Ramsey teooria
Tõenäosuslikud tõestused

Olgu $G = (V, E)$ graaf. Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *klikiks*, kui suvalised kaks (erinevat) tippu $u, v \in S$ on G-s servaga ühendatud.

Teisisõnu, S on klikk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on täisgraaf.

Tipuhulka $S \subseteq V$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks*, kui ühegi kahe S-i kuuluva tipu vahel serva ei ole.

Teisisõnu, S on sõltumatu hulk, kui indutseeritud alamgraaf $G[S]$ on tühigraaf.

Lause. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, nii et $|V| \geq 6$. Siis leidub G-s kolmeelemendiline klikk või kolmeelemendiline sõltumatu hulk.

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi tipp. Olgu

- $X = N(v)$ (tipu v naabertippude hulk);
- $Y = \overline{N}(v) = V \backslash (X \cup \{v\})$ (tipu v mitte-naabrid).

Kuna $|X| + |Y| = |X \cup Y| = |V| - 1 \geq 5$, siis $|X| \geq 3$ või $|Y| \geq 3$. Oletame, et $|X| \geq 3$. On kaks võimalust:

- X on sõltumatu hulk.
- Leiduvad $u, w \in X$, nii et $(u, w) \in E$. Siis $\{u, v, w\}$ on klikk.

Juht $|Y| \geq 3$ on analoogiline (G asemel $\overline{G}$). $\square$

Olgu $r(k,l)$ (kui ta leidub) vähim selline täisarv, et iga lihtgraafi $G=(V,E)$ jaoks, kus $|V| \geq r(k,l)$, kehtib

$$K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_l \hookrightarrow G \ .$$

Siin $\hookrightarrow$ tähistab indutseeritud alamgraafiks olemist.

Tänases loengus me näitame, et $r(k,l)$ leidub kõigi $k,l \in \mathbb{N}$ jaoks, ning anname mõned alam- ja ülemtõkked.

Eelmine lause näitas, et $r(3,3)$ leidub ja on ülimalt 6.

Kuna $K_3 \not\hookrightarrow C_5$ ja $O_3 \not\hookrightarrow C_5$, siis $r(3,3)=6$.

Lemma. Kui $r(k,l)$ leidub, siis leidub ka $r(l,k)$ ja $r(l,k)=r(k,l)$.

Tõestus. Ilmne. Vahetame ära servade olemise ja mitteolemise. $\square$

Lemma. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$. Suurused $r(k,1)$ ja $r(k,2)$ leiduvad ning $r(k,1) = 1$ ja $r(k,2) = k$.
Analoogiliselt $r(1,l) = 1$ ja $r(2,l) = l$.

Tõestus. O_1 on lihtsalt ühetipuline graaf. See sisaldub igas graafis. Seega $r(k,1) = 1$.

Olgu $G = (V,E)$ lihtgraaf, olgu $|V| = k$. Kui $G = K_k$, siis $K_k \hookrightarrow G$. Kui $G \neq K_k$, siis olgu $u, v \in V$ sellised, et $(u,v) \notin E$. Siis $G[\{u,v\}] = O_2$.

Oleme näidanud, et $r(k,2) \leq k$. Samas $K_k \not\hookrightarrow K_{k-1}$ ja $O_2 \not\hookrightarrow K_{k-1}$. Seega $r(k,2) = k$. $\square$

Teoreem. Olgu $k, l \in \mathbb{N}$, nii et $k \geq 2$ ja $l \geq 2$. Siis $r(k,l)$ leidub. Peale selle kehtib $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$.

Tõestus. Induktsioon üle $k+l$.

Baas. $k+l=4$. Siis $k=l=2$. Eelmine lemma annab

$$r(2,2) = 2 = 1+1 = r(1,2) + r(2,1) \quad .$$

Samm. Induktsiooni eeldusest saame, et $r(k-1,l)$ ja $r(k,l-1)$ leiduvad.

Olgu $G=(V,E)$ mingi lihtgraaf, nii et $|V| = r(k-1,l) + r(k,l-1)$.

Olgu $v \in V$ ja vaatame hulki $N(v)$ ja $\overline{N}(v)$.

Kuna $|N(v)| + |\overline{N}(v)| = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1,l)$.

2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k,l-1)$.

Esimesel juhul vaatame graafi $G[N(v)]$. On kaks võimalust:

- $K_{k-1} \hookrightarrow G[N(v)]$. Olgu $S \subseteq N(v)$ $(k-1)$-tipuline klikk. Siis $S \cup \{v\}$ on k-tipuline klikk.

- $O_l \hookrightarrow G[N(v)]$. Siis ka $O_l \hookrightarrow G$.

Teisel juhul vaatame graafi $G[\overline{N}(v)]$. On kaks võimalust:

- $O_{kl-1} \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Olgu $S \subseteq \overline{N}(v)$ $(l-1)$-tipuline sõltumatu hulk. Siis $S \cup \{v\}$ on l-tipuline sõltumatu hulk.

- $K_k \hookrightarrow G[\overline{N}(v)]$. Siis ka $K_k \hookrightarrow G$.

Oleme näidanud, et suvaline $(r(k-1,l)+r(k,l-1))$-tipuline graaf sisaldab k-elemendilist klikki või l-elemendilist sõltumatut hulka. Seega on $r(k,l)$ ülimalt $r(k-1,l)+r(k,l-1)$.
$\square$

Järeldus. Kui $r(k-1,l)$ ja $r(k,l-1)$ on paarisarvud, siis $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$.

Tõestus. Olgu $G = (V,E)$ lihtgraaf, kus $|V| = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$. Olgu $v \in V$ selline, et $|N(v)|$ on paarisarv. Selline v leidub, sest $|V|$ on paaritu.

Kuna nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib vähemalt üks järgmistest väidetest:

1. $|N(v)| \geq r(k-1,l)$.
2. $|\overline{N}(v)| \geq r(k,l-1)$.

Tõestus jätkub identselt eelmise teoreemi tõestusega. $\square$

Lause. $r(k,l) \leq \begin{pmatrix} k+l-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$.

Tõestus. $r(1,1) = r(1,2) = r(2,1) = 1 = \binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1}$.

k ja l-i ülejäänud väärtuste jaoks tõestame selle väite induktsiooniga üle $k+l$. Me oleme juba ära teinud baasi $k+l \leq 3$.

Samm. Olgu $k+l \geq 4$. Siis
$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$.
$\square$

Arvusid $r(k,l)$ saab üldistada.

$r(k,l)$ on vähim selline arv n, et kui me värvime K_n servad kahe värviga (värvimisviis ei pruugi olla korrektne), siis leidub seal alamgraafina esimest värvi K_k või teist värvi K_l.

Olgu $r(a_1,\ldots,a_k)$ vähim selline arv n, et kui me värvime K_n servad k värviga, siis leidub $i \in \{1,\ldots,k\}$ nii, et leidub alamgraaf K_{a_i}, mille kõik servad on värvi a_i.

Kehtib võrratus

$$
\begin{aligned}
&r(a_1, \ldots, a_k) \leq \\
&\quad r(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k) + r(a_1, a_2 - 1, a_3, \ldots, a_k) + \cdots + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad r(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1) - (k - 2)
\end{aligned}
$$

ning $r(\ldots, 1, \ldots) = 1$.

Tõestus: samasugune kui juhul $k = 2$.

Teoreem. Kui $k \geq 2$, siis $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Tõestus. Olgu $n < 2^{k/2}$ ja olgu $\mathbf{G}_n$ kõigi n-tipuliste lihtgraafide hulk. Meil tuleb näidata, et leidub $G \in \mathbf{G}_n$, nii et $K_k \not\hookrightarrow G$ ja $O_k \not\hookrightarrow G$.

Olgu meil antud mingi hulk $\mathcal{X}$ ja selle hulga elementide mingi omadus P. S.t. P on funktsioon hulgast $\mathcal{X}$ hulka $\{\text{tõene}, \text{väär}\}$. Olgu meil tarvis näidata, et leidub $x \in \mathcal{X}$, mille korral $P(x)$ kehtib.

Selleks piisab, kui näitame, et kui x on mingi *juhuslikult* valitud element hulgast $\mathcal{X}$, siis $\mathbf{P}[P(x)] > 0$.

Defineerimaks, mida kujutab endast hulgast $\mathbf{G}_n$ juhusliku graafi valimine, tuleb meil fikseerida mingi tõenäosusjaotus hulgal $\mathbf{G}_n$.

Olgu $\mathbf{G}_n$ hoopis kõigi *märgendatud* n-tipuliste lihtgraafide hulk (märgenditega hulgast $\{1, \ldots, n\}$). Siis $|\mathbf{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$.

Olgu $G \in \mathbf{G}_n$ tipuhulk $\{v_1, \ldots, v_n\}$, kus v_i märgendiks on i.

Olgu G juhuslik märgendatud graaf hulgast $\mathbf{G}_n$, kusjuures kõigil $2^{\binom{n}{2}}$ graafil olgu sama suur tõenäosus valituks saada.

Leiame ülemise tõkke suurustele $\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G]$ ja $\mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G]$.

$$\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] =$$

$$\frac{k\text{-elemendilist klikki sisaldavate graafide arv } \mathbf{G}_n\text{-s}}{|\mathbf{G}_n|} \leq$$

$$\frac{1}{|\mathbf{G}_n|} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \left| \{G \in \mathbf{G}_n \mid G[\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}] \cong K_k\} \right| =$$

$$\frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq$$

$$\frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \frac{(2^{k/2})^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k^2}{2} - \frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!}$$

Kui k kasvab, siis $\frac{2^{k/2}}{k!}$ kahaneb. Kui $k \geq 3$, siis $\frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}$.

Variant $k = 2$ tuleb pärast eraldi läbi vaadata.

Analoogiliselt, kui $k \geq 3$, siis $\mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$.

Meil oli $P(G) \equiv$ „$K_k \not\hookrightarrow G$ ja $O_k \not\hookrightarrow G$“. Kui $k \geq 3$, siis

$$\mathbf{P}[K_k \not\hookrightarrow G \text{ ja } O_k \not\hookrightarrow G] = 1 - \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \geq$$
$$1 - \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] - \mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] > 1 - 1/2 - 1/2 = 0 \ .$$

Seega, kui $k \geq 3$, siis $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Kui $k = 2$, siis $r(k, k) = 2 = 2^{k/2}$. $\square$

$r(k, l)$ täpsed väärtused on teada ainult väheste paaride (k, l) jaoks. Ülevaate leiab aadressilt

`http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1.ps`

Näitame, et iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub graaf G, nii et $\chi(G) \geq n$ ja $g(G) \geq n$.

Tõenäosusjaotus hulgal $\mathbf{X}$ on mingi funktsioon $\mu : \mathbf{X} \longrightarrow [0, 1]$, nii et $\sum_{x \in \mathbf{X}} \mu(x) = 1$.

(loeme, et X on lõplik)

Sündmus hulgal $\mathbf{X}$ on mingi $A \subseteq \mathbf{X}$.

Olgu μ fikseeritud. Siis $\mathbf{P}(A) = \sum_{x \in A} \mu(x)$.

Kui $A, B \subseteq \mathbf{X}$, siis $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Olgu $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Siis F-i võib vaadata kui *juhuslikku muutujat* jaotusel μ.

F-i keskväärtus on $\mathbf{E}(F) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \mu(x) F(x)$.

$\mathbf{E}$ on lineaarne: $\mathbf{E}(F + F') = \mathbf{E}(F) + \mathbf{E}(F')$. Seda isegi juhul, kui F ja F' pole sõltumatud.

Kui $F(\mathbf{X}) \subseteq \{0, 1\}$, siis $\mathbf{E}(F) = \mathbf{P}(F = 1)$.

Kui $A \subseteq \mathbf{X}$, siis χ_A olgu tema karakteristlik funktsioon. Siis $\mathbf{E}(\chi_A) = \mathbf{P}(A)$.

Kui $F(\mathbf{X}) \subseteq \mathbb{N}$, siis $\mathbf{E}(F) \geq \mathbf{P}(F > 0)$.

Lemma (Markovi võrratus). Olgu F mingi juhuslik muutuja ja $a > 0$. Siis

$$\mathbf{P}(F \geq a) \leq \mathbf{E}(F)/a \ .$$

Tõestus.

$$\mathbf{E}(F) = \sum_{x \in \mathbf{X}} \mu(x) F(x) \geq \sum_{\substack{x \in \mathbf{X} \\ F(x) \geq a}} \mu(x) F(x)$$

$$\geq \sum_{\substack{x \in \mathbf{X} \\ F(x) \geq a}} \mu(x) \cdot a = \mathbf{P}(F \geq a) \cdot a \ . \qquad \square$$

See võrratus sobib näitamiseks, et $\mathbf{P}(F < a)$ on suur.

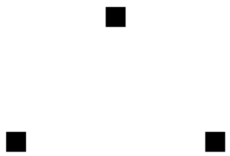
Olgu $p \in [0, 1]$. Defineerime n-tipuliste märgendatud graafide hulgal $\mathbf{G}_n$ järgmise tõenäosusjaotuse $\mathcal{G}(n, p)$:

G valimine jaotuse $\mathcal{G}(n, p)$ järgi (tähistame $G \leftarrow \mathcal{G}(n, p)$) käib järgmiselt:

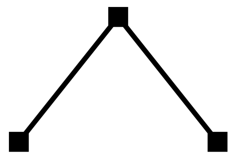
- $V(G) := \{v_1, \ldots, v_n\}$. Olgu $E(G) := \emptyset$.
- Iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ja $j \in \{i+1, \ldots, n\}$ jaoks:
  - Viskame kulli ja kirja mündiga, millel kulli tulemise tõenäosus on p.
  - Kui tuli kull, siis $E(G) := E(G) \cup \{(v_i, v_j)\}$.
  - Mündivisked peavad olema <u>üksteisest sõltumatud</u>.

Edaspidistes näidetes olgu $q = 1 - p$.

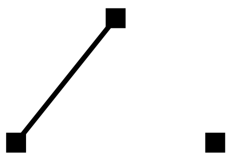
(Märgendamata) graafi jaotuse $\mathcal{G}(3, p)$ järgi valides saame järgmised graafid järgmise tõenäosusega:



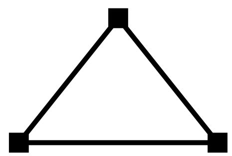
q^3



$3p^2q$



$3pq^2$



p^3

$\mathbf{E}(\Delta) = 3pq^2 + 6p^2q + p^3$. Kui $p = q = 1/2$, siis $\mathbf{E}(\Delta) = 5/4$.

Olgu $G \leftarrow \mathcal{G}(n,p)$. Olgu H mingi $n' \leq n$-tipuline ja m'-servaline graaf.

Kui $\psi : V(H) \longrightarrow V(G)$ on mingi *injektiivne* funktsioon, siis tõenäosus, et $H \leq G$, kusjuures mingile tipule $v \in V(H)$ vastab tipp $\psi(v) \in V(G)$, on $p^{m'}$.

Tõenäosus, et $H \hookrightarrow G$, kusjuures samasugune vastavus kehtib, on $p^{m'} q^{\binom{n'}{2} - m'}$.

Üldiselt, $\mathbf{P}(H \hookrightarrow G) \leq \sum_{\substack{U \subseteq V(G) \\ |U| = n'}} \mathbf{P}(H \cong G[U])$.

Indutseeritud alamgraafi H keskmine esinemiste arv G on just täpselt $\sum_{\substack{U \subseteq V(G) \\ |U| = n'}} \mathbf{P}(H \cong G[U])$.

Lause. Olgu $G \leftarrow \mathcal{G}(n,p)$. Tõenäosus, et G-s leidub k-tipuline sõltumatu hulk, on ülimalt $\binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$.

Tõestus. Tõenäosus, et mingi konkreetne $U \subseteq V(G)$, $|U| = k$, on sõltumatu hulk, on $q^{\binom{k}{2}}$. Selliseid hulkasid U on $\binom{n}{k}$ tükki. $\square$

Lause. Olgu $G \leftarrow \mathcal{G}(n,p)$. Tõenäosus, et G-s leidub k-tipuline klikk, on ülimalt $\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$.

G-s leidub keskmiselt $\binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}$ sõltumatut hulka ja $\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$ klikki suurusega k.

Tähistame

$$(n)_k := n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\ .$$

Lemma. Olgu $G \leftarrow \mathcal{G}(n,p)$, olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis graafis G leidub keskmiselt $p^k(n)_k/2k$ tsüklit pikkusega k.

Tõestus. n-elemendilisest hulgast $V(G)$ on võimalik k-elemendiline järjend $J = (v_1, \ldots, v_k)$, kus $v_1, \ldots, v_k$ on kõik erinevad, välja valida $(n)_k$ erineval viisil.

Tõenäosus, et G-s on servad (v_1, v_2), (v_2, v_3), $\ldots$, (v_k, v_1), on p^k.

Ühele tsüklile vastab $2k$ erinevat järjendit J. $\square$

Teoreem. Iga k jaoks leidub graaf, mille vööümbermõõt ja kromaatiline arv on mõlemad suuremad kui k.

Tõestus. Nimetame *lühikeseks* tsüklit pikkusega ülimalt k. Mingi graafi G jaoks nimetame *suureks* tipuhulka võimsusega vähemalt $|V(G)|/k$. Me tahame leida graafi, kus pole lühikesi tsükleid ega suuri sõltumatuid hulki.

Tuleb välja, et võimatu on valida p-d nii, et $\mathbf{P}(g \leq k) < 1/2$ ja $\mathbf{P}(\alpha \geq n/k) < 1/2$.

Valime p nii, et $\mathbf{P}(\alpha \geq n/k)$ oleks väike ning lühikeste tsüklite keskmine arv oleks ka väike.

Lemma. Olgu $k \in \mathbb{N}$ ja olgu p funktsioon n-st, nii et $p \geq (6k \ln n)/n$ (kõigi küllalt suurte n-de jaoks).
Siis $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\alpha \geq n/2k) = 0$.

Tõestus. Olgu $n \geq r \geq n/2k$. Siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\alpha \geq r) &\leq \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \leq n^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} = (nq^{(r-1)/2})^r \leq (ne^{-p(r-1)/2})^r \\
&= (ne^{-pr/2+p/2})^r \leq (ne^{-(3/2)\ln n + p/2})^r \leq (nn^{-3/2}e^{1/2})^r \\
&= \left(\frac{e}{n}\right)^{r/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .
\end{aligned}$$

$1 - p \leq e^{-p}$, kui $0 \leq p \leq 1$.

Lemma on tõestatud.

Teoreemi tõestus:

Fikseerime ε-i nii, et $0 < \varepsilon < 1/k$ ning olgu $p = n^{\varepsilon - 1}$.

Olgu $X(G)$ lühikeste (s.t. pikkusega $\leq k$) tsüklite arv graafis X. Siis

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{(k-2) n^k p^k}{2},$$

sest $(np)^i \leq (np)^k$, sest $np = n^\varepsilon \geq 1$.

$n^\varepsilon \geq 6k \ln n$, seega $n^{\varepsilon - 1} \geq (6k \ln n)/n$ kõigi küllalt suurte n-de jaoks. Järelikult $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}(\alpha \geq n/2k) = 0$.

$$\mathbf{P}(X \geq n/2) \leq \mathbf{E}(X)/(n/2) \leq (k-2)n^{k-1}p^k = (k-2)n^{k\varepsilon-1},$$

kuna $k\varepsilon < 1$, siis $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X \geq n/2) = 0$.

Olgu n piisavalt suur, nii et

$$\mathbf{P}(X \geq n/2) < 1/2$$
$$\mathbf{P}(\alpha \geq n/2k) < 1/2$$

ning olgu $G \in \mathbf{G}_n$ selline, et $X(G) < n/2$ ja $\alpha(G) < n/2k$.

Graafis G on vähem kui $n/2$ tsüklit pikkusega $\leq k$. Kustutame igast lühikesest tsüklist ühe tipu, saame graafi H, kus on rohkem kui $n/2$ tippu ning $g(H) > k$.

$\alpha(H) \leq \alpha(G) \leq n/2k$. Seega $\alpha(H) < |V(H)|/k$ ning H-i värvimiseks on tarvis rohkem kui k värvi. $\square$