E})$ võib tipu $v$ jaoks defineerida:

- *sisendastme* $\overrightarrow{\deg}(v)$ — tippu $v$ suubuvate servade (s.t. servade, mille lõpptipp on $v$) arvu;
- *väljundastme* $\overleftarrow{\deg}(v)$ — tipust $v$ lähtuvate servade arvu.

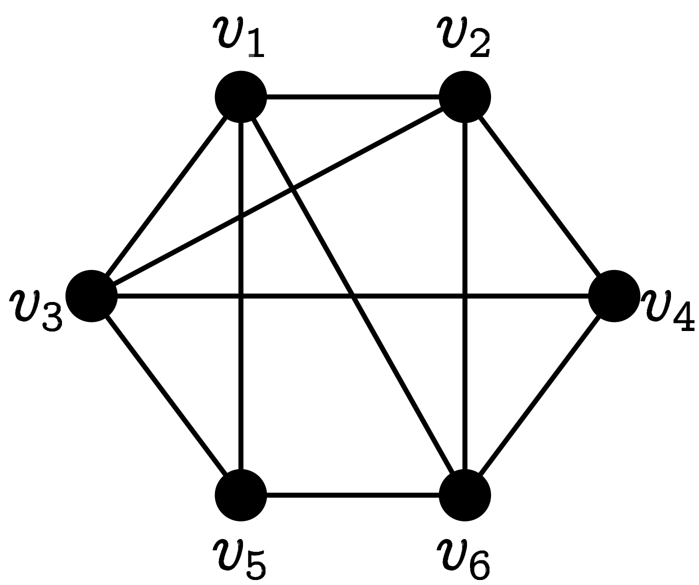
Analoogiline teoreem: $\sum_{v \in V} \overrightarrow{\deg}(v) = \sum_{v \in V} \overleftarrow{\deg}(v)$.

- *Tee* ehk *ahel* graafis $G = (V, E)$ (tipust $x$ tipuni $y$) on jada

$$P : x = v_0 \overset{e_1}{\text{—}} v_1 \overset{e_2}{\text{—}} v_2 \overset{e_3}{\text{—}} v_3 \overset{e_4}{\text{—}} \dots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{—}} v_k = y \ .$$

- Arvu $k$ nimetatakse tee $P$ pikkuseks ja tähistatakse $|P|$.
- Seda, et $P$ on tee tipust $x$ tipuni $y$, tähistame $x \overset{P}{\leadsto} y$.
- Teed, kus tipud on kõik erinevad (erandina võivad $x_0$ ja $x_k$ võrdsed olla), nimetame *lihtahelaks*.
- Teed, kus $v_0 = v_k$, nimetame *kinniseks* ahelaks.
- Kinnist lihtahelat nimetame *tsükliks*.
- Graaf on *sidus*, kui tema iga kahe tipu vahel leidub ahel.
- *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude $u, v \in V$ vahel nimetatakse neid ühendava lühima lihtahela pikkust.

Näiteid:




Ahel: $v_1 — v_2 — v_4 — v_6 — v_2 — v_3$

Lihtahel: $v_1 — v_2 — v_3 — v_4$

Kinnine ahel: $v_1 — v_2 — v_3 — v_1 — v_5 — v_6 — v_1$

Tsükkel: $v_1 — v_2 — v_6 — v_5 — v_1$

$d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_1) = 0$.

**Teoreem.** Graafis, mille iga tipu aste on vähemalt 2, leidub tsükkel.

Tõestus. Silmus on tsükkel. Kordsed servad moodustavad tsükli.

Eeldame, et $G = (V, E)$ on lihtgraaf. Olgu $v_1 \in V$. Leidub $v_2 \in V$ nii, et $v_1 — v_2$. Leidub $v_3 \in V$ nii, et $v_1 — v_2 — v_3$. See on lihtahel.

Olgu meil lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k$. Leidub $v_{k+1} \in V$ nii, et $v_{k+1} \neq v_{k-1}$ ja $v_k — v_{k+1}$.

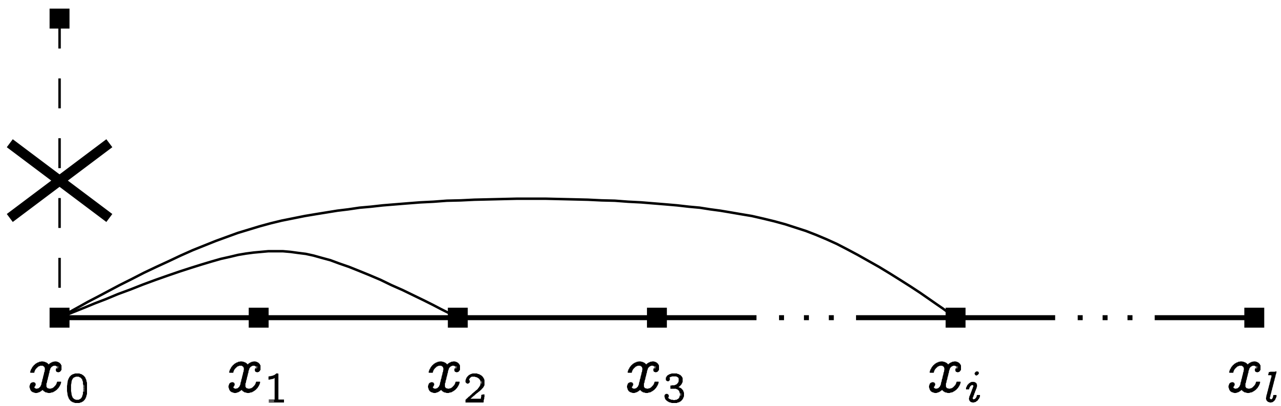
Kui $v_{k+1} = v_i$ mõne $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ jaoks, siis on meil tsükkel.

Vastasel juhul on meil pikem lihtahel $v_1 — v_2 — \cdots — v_k — v_{k+1}$.

Lihtahela pikkus on piiratud hulga $V$ võimsusega. $\square$

**Teoreem.** Lihtgraafis, mille iga tipu aste on vähemalt $k$ (kus $k \geqslant 2$), leidub tsükkel pikkusega vähemalt $k+1$.

Tõestus. Olgu $x_0 — x_1 — \cdots — x_l$ maksimaalse pikkusega lahtine lihtahel selles graafis.




Siis $x_0$-i kõik naabrid asuvad sellel ahelal.

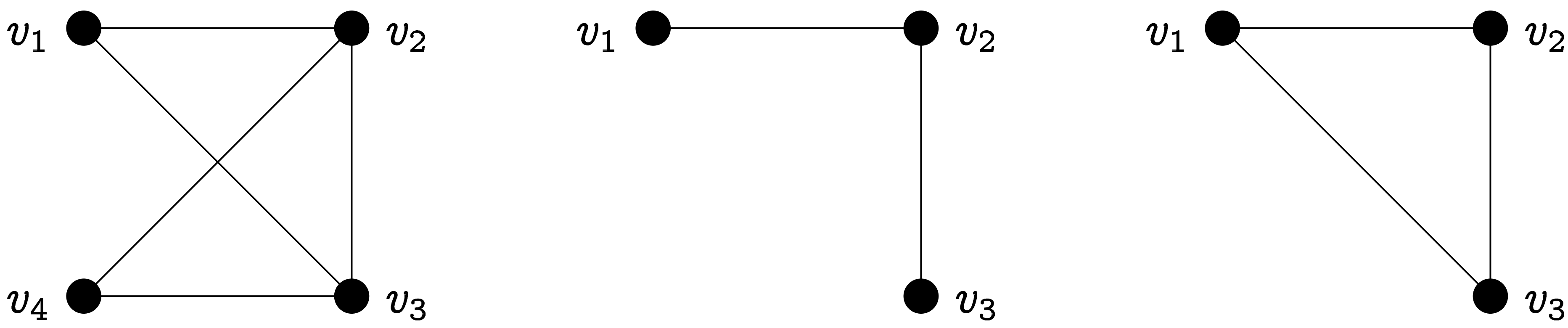
Olgu $x_i$ tipu $x_0$ kõige suurema indeksiga naaber. Siis $i \geqslant k$.

$x_0 — x_1 — \cdots — x_i — x_0$ on tsükkel pikkusega $i+1 \geqslant k+1$.

Graafi $G = (V, E)$ *alamgraafiks* nimetame graafi $G' = (V', E')$, kus $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ ja iga $e \in E'$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V'$. Tähistame $G' \leqslant G$.

Alamgraafi $(V', E')$ nimetame *indutseerituks* (hulga $V'$ poolt), kui hulk $E'$ on suurim võimalik, s.t. iga $e \in E$ jaoks kehtib $\mathcal{E}(e) \subseteq V' \Rightarrow e \in E'$.

Näide:



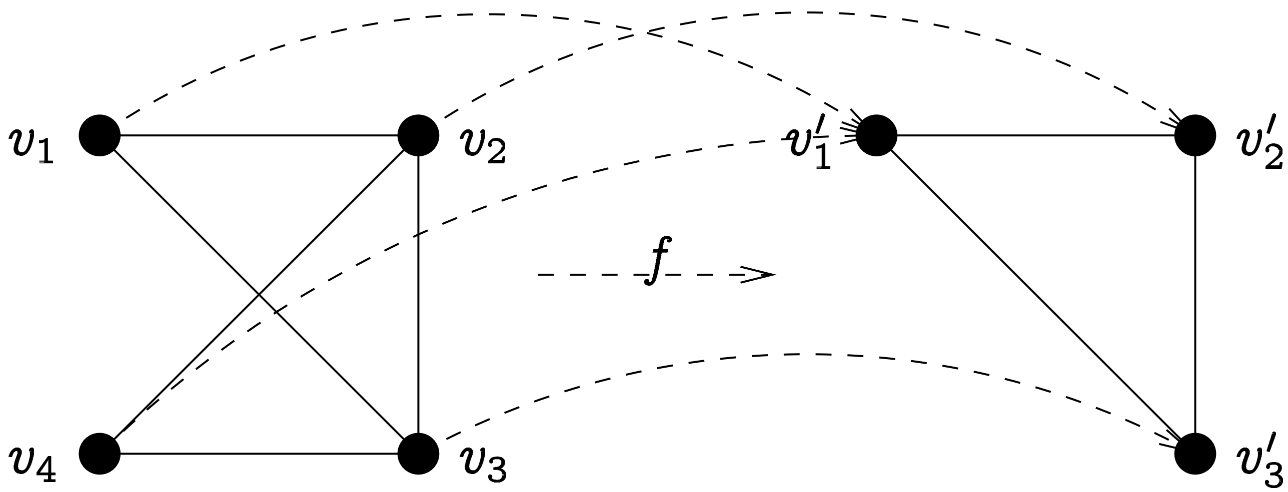

Graafi $G$ *sidususkomponentideks* nimetatakse tema maksimaalseid sidusaid alamgraafe.

Veel mõisteid:

- Graafi serv on *sild*, kui tema eemaldamine suurendab graafi sidususkomponentide arvu.
- Graafi tipp on *lõiketipp*, kui tema (ning kõigi temaga intsidentsete servade) eemaldamine suurendab graafi sidususkomponentide arvu.

*Homomorfism* graafist $G_1 = (V_1, E_1)$ graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ on kujutus $f : V_1 \longrightarrow V_2$, nii et tipud $x, y \in V_1$ on naabrid parajasti siis, kui tipud $f(x), f(y) \in V_2$ on naabrid.

Näide:




Homomorfism $f$ on *monomorfism*, kui ta on üksühene.

Homomorfism $f$ on *isomorfism*, kui ta on bijektsioon.

Graafid $G_1$ ja $G_2$ on *isomorfsed* (tähist. $G_1 \cong G_2$), kui nende vahel leidub isomorfism.

Tavaliselt me loeme isomorfseid graafe üheks ja samaks.

Näiteks, olgu $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$ graafid. Ütleme, et $G_1$ on $G_2$ alamgraaf, kui leiduvad $V_1' \subseteq V_2$ ja $E_1' \subseteq E_2$ nii, et $G_1 \cong (V_1', E_1')$ ja $(V_1', E_1') \leqslant G_2$.

$G_1$ on $G_2$ indutseeritud alamgraaf parajasti siis, kui leidub monomorfism graafist $G_1$ graafi $G_2$.

Graafide isomorfismi probleem: antud kaks (liht)graafi. Teha kindlaks, kas nad on isomorfsed.

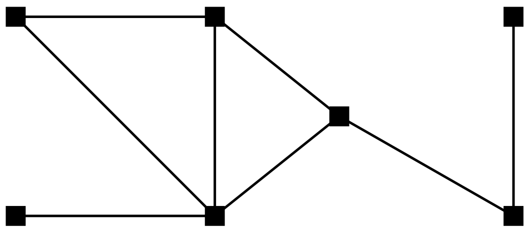
Graafid on antud näiteks oma naabrusmaatriksitega.

Ei ole teada polünomiaalses ajas töötavat algoritmi, mis seda probleemi lahendaks.

Vaatame mõningaid polünomiaalses ajas kontrollitavaid tingimusi, mis on tarvilikud kahe graafi isomorfismiks.

- Isomorfsetes graafides on sama palju tippe ja servi.

Graafi $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ *valentsijada* on mittekahanev järjend pikkusega $n$ väärtustest $\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n)$. Näiteks graafi



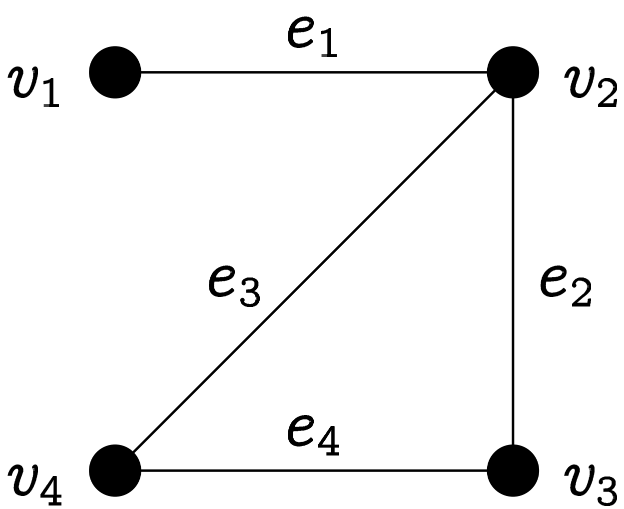
valentsijada on $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$.

- Isomorfsetel graafidel on võrdsed valentsijadad.

Olgu $A$ ruutmaatriks ja $E$ samade dimensioonidega ühikmaatriks. Maatriksi $A$ *karakteristlik polünoom* (muutujaga $x$) on

$$\det(A - xE) \ .$$

Lihtgraafi *karakteristlik polünoom* on tema naabrusmaatriksi karakteristlik polünoom. Näide:




$$\det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

$$= x^4 - 4x^2 - 2x + 1$$

Kaks lihtgraafi on isomorfsed parajasti siis, kui ühe naabrusmaatriks on saadav teisest ridu ja veerge ühtemoodi permuteerides.

Selline permuteerimine viib peadiagonaali elemendid peadiagonaali elementideks.

Sellisel permuteerimisel toimub kokku paarisarv ridade ja veergude vahetusi, seega ei muuda see determinanti.

- Isomorfsetel graafidel on sama karakteristlik polünoom.

Kui $V$ on mingi hulk ja $\rho$ on mingi antirefleksiivne binaarne relatsioon sellel, siis defineerib $\rho$ (suunatud) lihtgraafi tipuhulgaga $V$ ja servahulgaga

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in V, x \; \rho \; y\} \ .$$

- *Nullgraafiks* nimetatakse graafi, milles pole servi. $n$-tipulist nullgraafi tähistame $O_n$ või $N_n$.

- *Täisgraafiks* nimetatakse graafi, kus iga kahe erineva tipu vahel on üks serv. $n$-tipulist täisgraafi tähistame $K_n$.

**Lause.** Graafis $K_n$ on $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.

- Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline*, kui $V$ on tükeldatav kaheks hulgaks (aluseks) $V_1$ ja $V_2$ (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nii, et ühegi serva mõlemad otstipud ei kuulu samasse alusesse.

Kui $\rho$ on relatsioon hulkade $X$ ja $Y$ (kus $X \cap Y = \emptyset$) vahel, siis lihtgraaf tipuhulgaga $V = X \cup Y$ ja servahulgaga

$$E = \{(x, y), (y, x) \mid x \in X, y \in Y, x \ \rho \ y\}$$

on kahealuseline graaf alustega $X$ ja $Y$.

• Kahealuseline lihtgraaf alustega $V_1$ ja $V_2$ on *täielik kahealuseline*, kui iga $v_1 \in V_1$ ja $v_2 \in V_2$ vahel leidub serv. Täielikku kahealuselist graafi, kus $|V_1| = m$ ja $|V_2| = n$, tähistame $K_{m,n}$.

**Lause.** Graafis $K_{m,n}$ on $mn$ serva.

**Teoreem.** Graaf on kahealuseline $\Leftrightarrow$ kõik tema tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Tõestus $\Rightarrow$. Tsüklis on mingi arv samme esimesest alusest teise ja samapalju samme teisest alusest esimesse.

Tõestus $\Leftarrow$. Eeldame, et graaf $G = (V, E)$ on sidus. Vastasel korral viime järgneva operatsiooni läbi iga sidususkomponendiga.

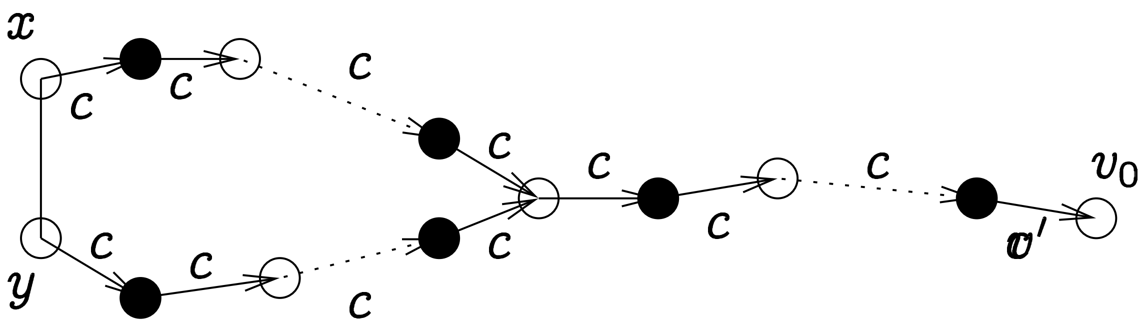
Järgnevas värvime me graafi $G$ tippe mustaks ja valgeks.

Valime mingi tipu $v_0 \in V$ ja värvime ta valgeks.

Olgu $u$ mingi värvitud tipp, millel on värvimata naabreid. Olgu $v$ üks tema värvimata naabertippudest. Värvime $v$ teist värvi, kui $u$. Jätame meelde, et $v$-d värvides lähtusime $u$ värvist. Tähistame $v \xrightarrow{c} u$.

Kordame eelmist lõiku, kuni tekivad naabertipud $x$ ja $y$, mis on värvitud sama värviga, või kuni tipud otsa saavad.

Kui tekivad sellised tipud $x$ ja $y$, siis




on meil paarituarvulise pikkusega tsükkel $x — \cdots —$

$\cdots — y — x$.

Vastasel juhul (kui tipud otsa said) moodustavad m

tipud ühe aluse ja valged teise. $\square$

Tartu Akadeemiline Meeskoor võtab vastu uusi lauljaid.

Proovid toimuvad T 18:30 ja N 18:30 endises EPA klubis (Veski 6, Kassitoomel).

Uute lauljate vastuvõtt algab 7. septembrist.

Eriti oodatud on tenorid.