# Kooskõlad ja katted

Olgu meil hulk $X$. Me tahame selle hulga elemente paaridesse panna.

Kitsendus: suvalisi kahte elementi ei saa paari panna. Antud on hulk

$$P \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in X, x \neq y\},$$

mis näitab, milliseid elemente üleüldse võib paari panna.

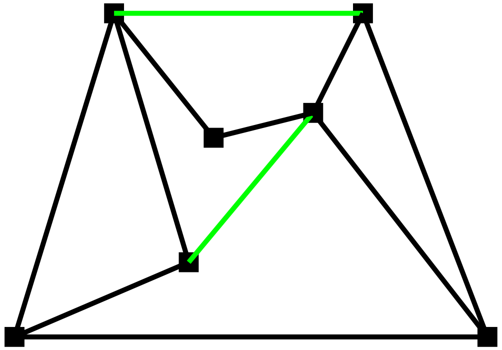
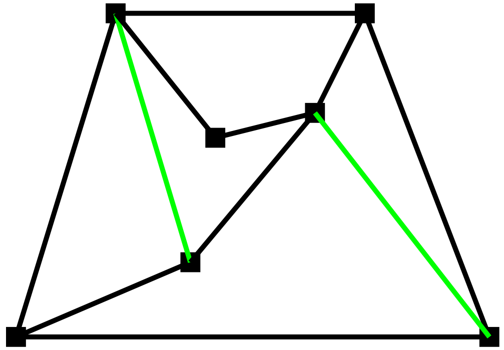
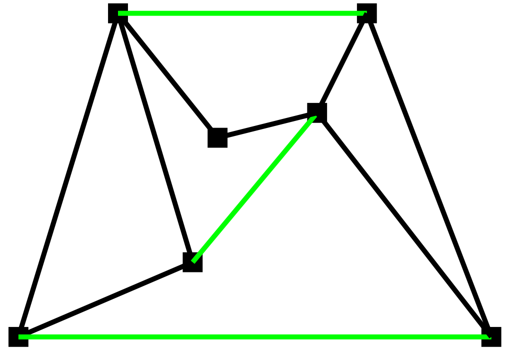
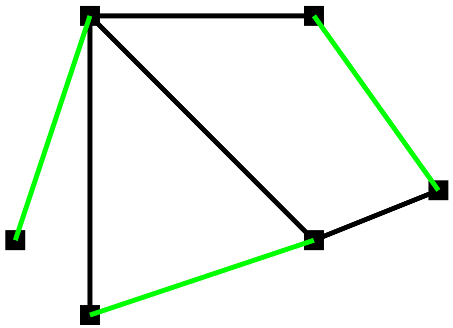
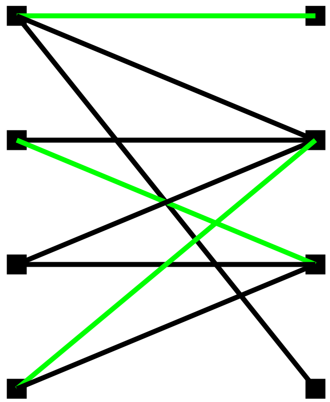
Paar $(X, P)$ on lihtgraaf. Tänases loengus vaatamegi ainult lihtgraafe.

Tihti on $(X, P)$ kahealuseline graaf. Näiteks kuuluvad $X$-i auditooriumid ja mingil konkreetsel kellaajal toimuvad loengud. $P$ näitab, millise loengu kuulajaskond millisesse auditooriumisse ära mahub.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. *Kooskõla* graafis $G$ on selline servade hulk $M \subseteq E$, et iga $v \in V$ jaoks $\deg_M(v) \leq 1$.

Kooskõla on *maksimaalne*, kui tema võimsus on suurim võimalik.

Kooskõla $M$ on *täielik*, kui $\deg_M(v) = 1$ iga $v \in V$ jaoks.

Terminoloogiline märkus:

Ülo Kaasiku tungival soovitusel on 2002. aastaga võrreldes termineid muudetud:

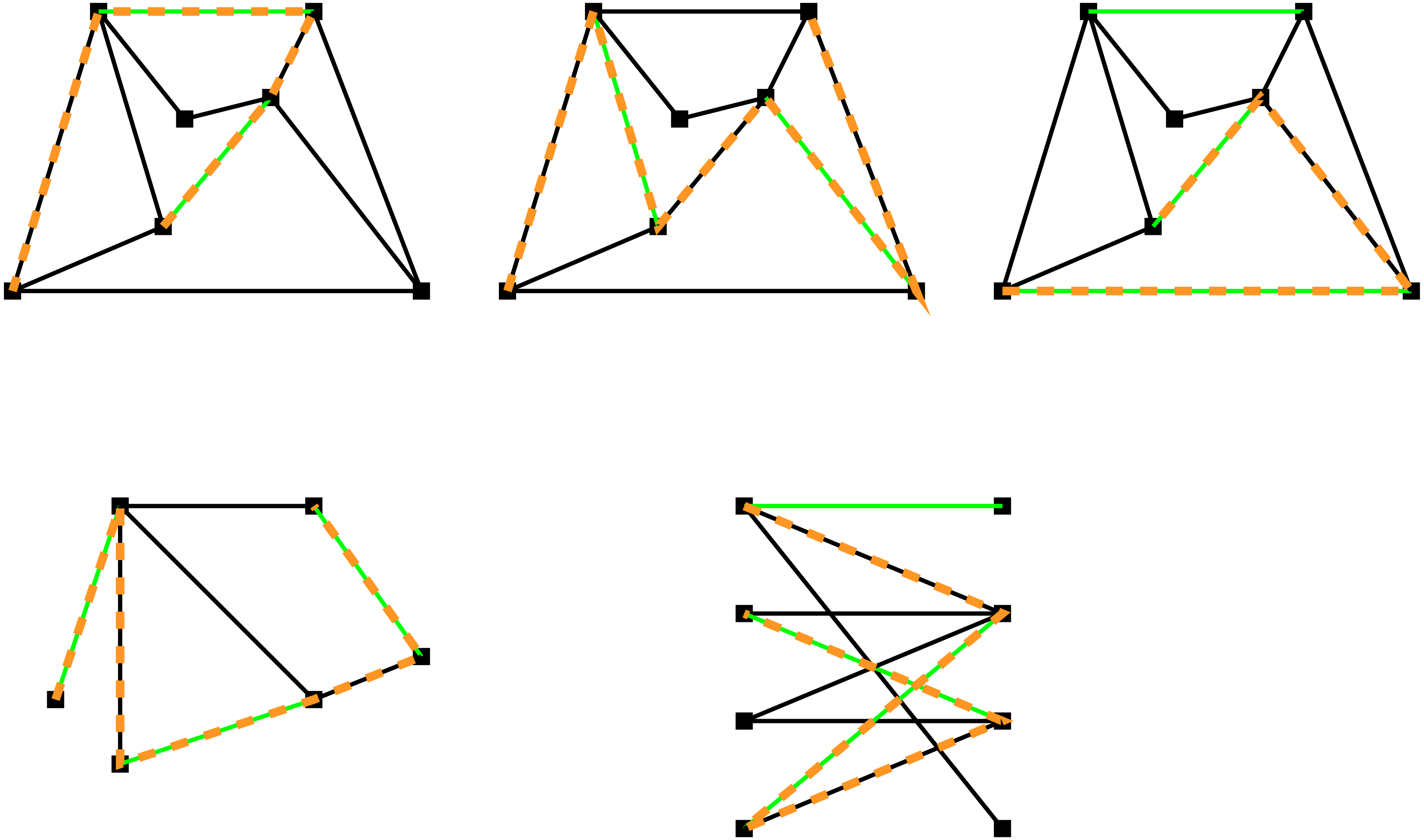
| 2002. a. loengutes | 2003. ja 2004. a. loengutes ja konspektis |
|---|---|
| vastavus | kooskõla |
| kooskõla | täielik kooskõla |

Põhjus: sõnale „vastavus“ ei ole ilus täiendavaid tähendusi anda.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu $M \subseteq E$ mingi kooskõla ja olgu $P$ mingi lahtine lihtahel graafis $G$.

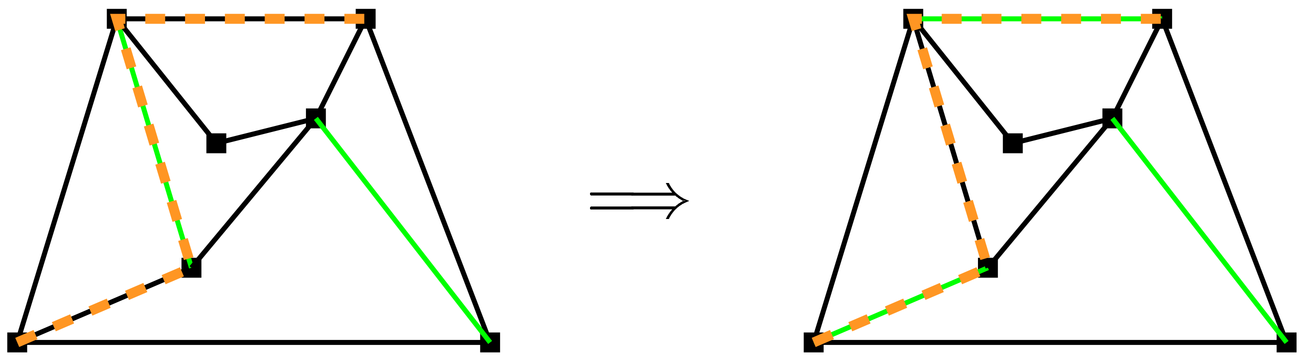
Ahel $P$ on *$M$-vahelduv*, kui temas olevad servad kuuluvad vaheldumisi hulka $M$ ja hulka $E \backslash M$.

Ahel $P$ otstippudega $x$ ja $y$ on *$M$-laienev*, kui ta on $M$-vahelduv ning $\deg_M(x) = \deg_M(y) = 0$.



**Teoreem (Berge).** Kooskõla $M$ graafis $G = (V, E)$ on maksimaalne parajasti siis, kui $G$-s ei leidu $M$-laienevat ahelat.

Tõestus $\Rightarrow$. Oletame vastuväiteliselt, et graafis $G$ leidub mingi $M$-laienev ahel $P$.



Vaatame $P$-d kui servade hulka.

Olgu $M' = (M \backslash P) \cup (P \backslash M)$. Siis $|M'| = |M| + 1$.

Lihtne on kontrollida, et $M'$ on kooskõla. Olgu $v \in V$, kontrollime, et $\deg_{M'}(v) \leq 1$. On kolm võimalust.

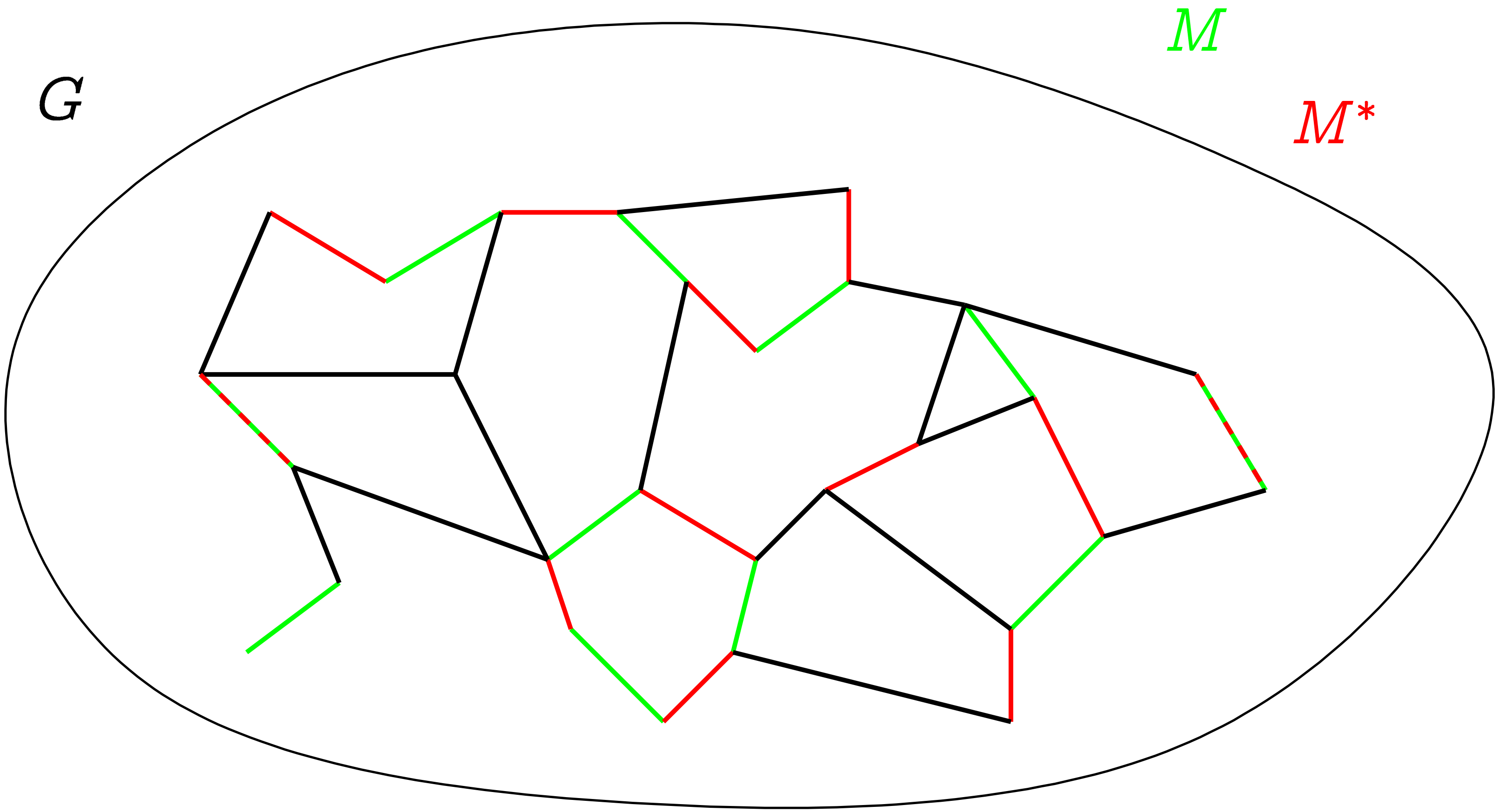
- $v$ ei asu ahelal $P$. Siis $\deg_M(v) = \deg_{M'}(v)$. Tõepoolest, olgu $e \in E$ tipuga $v$ intsidentne. Kuna $e \notin P$, siis $e \in M \Leftrightarrow e \in M'$.

- $v$ on ahela $P$ otstipp. Siis $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) + 1 = 1$.

- $v$ on ahela $P$ mõni sisemine tipp. Siis $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) = 1$.

Tõestus $\Leftarrow$. Meil tuleb konstrueerida mingi $M$-laienev ahel.

Olgu $M^*$ mingi maksimaalne kooskõla graafis $G$. Siis $|M| < |M^*|$. Vaatame graafi $H = (V, M \cup M^*)$.



Iga $v \in V$ jaoks on $\deg_H(v) \leq 2$. Graafi $H$ võimalikud sidususkomponendid on:

- Isoleeritud tipud.
- Ahelad.
  - Kinnised ehk tsüklid.
    - $M$ ja $M^*$ elemendid vaheldumisi.
  - Lahtised. Võimalused:
    - Üksainus serv $e \in M \cap M^*$.
    - $M$ ja $M^*$ elemendid vaheldumisi. Võimalused:
      - Ühes otsas $M$-i, teises $M^*$-i element.
      - Mõlemas otsas $M$-i element.
      - Mõlemas otsas $M^*$-i element.

Kuna $|M| < |M^*|$, siis peab leiduma $H$-i sidususkomponent, kus on $M^*$-i kuuluvaid servi rohkem, kui $M$-i kuuluvaid servi.

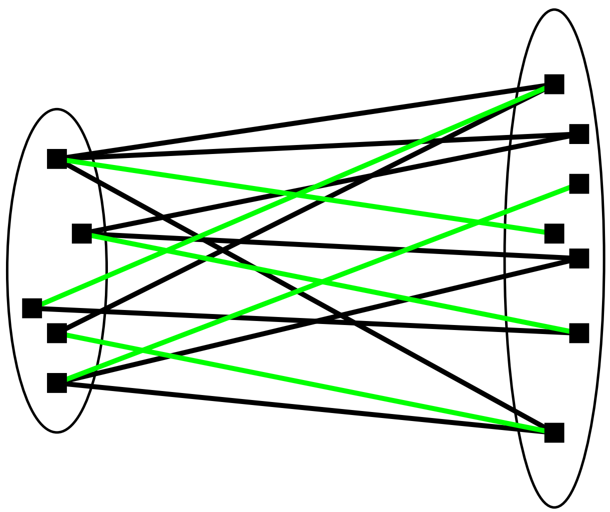
Ainsad sellised komponendid on lahtised ahelad, mis algavad ja lõppevad $M^*$-i elemendiga.

Need ahelad on $M$-laienevad. $\square$

Olgu $G = (V, E)$ graaf ja olgu $S \subseteq V$. Tipuhulga $S$ *naabrus* on hulk

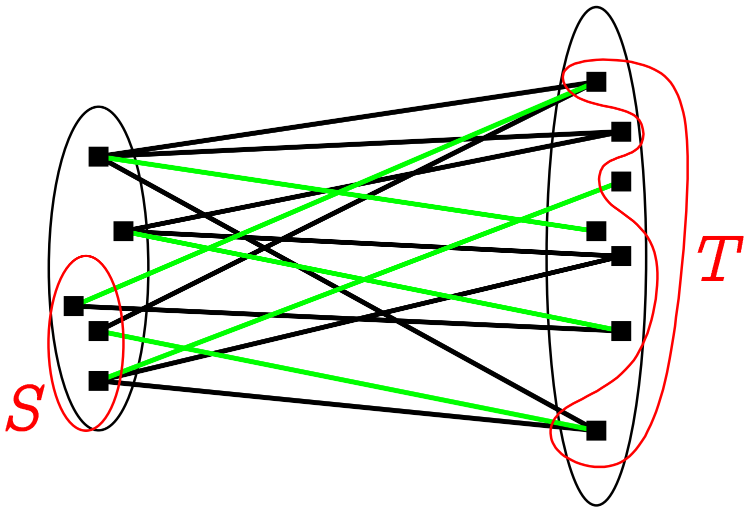
$$N(S) = \{w \mid w \in V, \exists e \in E, \exists v \in S : \mathcal{E}(e) = \{v, w\}\} \ .$$

**Teoreem (Hall).** Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline lihtgraaf alustega $X$ ja $Y$. Graafis $G$ leidub kooskõla $M$ omadusega $\forall x \in X : \deg_M(x) = 1$ parajasti siis, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|N(S)| \geq |S|$.



Tõestus $\Rightarrow$. Olgu $M$ mingi kooskõla etteantud omadusega. Olgu $S \subseteq X$. Vaatame hulka

$$T = \{y \mid y \in Y, \exists x \in S : (x, y) \in M\} \ .$$

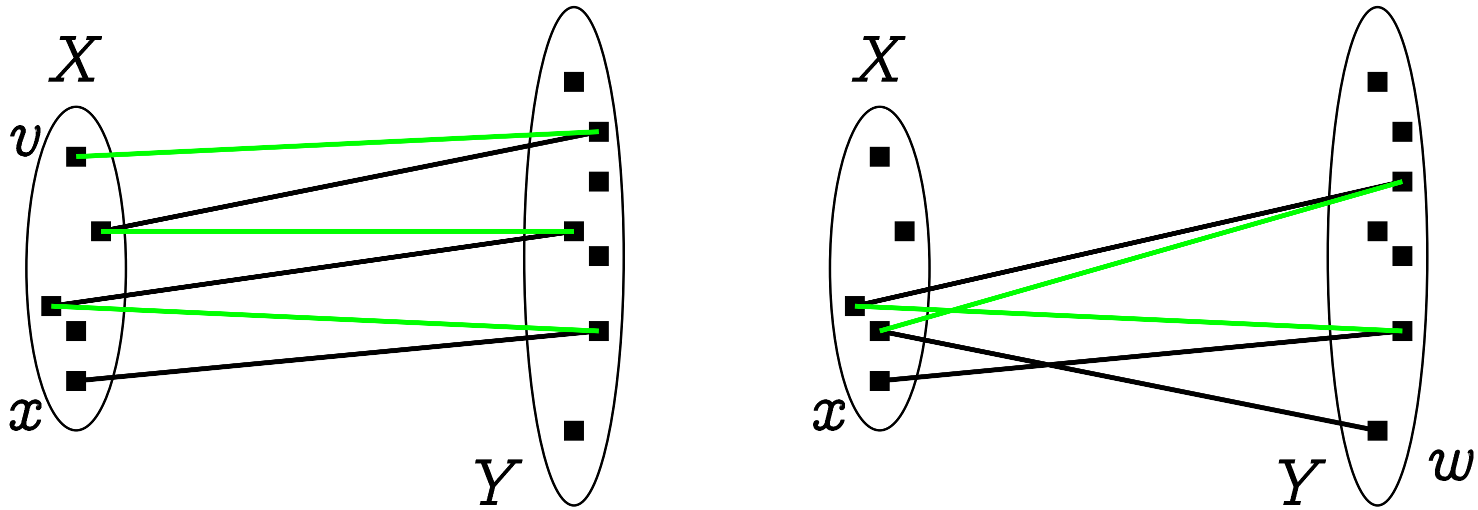



Siis $|T| = |S|$, sest iga $x \in S$ defineerib erineva $y$-i. Samas $T \subseteq N(S)$. Kokkuvõttes $|S| = |T| \leq |N(S)|$.

Tõestus $\Leftarrow$. Olgu $M$ mingi maksimaalne kooskõla. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $x \in X$, nii et $\deg_M(x) = 0$.

Olgu $S \subseteq X$ kõigi selliste tippude $v \in X$ hulk, nii et leidub $M$-vahelduv tee $x$-st $v$-sse. Paneme tähele, et $x \in S$.

Olgu $T \subseteq Y$ kõigi selliste tippude $w \in Y$ hulk, nii et leidub $M$-vahelduv tee $x$-st $w$-sse.



Me näitame, et

I. $N(S) = T$;

II. $|S \setminus \{x\}| = |T|$.

Kokkuvõttes viib see meid vastuoluni eeldustega:

$$|N(S)| = |T| = |S \setminus \{x\}| = |S| - 1 < |S| \ .$$

*I osa*. Olgu $v \in S$. Olgu $P$ $M$-vahelduv tee $x$-st $v$-sse. Paneme tähele, et viimane serv ahelas $P$ kuulub $M$-i.

Olgu $w \in Y$ mõni tipu $v$ naabertipp. On kaks võimalust:

1. $w$ asub ahelal $P$. Siis on ahela $P$ osa $x$-st $w$-ni $M$-vahelduv tee $x$-st $w$-sse. Seega $w \in T$.

2. $w$ ei asu ahelal $P$. Jälle on kaks võimalust:

   - $(v, w) \in M$. Siis on $(v, w)$ viimane serv ahelas $P$, sest ei leidu ühtki teist serva hulgas $M$, mis oleks $v$-ga intsidentne. Seega realiseerub antud juhul esimene variant.

   - $(v, w) \notin M$. Siis on $P$ koos täiendava servaga $(v, w)$ $M$-vahelduv tee $x$-st $w$-sse. Seega $w \in T$.

*II osa.* Me konstrueerime bijektsiooni $S\backslash\{x\}$ ja $T$ vahel.

Olgu $v \in S\backslash\{x\}$. Siis leidub $e \in M$, mis on intsidentne $v$-ga (viimane serv $M$-vahelduvas tees $x$-st $v$-sse). Tipule $v$ seame vastavusse $e$ teise otspunkti $w$. Eelmisel slaidil näitasime, et $w \in T$.

Olgu $w \in T$. Kui ei leiduks serva $e \in M$, mis on $w$-ga intsidentne, siis oleks $M$-vahelduv tee $x$-st $w$-sse $M$-laienev. Berge'i teoreem $M$-laienevate teede leidumist ei luba. Seega selline serv $e$ leidub.

$w$-le seame vastavusse $e$ teise otspunkti $v$. On ilmne, et $v \in S$. Samuti $v \neq x$, sest $e$ teine otspunkt ei ole $x$, kuna $\deg_M(x) = 0$. □

**Järeldus.** Regulaarses (s.t. kõigi tippude aste on sama) kahealuselises graafis, mis pole nullgraaf, leidub täielik kooskõla.

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf alustega $X$ ja $Y$. Olgu $k > 0$ kõigi tippude aste. Kuna

$$|X| \cdot k = \sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y) = |Y| \cdot k,$$

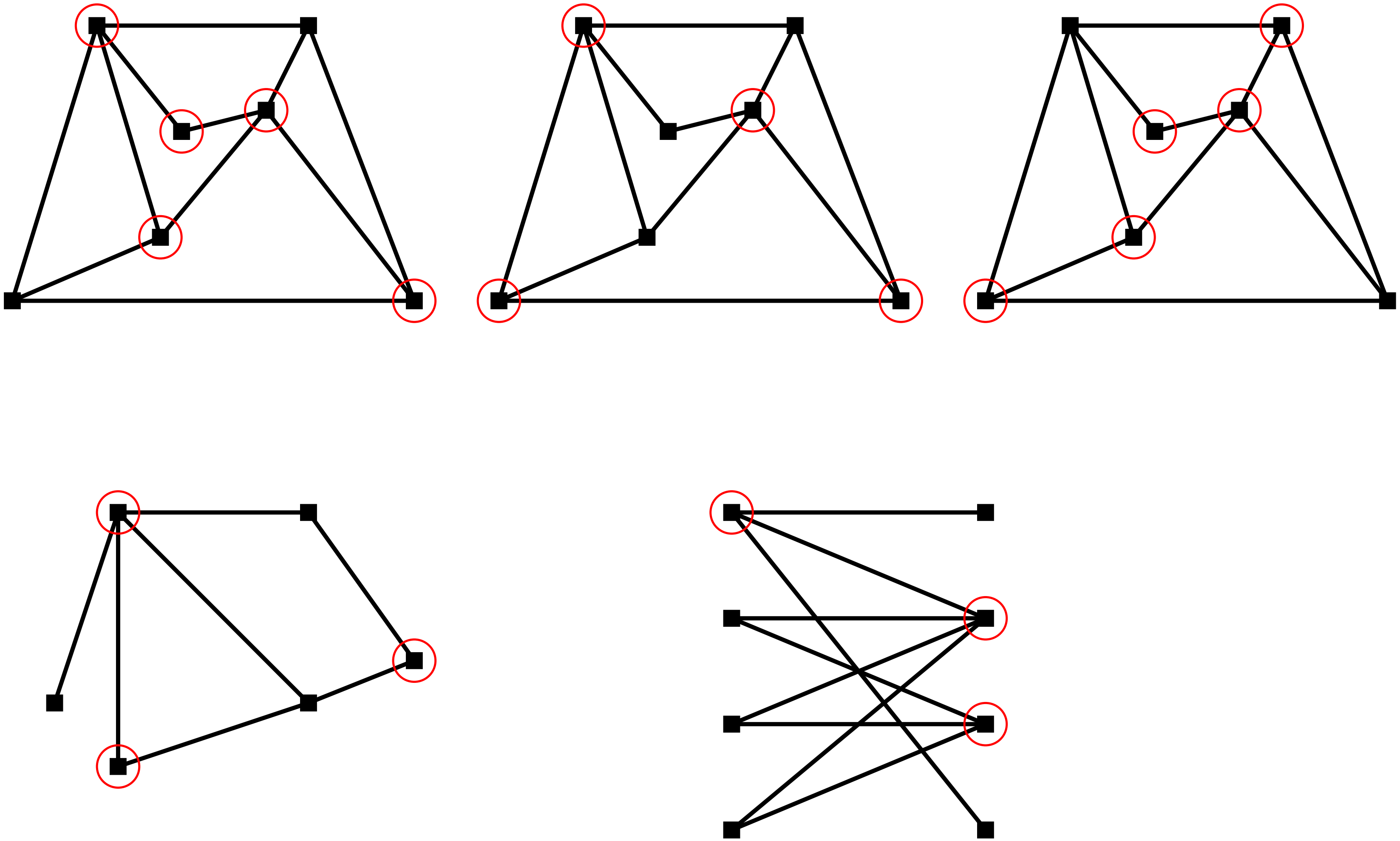
siis $|X| = |Y|$. Olgu $S \subseteq X$. Kuna

$$|S| \cdot k = \sum_{x \in S} \deg(x) \leq \sum_{y \in N(S)} \deg(y) = |N(S)| \cdot k,$$

siis $|S| \leq |N(S)|$. Seega leidub kooskõla $M$, nii et $\deg_M(x) = 1$ iga $x \in X$ jaoks. Kuna $|X| = |Y|$, siis ka $\deg_M(y) = 1$ iga $y \in Y$ jaoks. $\square$

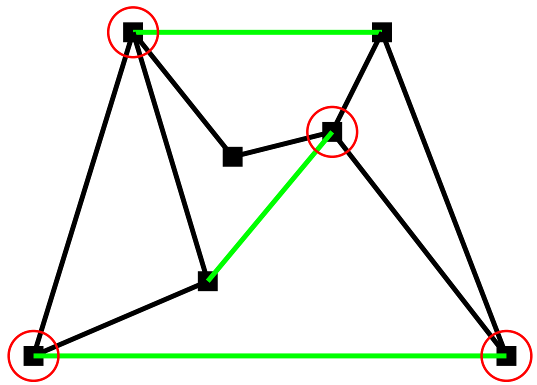
Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. Graafi $G$ *kate* on selline tippude hulk $K \subseteq V$, et iga serv $e \in E$ on mõne $K$-sse kuuluva tipuga intsidentne.

Kate on *minimaalne*, kui tema võimsus on vähim võimalik.



**Lemma.** Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, olgu $M$ mingi tema kooskõla ja $K$ mingi tema kate. Siis $|M| \leq |K|$.

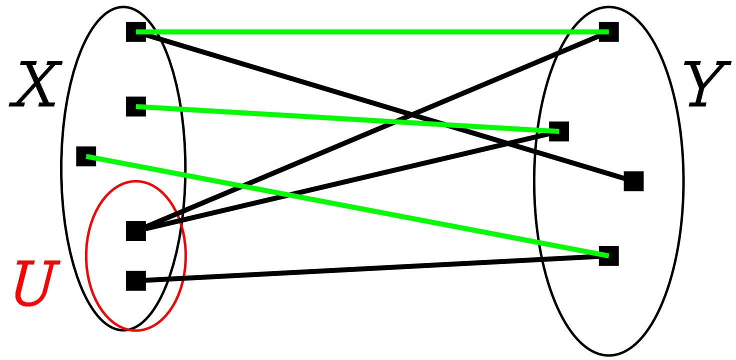
Tõestus. Iga serva $e \in M$ jaoks leidub mingi tipp $v \in K$, nii et $e$ on intsidentne $K$-ga. Erinevate servade jaoks on need tipud erinevad, kuna erinevatel $M$-i kuuluvatel servadel pole ühiseid otstippe. $\square$



**Teoreem (König).** Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf. Siis on tema maksimaalsete kooskõlade ja minimaalsete katete võimsused võrdsed.

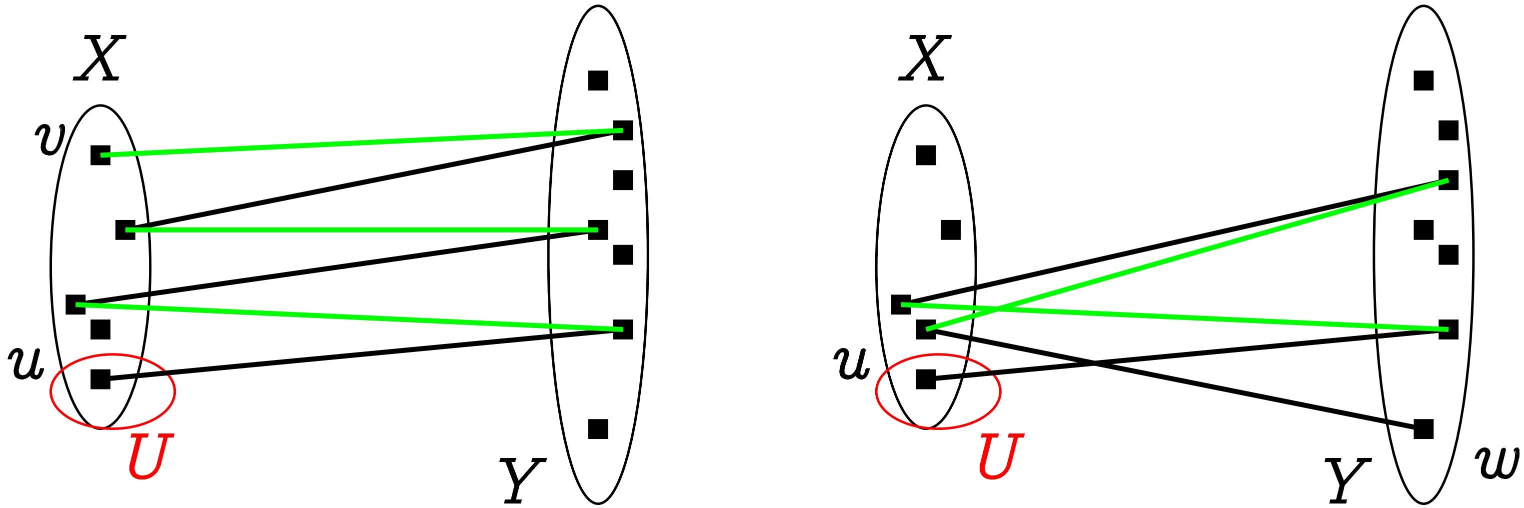
Tõestus. Olgu $X$ ja $Y$ graafi $G$ alused, olgu $M$ tema mingi maksimaalne kooskõla. Konstrueerime katte $K$, nii et $|M| = |K|$.

Olgu $U \subseteq X$ kõigi selliste tippude $u \in X$ hulk, et $\deg_M(u) = 0$. Siis $|M| = |X \backslash U|$.



Olgu $S \subseteq X$ kõigi selliste tippude $v \in X$ hulk, nii et mingi $u \in U$ jaoks leidub $M$-vahelduv tee $u$-st $v$-sse. Siis $U \subseteq S$.

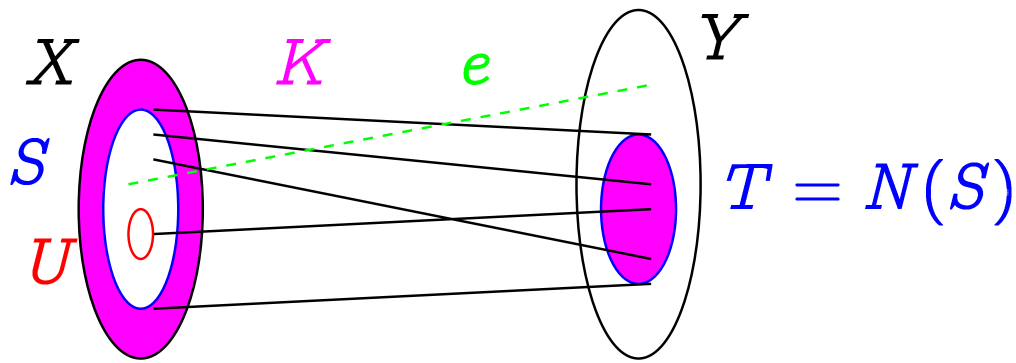
Olgu $T \subseteq Y$ kõigi selliste tippude $w \in Y$ hulk, nii et mingi $u \in U$ jaoks leidub $M$-vahelduv tee $u$-st $w$-sse.




Analoogiliselt Halli teoreemi tõestusega $N(S) = T$ ja $|T| = |S \backslash U|$.

Olgu $K = T \cup (X \backslash S)$. Siis $K$ on kate.

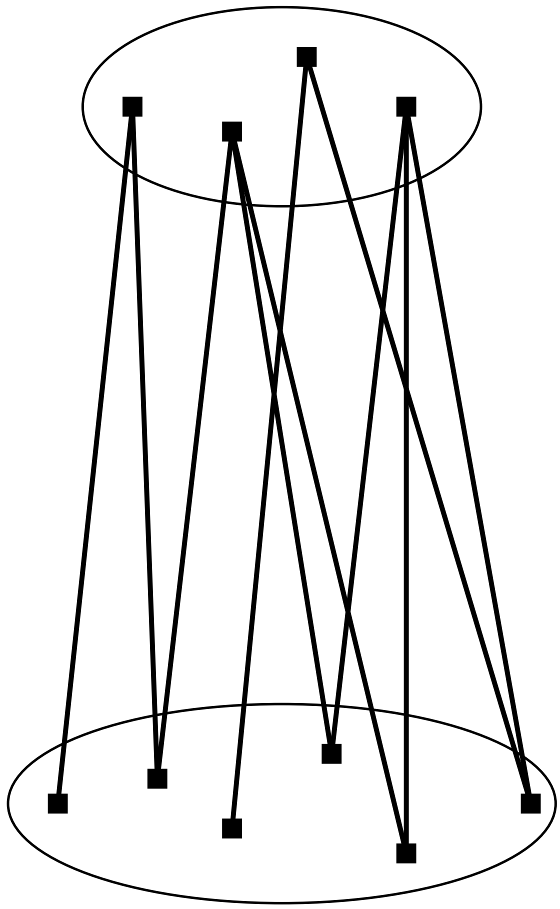
Tõepoolest, oletame et leidub $e \in E$, nii et $e$ pole intsidentne ühegi $K$-sse kuuluva tipuga. Siis on $e$ üks otstipp $S$-s ja teine $Y \backslash T$-s. Vastuolu väitega $N(S) = T$.



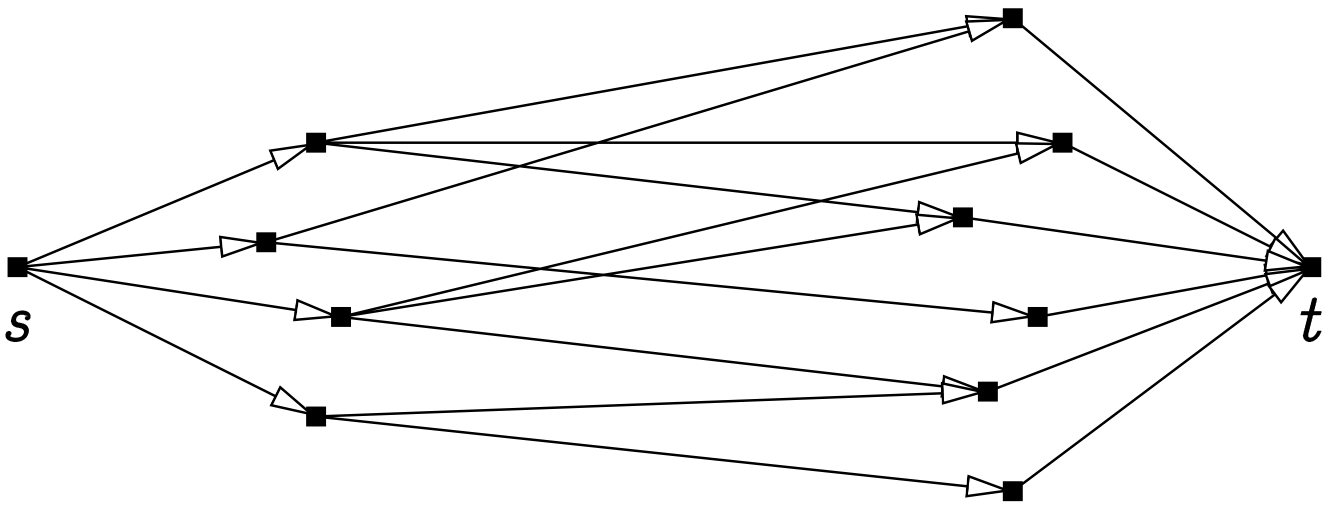

$$|K| = |T| + |X \backslash S| = |S \backslash U| + |X \backslash S| = |X \backslash U| = |M| \ .$$

$\square$

Kuidas leida kahealuselises graafis maksimaalset kooskõla?



leiame maksimaalse voo




kõigi kaarte läbilaskevõime on 1

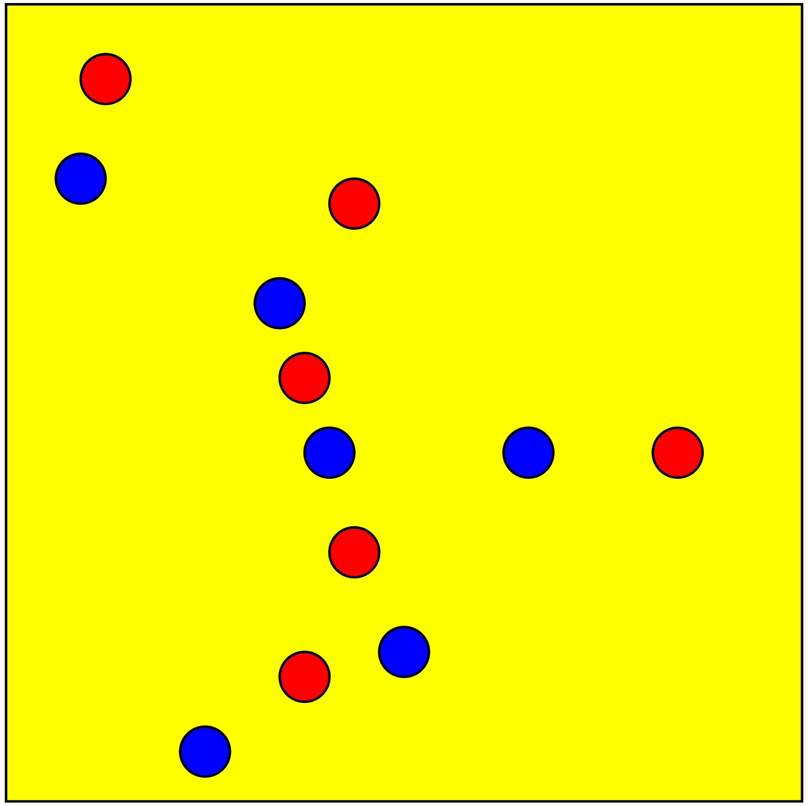
Ford-Fulkersoni algoritmiga leiame maksimaalse voo, mis igale kaarele seab vastavusse täisarvu.

Maksimaalseks kooskõlaks esialgses graafis on need servad kahe aluse vahel, millele seati vastavusse 1.

Mõnedes ülesannetes on servadele omistatud hinnad ja tuleb leida minimaalse (või maksimaalse) hinnaga maksimaalne kooskõla.

See ülesanne taandub minimaalse hinnaga maksimaalse voo leidmisele.

Näide: olgu meil pildistatud mingeid objekte kahel erineval ajahetkel (väikese vahega).
Millised kaks kujutist vastavad samale objektile?



Minimaalse katte leidmine kahealuselises graafis:

Königi teoreemi tõestus on konstruktiivne. Selle kasutamiseks tuleb meil kõigepealt leida mõni maksimaalne kooskõla.

Nädala pärast toimub loengu ajal kontrolltöö.

Töö katab materjali loengute algusest kuni Prüferi koodideni.

Töös olevad ülesanded on olemuselt sarnased praktikumiülesannetega.

Töö eest saab kuni 45 punkti. Samas on ülesannete lehel ülesandeid rohkem kui 45 punkti eest.

Materjale võib kasutada. Soovitav on omada konspekti ja loengute slaide.

Järeltöö toimub 10. novembril, loengu ajal.

(Teine kontrolltöö toimub kõige viimase loengu ajal. Teisel kontrolltööl järeltööd ei ole.)