Täielikud kooskõlad
(üks tarvilik ja piisav tingimus nende leidumiseks)

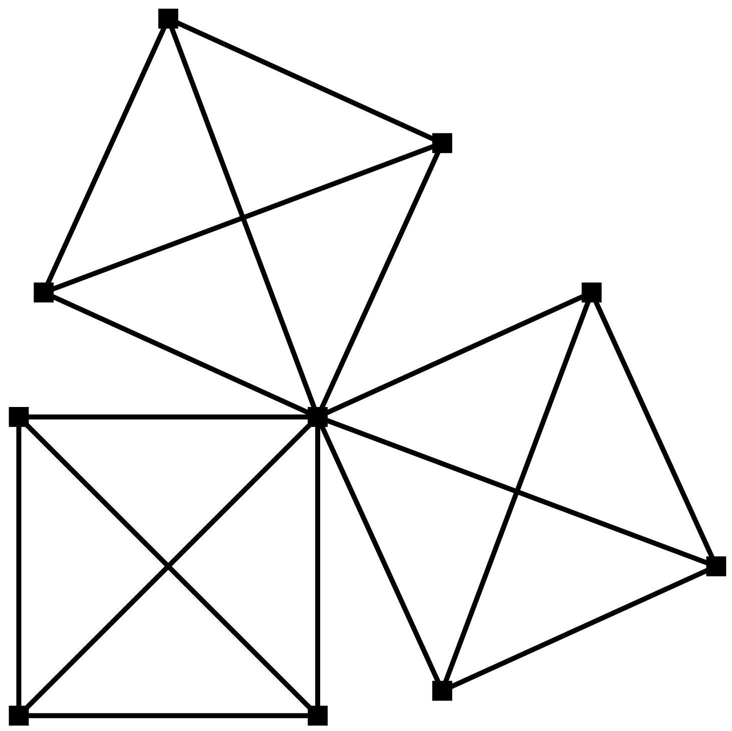
Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf. *Kooskõla* graafis G on selline servade hulk $M \subseteq E$, et iga $v \in V$ jaoks $\deg_M(v) \leq 1$.

Kooskõla M on *täielik*, kui $\deg_M(v) = 1$ iga $v \in V$ jaoks.

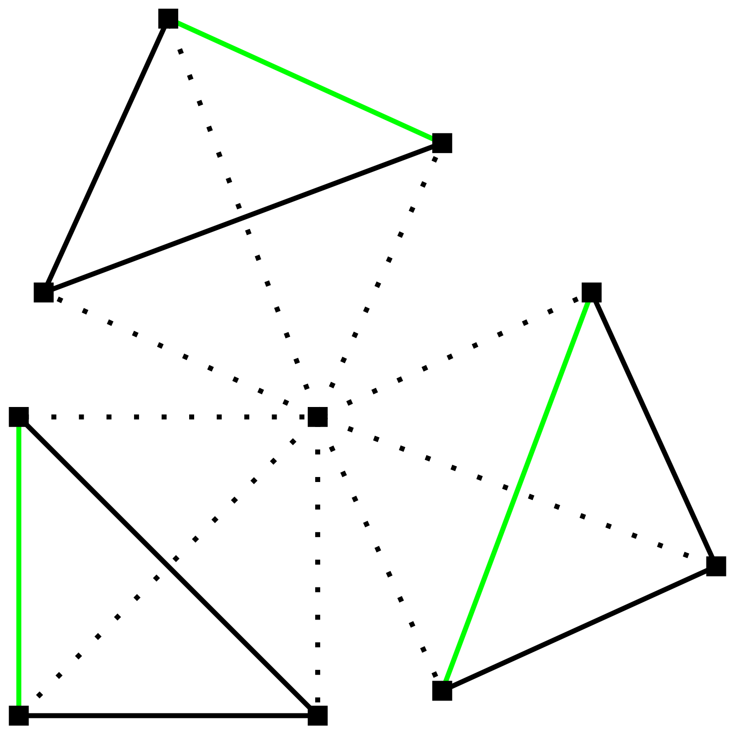
Tänases loengus anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse täieliku kooskõla leidumiseks graafis.

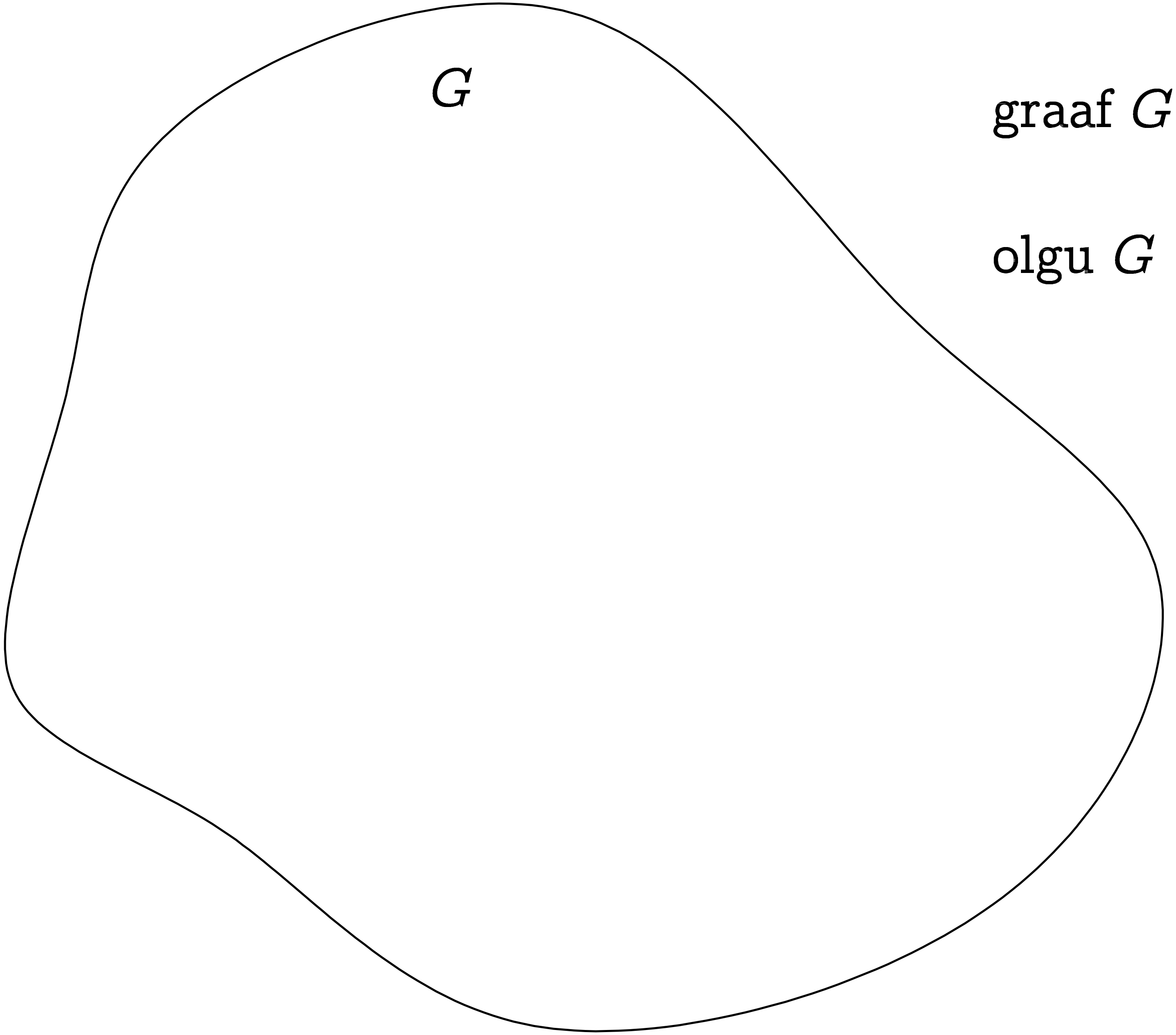
Ilmne on, et graafis on täielik kooskõla parajasti siis, kui tema igas sidususkomponendis on täielik kooskõla. Seepärast vaatame selles loengus ainult sidusaid graafe.

Hästi lihtne tarvilik tingimus — graafis peab olema paarisarv tippe.



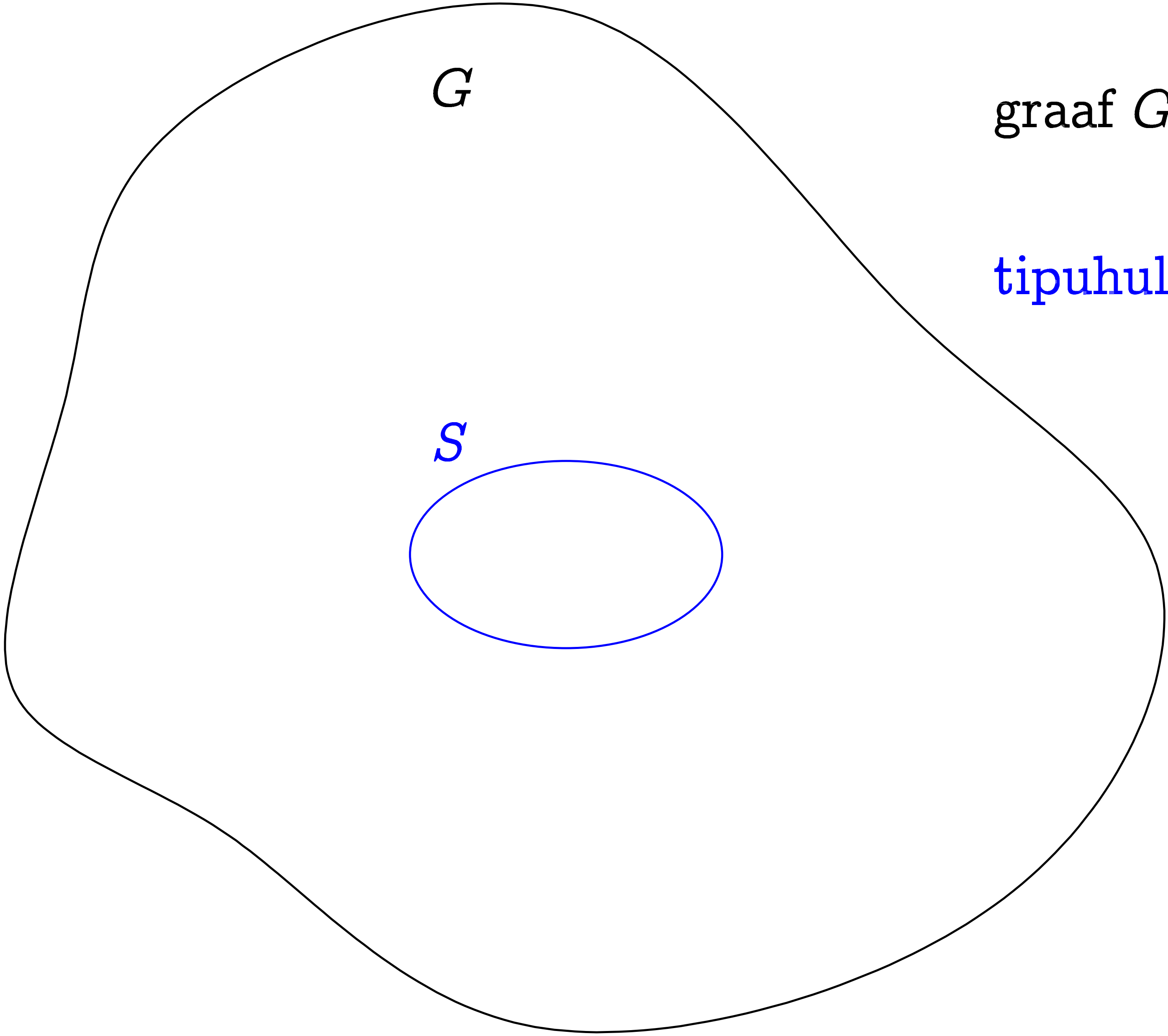
Selles graafis ei ole täielikku kooskõla





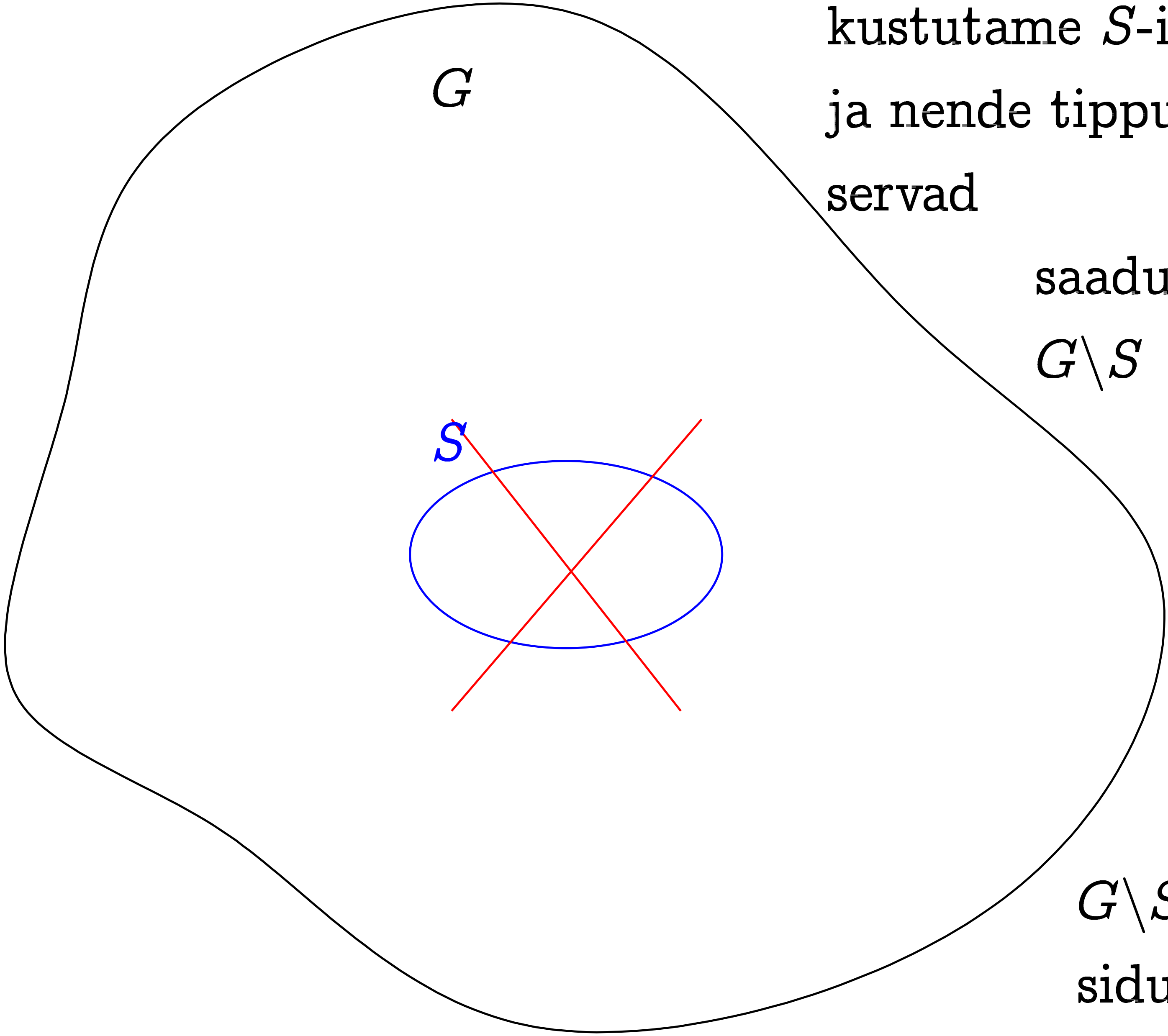
graaf $G = (V, E)$

olgu G sidus



graaf $G = (V, E)$

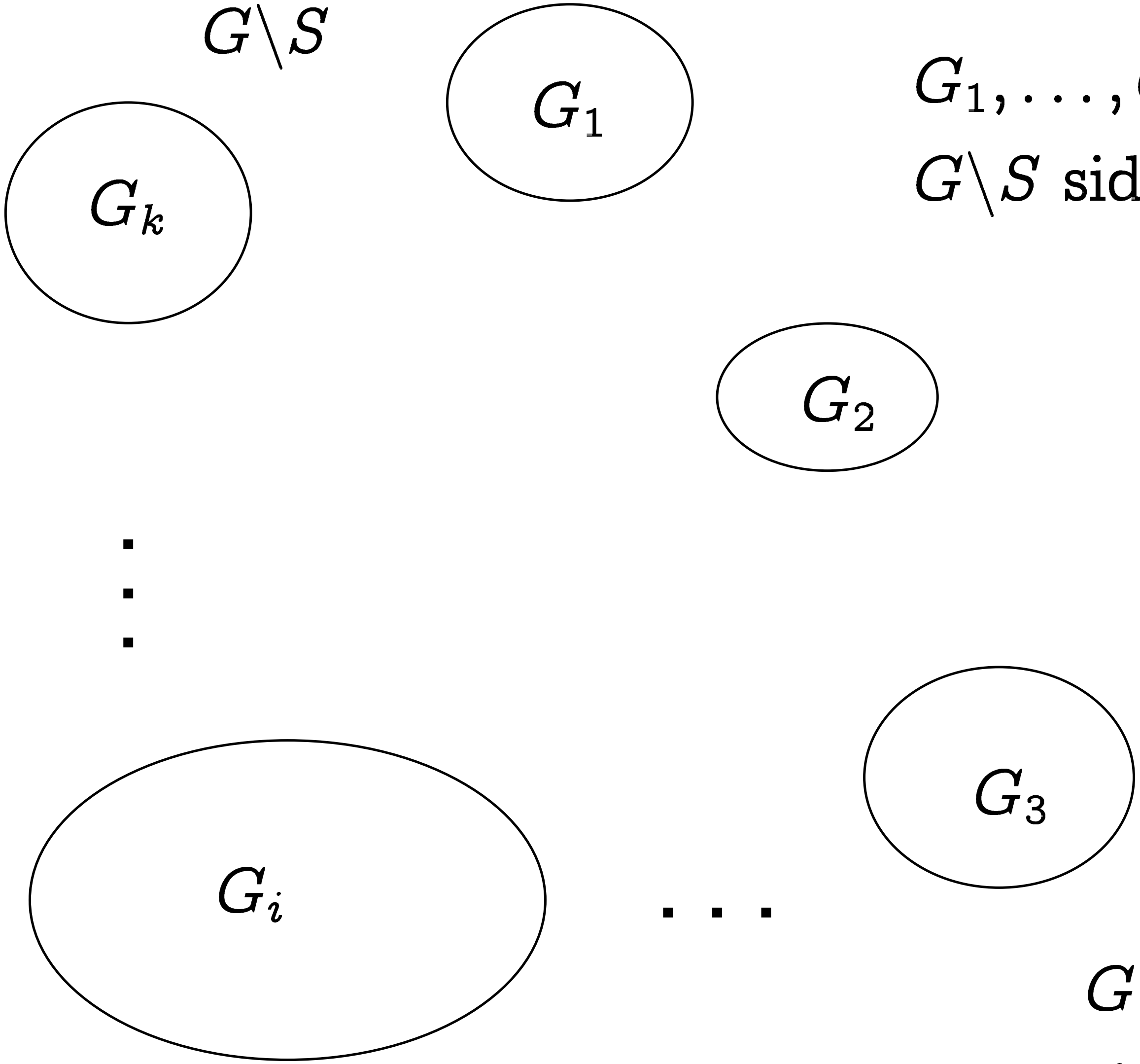
tipuhulk $S \subseteq V$



kustutame S-i kuuluvad tipud ja nende tippudega intsidentsed servad

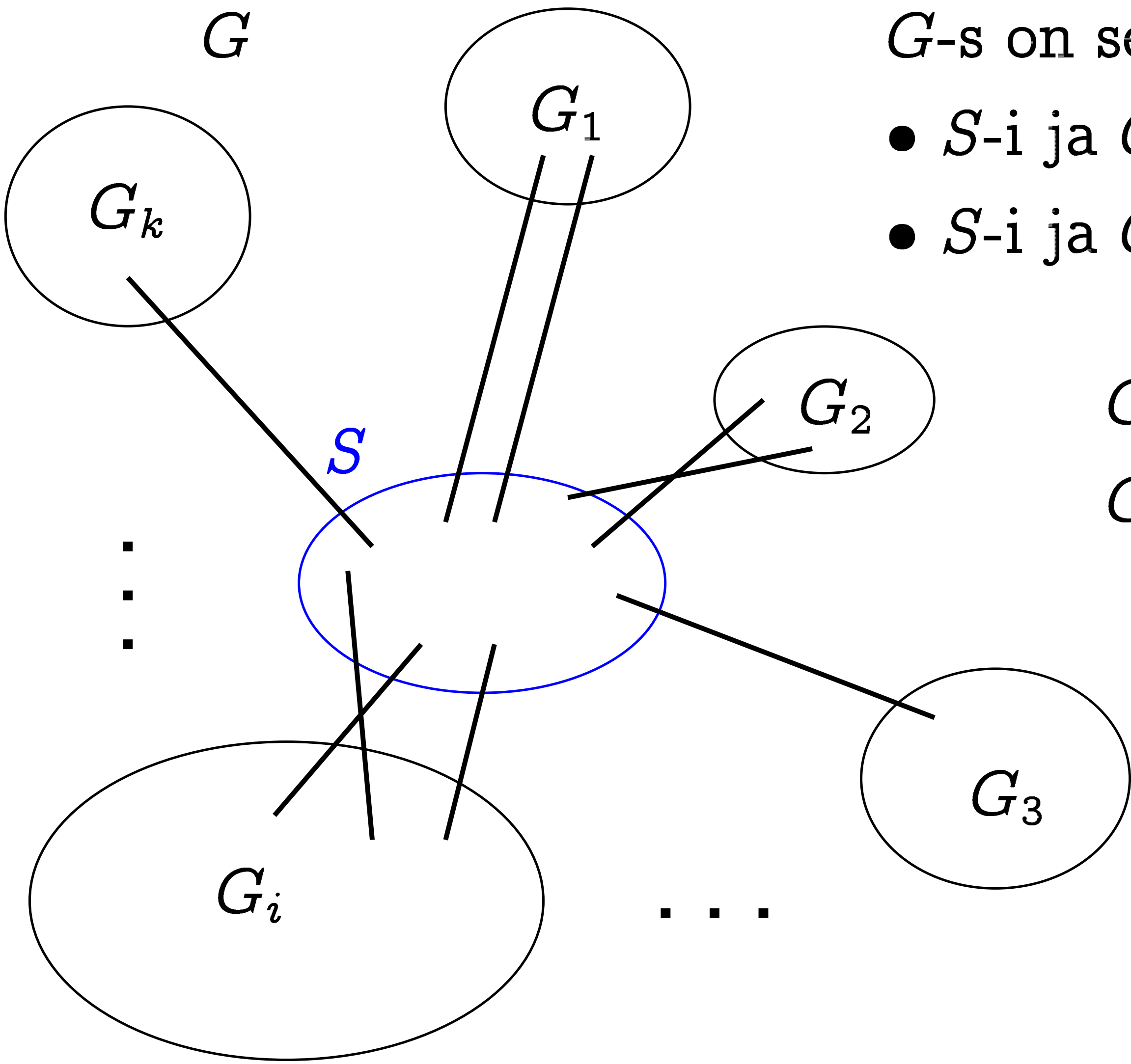
saadud graafi tähistame $G \backslash S$

$G \backslash S$ ei pruugi sidus olla



$G_1, \ldots, G_k$:
$G \backslash S$ sidususkomponendid

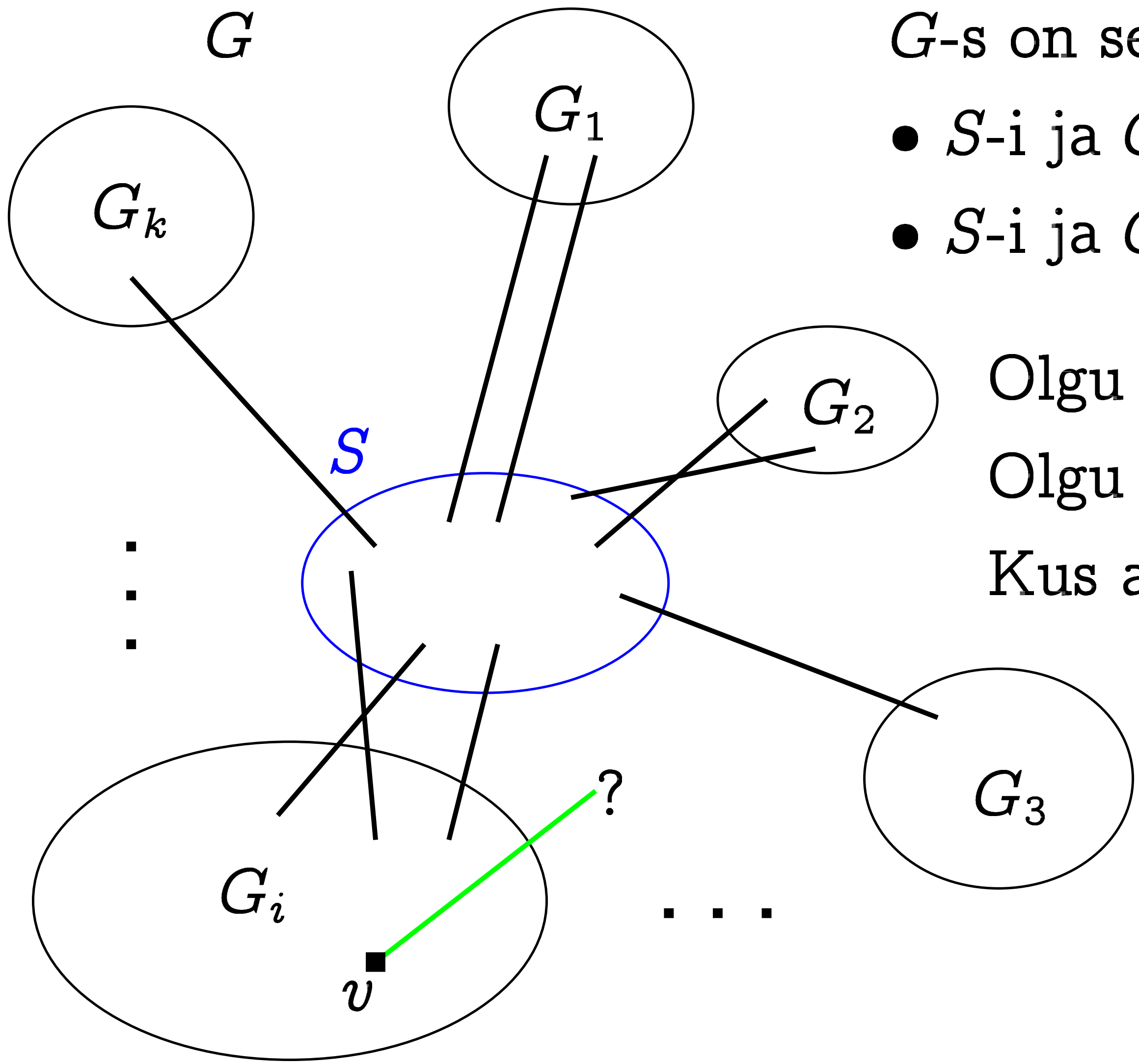
$G \backslash S$ ei pruugi sidus olla



G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

G-s pole servi G_i-de vahel



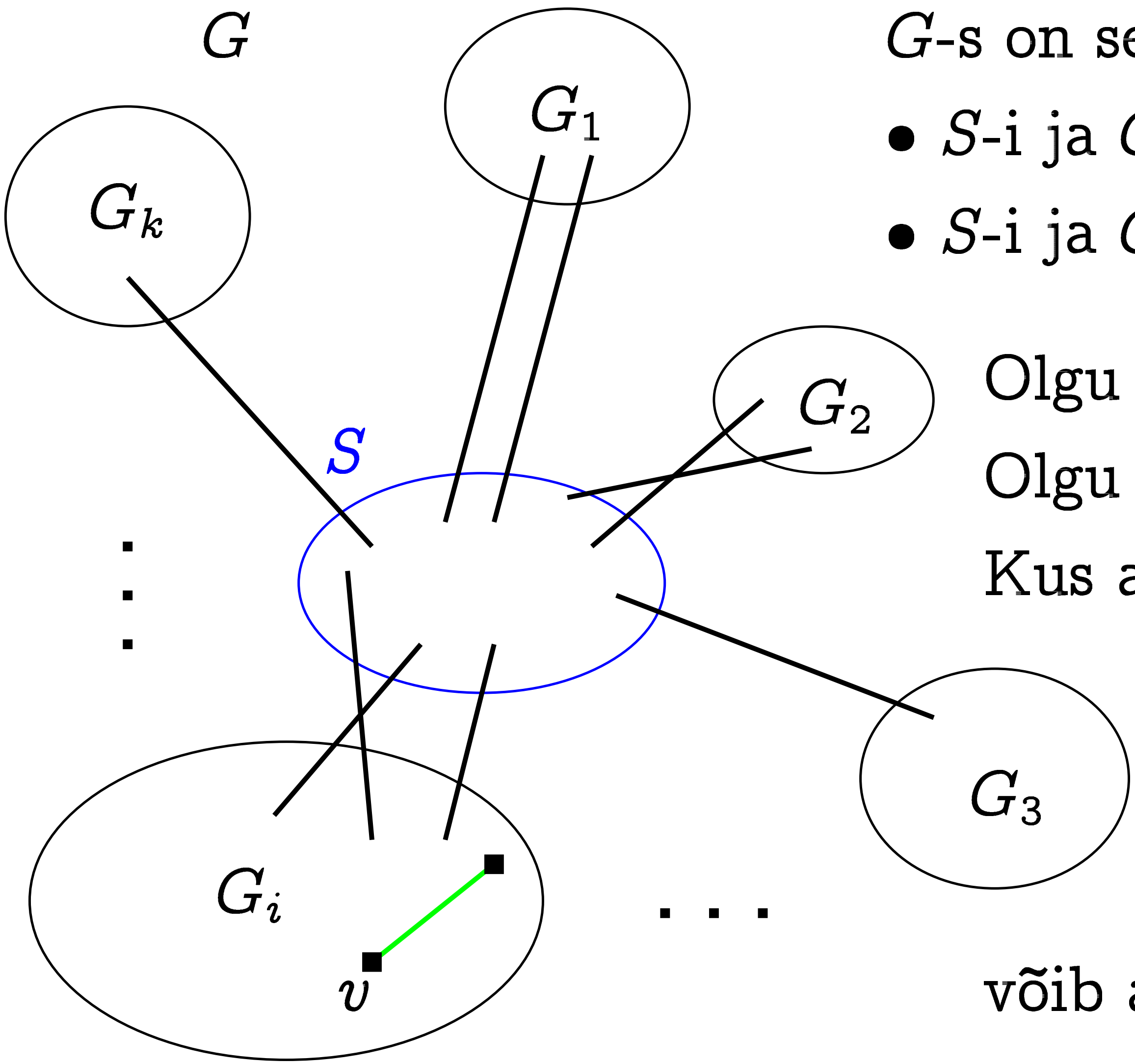
G-s on servad:

- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?



G-s on servad:

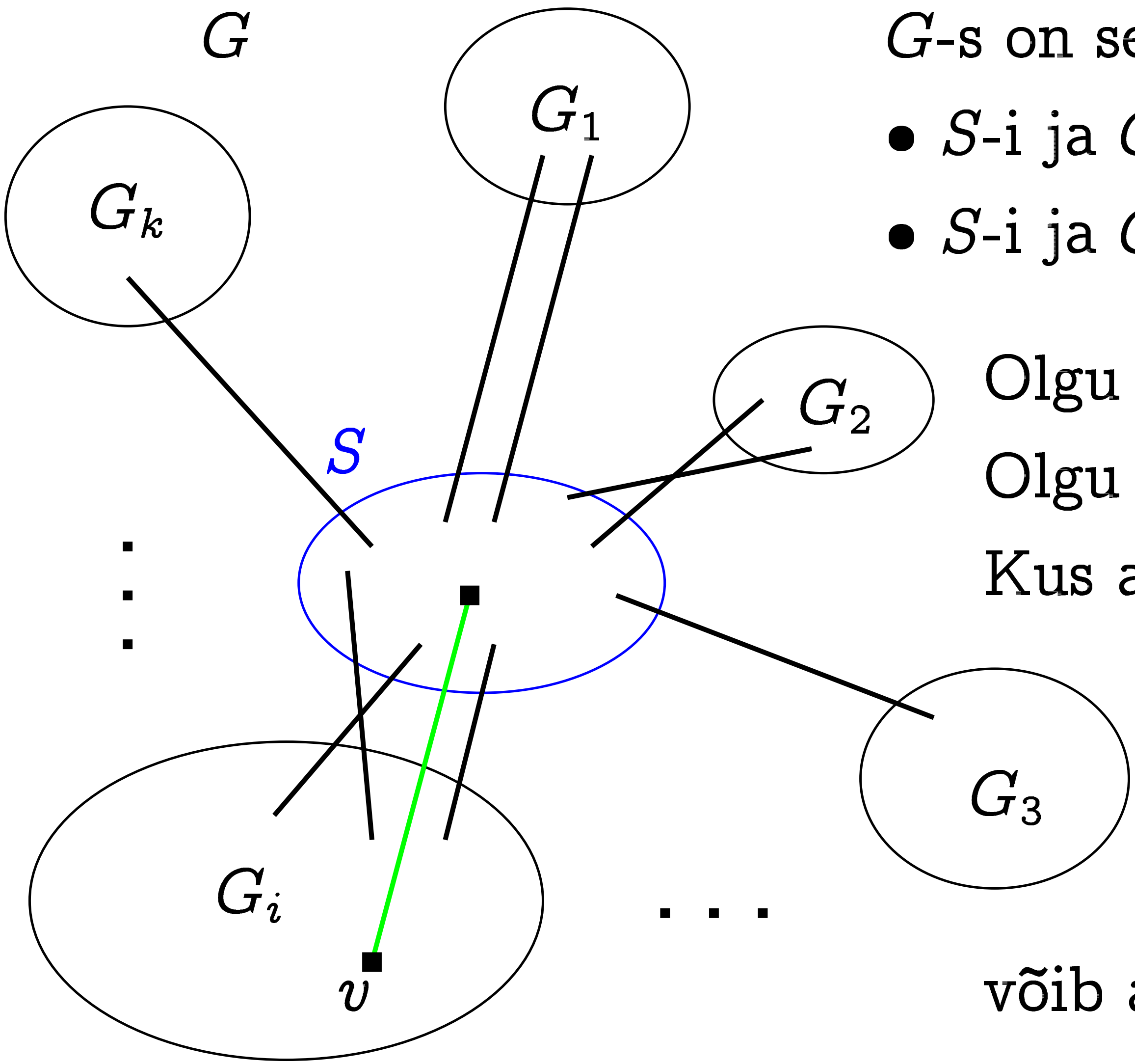
- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda G_i-s



G-s on servad:

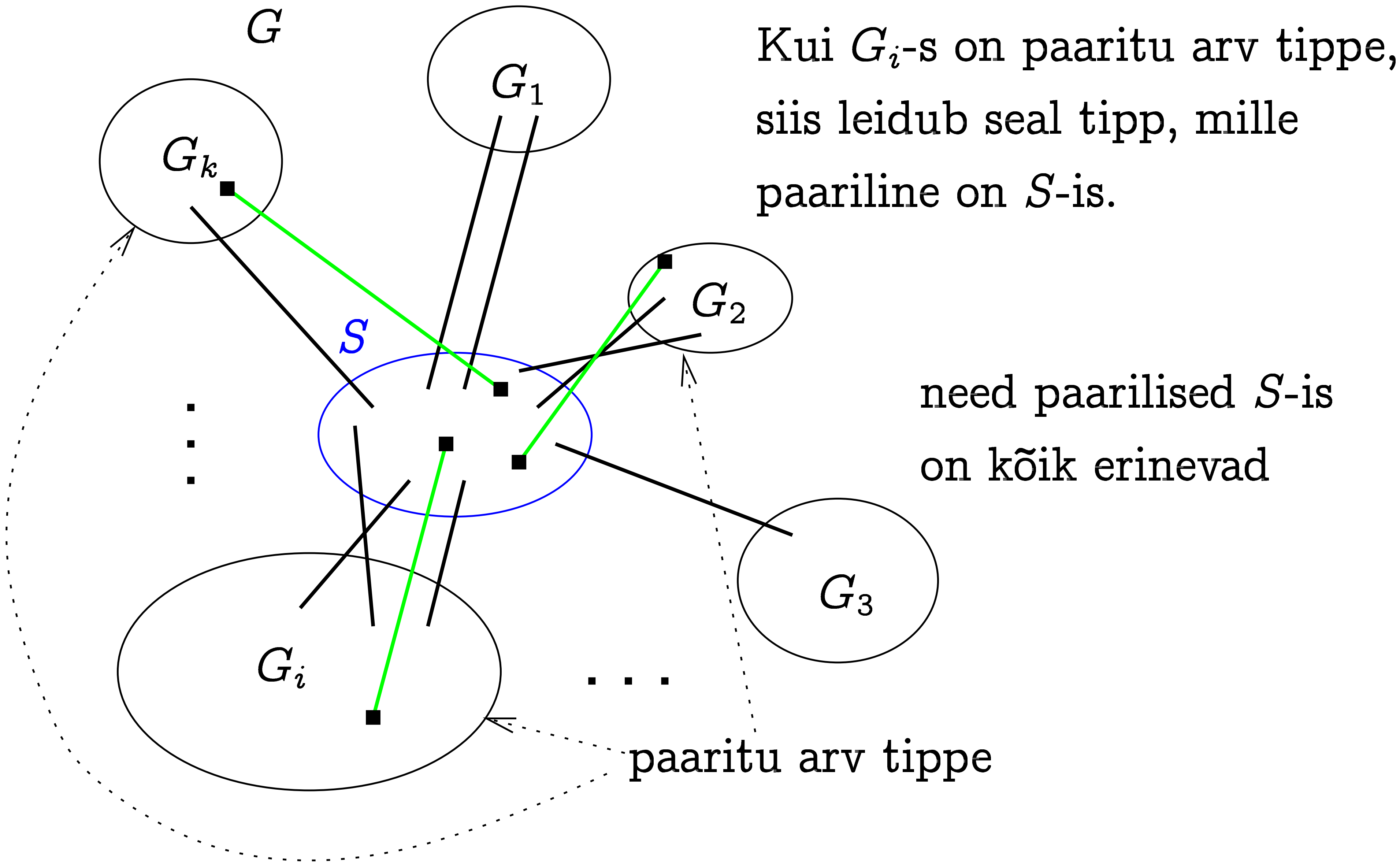
- S-i ja G_i-de sees
- S-i ja G_i-de vahel

Olgu M täielik kooskõla G-s

Olgu v tipp G_i-s

Kus asub tipp, millega v paaris on?

võib asuda S-is


G
G_1
G_k
G_2
S
G_3
G_i
Kui G_i-s on paaritu arv tippe, siis leidub seal tipp, mille paariline on S-is.
need paarilised S-is on kõik erinevad
paaritu arv tippe

Tähistagu $odd(G)$ sidususkomponentide arvu G-s, millel on paaritu arv tippe.

Näitasime, et kui graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla, siis $odd(G \setminus S) \leq |S|$. Seda iga $S \subseteq V$ jaoks.

Teoreem (Tutte). Graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G \setminus S) \leq |S|$.

Tõestus. Tarvilikkust juba näitasime. Näitame piisavust ka.

Vastuväiteliselt oletame, et leidub graaf G, kus iga $S \subseteq V$ jaoks $odd(G \backslash S) \leq |S|$, aga G-s ei leidu täielikku kooskõla.

Muuhulgas siis $odd(G) = odd(G \backslash \emptyset) \leq 0$, seega on G-s paarisarv tippe.

Lisame G-le mingil viisil servi senikaua, kuni jõuame mingi graafini G^*, kus ei ole täielikku kooskõla, aga millele ükskõik millise serva lisamisel saaksime graafi, kus on täielik kooskõla.

Kuna K_{2n}-s on täielik kooskõla, siis me jõuame sellise G^*-ni.

Näitame, et iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib ka $odd(G^* \backslash S) \leq |S|$.

Piisab, kui näitame $odd(G^* \backslash S) \leq odd(G \backslash S)$.

Graaf $G^* \backslash S$ on saadud graafile $G \backslash S$ mingeid servi lisades. Uurime, kuidas muutub $odd(\cdot)$ graafile servi lisades.

Kui lisame graafile mingi serva, siis võib ta ühendada 2 tippu

- samast sidususkomponendist. Sel juhul $odd(\cdot)$ ei muutu.
- kahest erinevast sidususkomponendist. Sel juhul saab neist kahest komponendist üks.

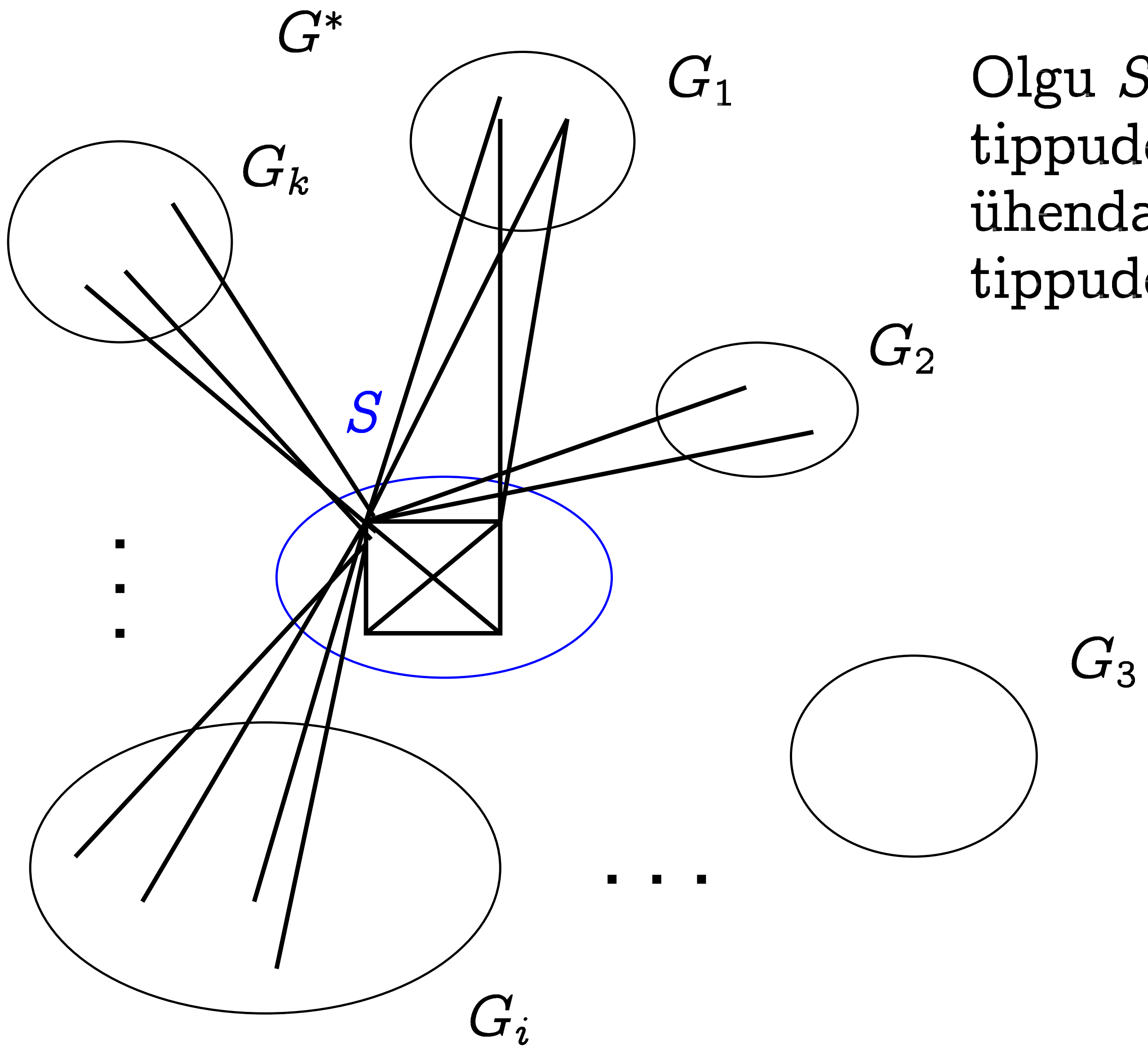
- Kui mõlemis komponendis oli paarisarv tippe, siis on uues komponendis ka paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.
- Kui ühes komponendis oli paaris- ja teises paaritu arv tippe, siis on uues komponendis ka paaritu arv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ ei muutu.
- Kui mõlemis komponendis oli paaritu arv tippe, siis on uues komponendis paarisarv tippe. Seega siis $odd(\cdot)$ väheneb 2 võrra.

Seega saab graafile servi lisades $odd(\cdot)$ ainult väheneda. Järelikult $odd(G^*\backslash S) \leq odd(G\backslash S) \leq |S|$.

Oleme näidanud, et teoreemi tõestamiseks piisab, kui tuletada vastuolu järgmisest väitest:

Leidub graaf $G^* = (V, E^*)$, kus

- ei leidu täielikku kooskõla;
- suvalise serva lisamisel tekib täielik kooskõla;
- iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $odd(G^* \backslash S) \leq |S|$.

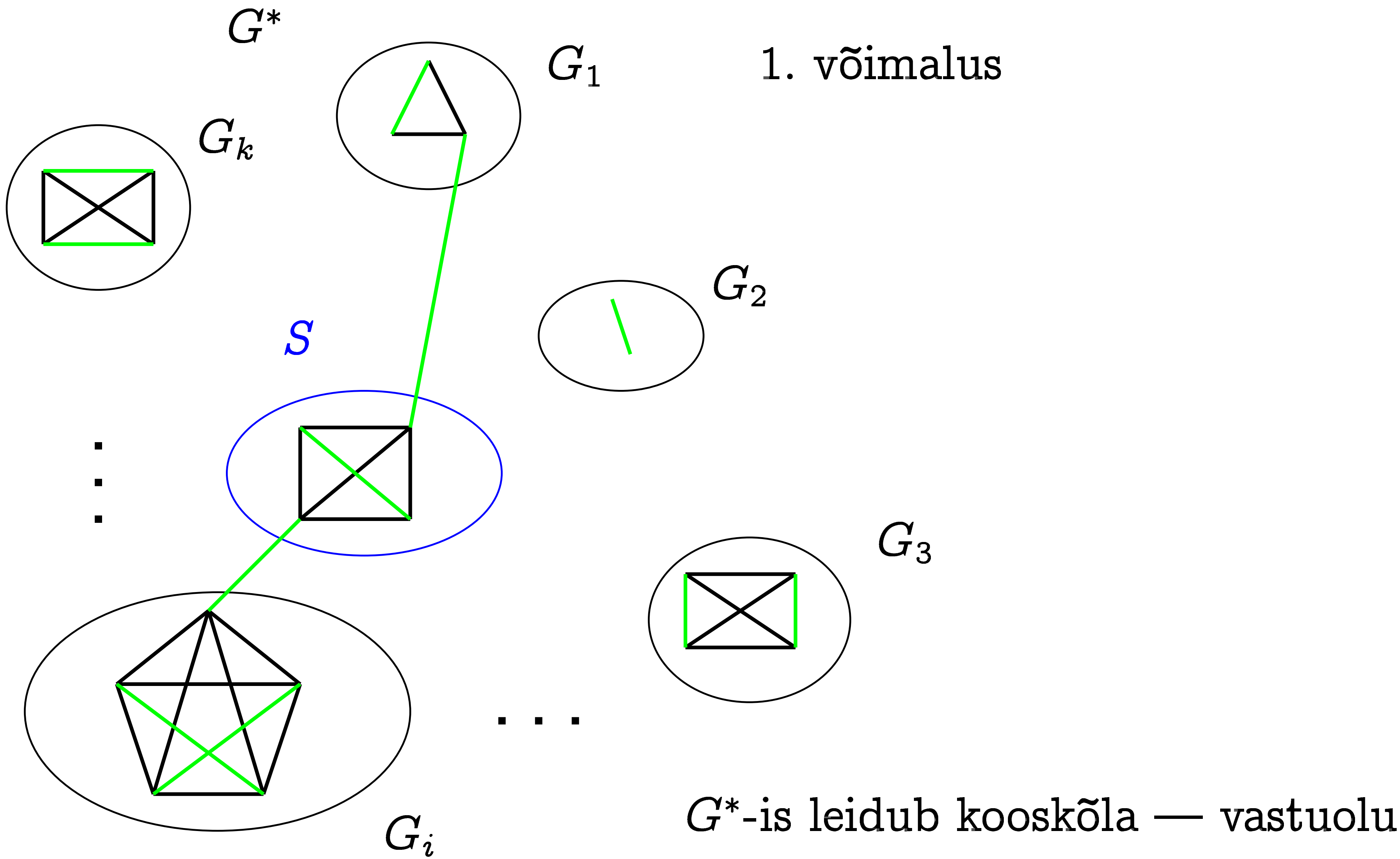


Olgu S kõigi selliste tippude hulk, mis on ühendatud kõigi teiste tippudega

On kaks võimalust:

1. Graafi $G^*\setminus S$ kõik sidususkomponendid on täisgraafid.

2. Leidub $G^*\setminus S$ sidususkomponent, mis ei ole täisgraaf.



G^*
G_1
1. võimalus
G_k
G_2
S
G_3
G_i
G^*-is leidub kooskõla — vastuolu

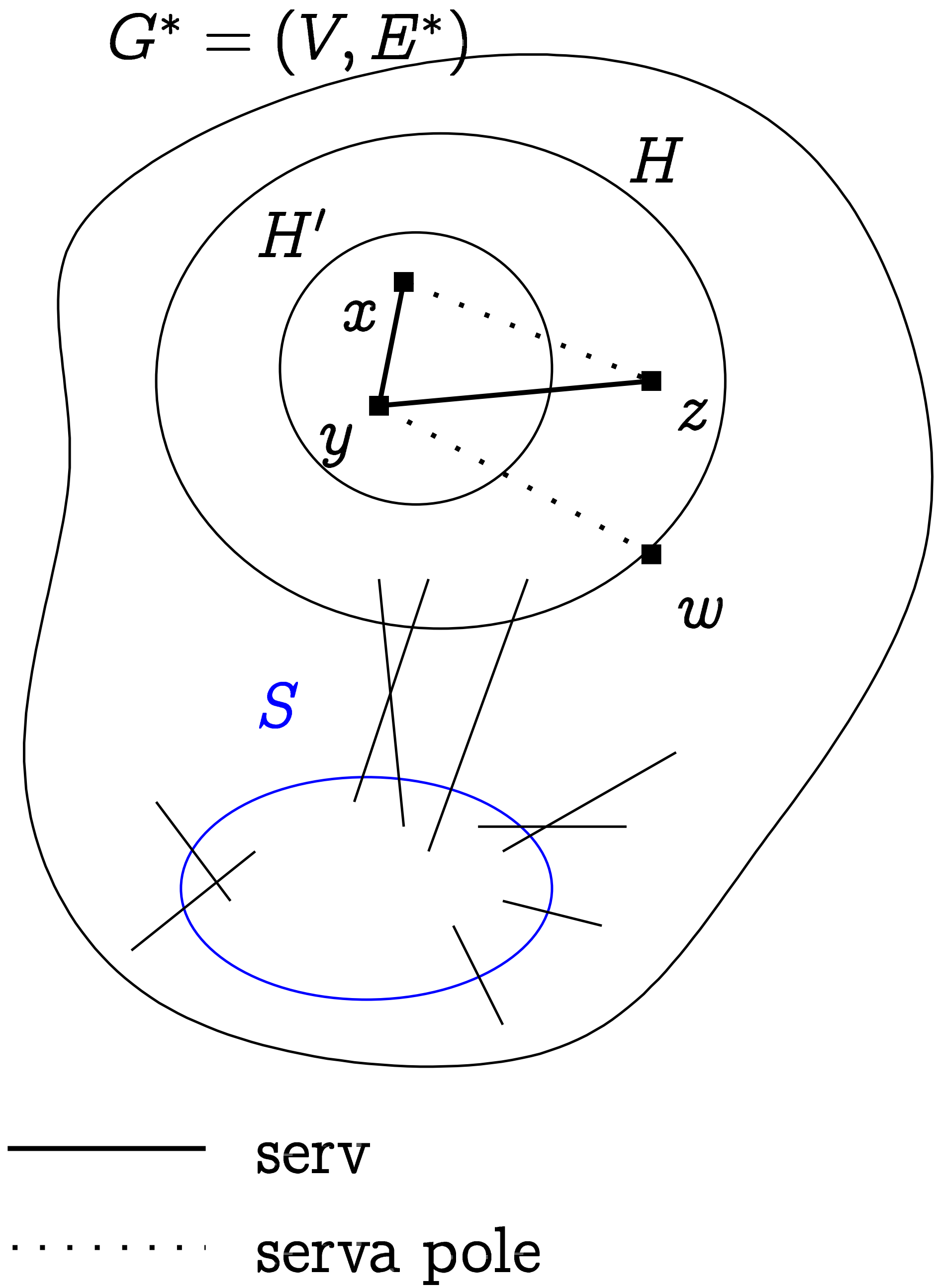
Konstrueerime täieliku kooskõla G^*-s:

- $G^* \setminus S$ sidususkomponentides K_{2n} nende komponentide piires.
- $G^* \setminus S$ sidususkomponentides K_{2n+1} nende komponentide piires, nii et üks tipp üle jääks.
- $G^* \setminus S$ sidususkomponentides K_{2n+1} üksikud ülejäänud tipud seame igaühe vastavusse mõne S-i tipuga.

  Komponente K_{2n+1} pole rohkem kui $|S|$.

- S-i ülejäänud tipud seame omavahel vastavusse.

  Üle jääb paarisarv, sest G^*-s on paarisarv tippe.



2. võimalus

H — $G^* \backslash S$ sidususkomponent
H pole täisgraaf

H' — H max. täisalamgraaf

$y \in V(H')$ ja $z \in V(H) \backslash V(H')$

$x \in V(H')$

$w \in V \backslash S$

$G_1 = (V, E^* \cup \{(x, z)\})$

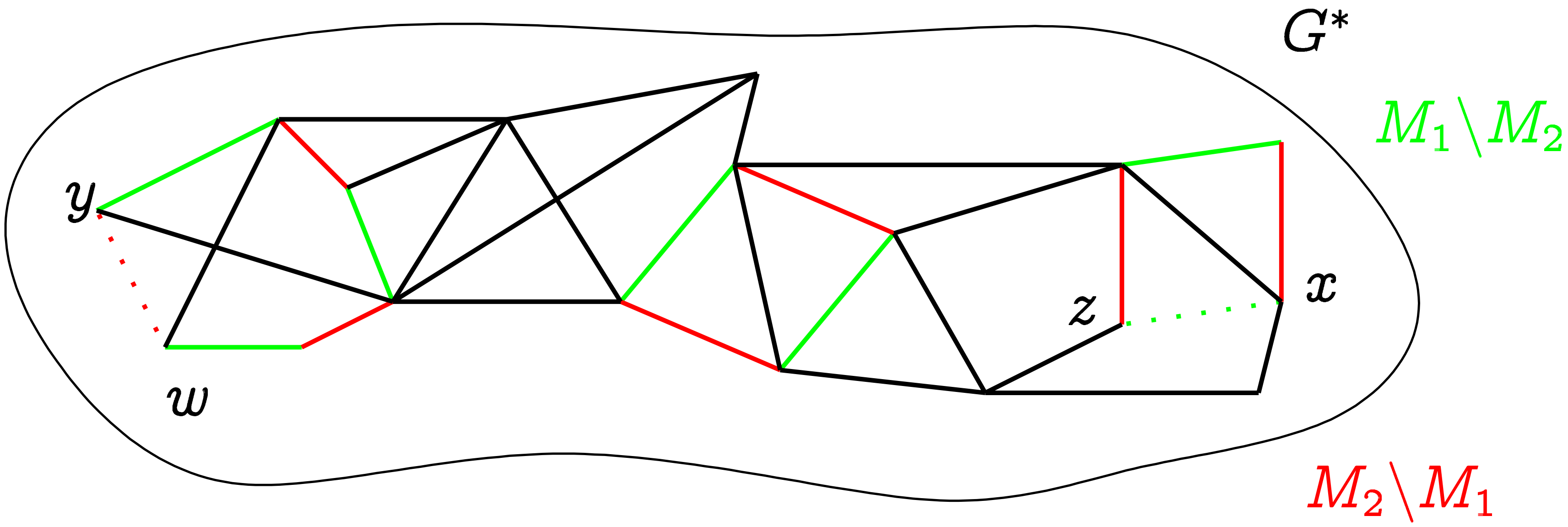
$G_2 = (V, E^* \cup \{(y, w)\})$

Graafides G_1 ja G_2 leiduvad kooskõlad.

Olgu M_1 graafi G_1 täielik kooskõla. Siis $(x, z) \in M_1$, muidu oleks M_1 graafi G^* täielik kooskõla.

Olgu M_2 graafi G_2 täielik kooskõla. Siis $(y, w) \in M_2$.

Olgu $G' = (V, (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1))$.



Olgu $v \in V$. Mis on $\deg_{G'}(v)$ võimalikud väärtused?

Leidub täpselt üks $e_1 \in M_1$ ja $e_2 \in M_2$, nii et e_1 ja e_2 on v-ga intsidentsed.

- Kui $e_1 = e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 0$.
- Kui $e_1 \neq e_2$, siis $\deg_{G'}(v) = 2$.

Seega on G' sidususkomponentideks isoleeritud tipud ja tsüklid.

Tsüklid on paarisarvulise pikkusega — vaheldumisi serv M_1-st ja serv M_2-st.

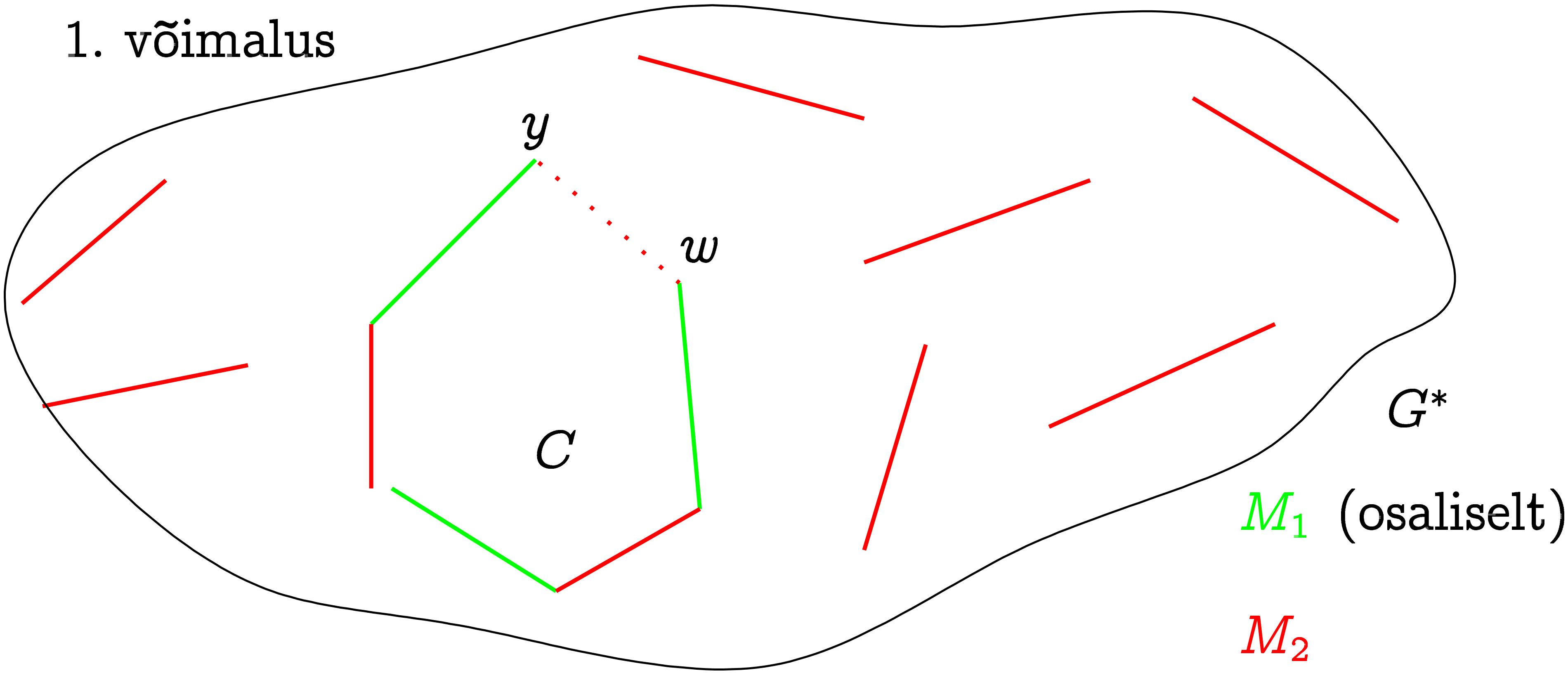
On kaks võimalust:

1. Servad (x, z) ja (y, w) kuuluvad G' erinevatesse sidususkomponentidesse.

2. Servad (x, z) ja $y, w)$ kuuluvad G' samasse sidususkomponenti.

Mõlemal juhul näitame, et G^*-s ikkagi leidub täielik kooskõla.

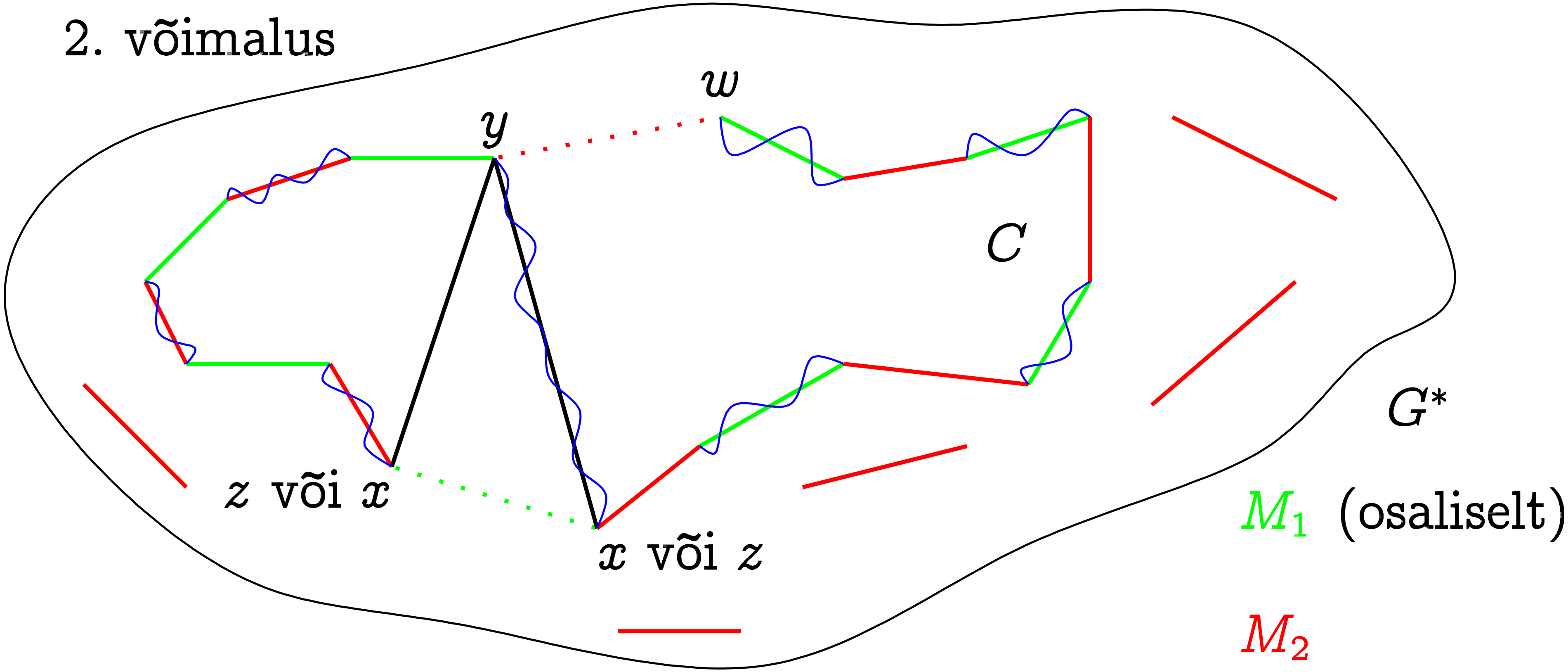
1. võimalus



Kooskõla G^*-il:

- M_1 tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C

2. võimalus



Kooskõla G^*-il:

- sinised servad tsüklis C
- M_2 väljaspool tsüklit C $\square$

Teoreem (Tutte-Berge valem). Olgu $G = (V, E)$ graaf. Olgu $\nu(G)$ graafi G maksimaalsete kooskõlade võimsus. Siis

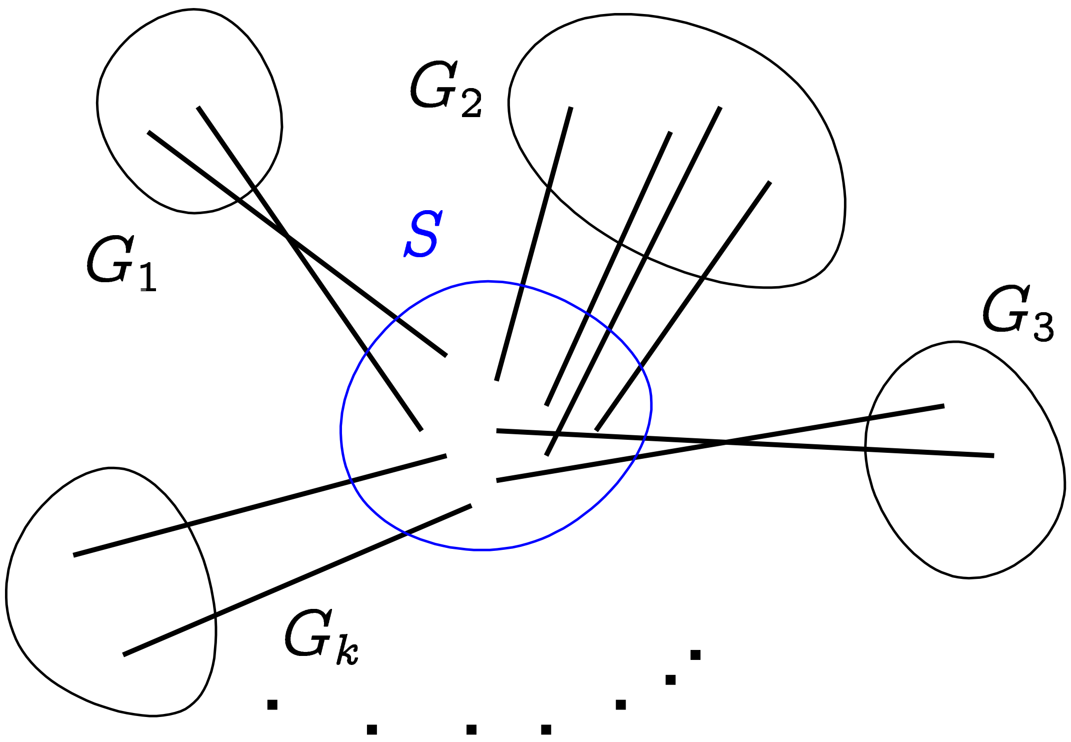
$$\nu(G) = \min_{S \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |S| - odd(G \backslash S)) \ .$$

Teisisõnu, tippude arv, mis maksimaalsetel kooskõladel katmata jääb, on

$$\max_{S \subseteq V} odd(G \backslash S) - |S| \ .$$

Ütleme, et kooskõla M *katab* tippu v, kui $\deg_M(v) = 1$.

Tõestus. „$\leq$“.



Olgu $G_1, \ldots, G_k$ graafi $G \backslash S$ sidususkomponendid. Siis igas paaritu arvu tippudega komponendis kõigi tippude ära katmiseks on vaja vähemalt ühte tippu S-st. Neis komponentides, millele S-i tippu ei jätku, jääb vähemalt üks tipp katmata.

„$\geq$“ tõestame induktsiooniga üle $|V|$. Meil tuleb näidata, et leidub selline $S \subseteq V$, et

$$\nu(G) \geq \frac{1}{2}(|V| + |S| - odd(G \backslash S)) \ .$$

Baas. $|V| = 1$. Siis $\nu(G) = 0$ ning hulgaks S võime võtta $\emptyset$. Siis $|V| + |S| - odd(G \backslash S) = 1 + 0 - 1 = 0$.

Samm. Olgu $|V| > 1$. On kaks võimalust.

1. G ei ole sidus.

2. G on sidus.

Võimalus 1. Olgu $G_1, \ldots, G_k$ graafi G sidususkomponendid. Neile võime rakendada induktsiooni eeldust.

Olgu $G_i = (V_i, E_i)$.

Ind. eelduse järgi leiduvad $S_1 \subseteq V_1, \ldots, S_k \subseteq V_k$ nii, et

$$\nu(G_i) \geq \tfrac{1}{2}(|V_i| + |S_i| - odd(G_i \backslash S_i)) \qquad (1 \leq i \leq k) \ .$$

Võtame $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$. Siis

$$\begin{gathered} \nu(G) = \nu(G_1) + \cdots + \nu(G_k) \\ odd(G \backslash S) = odd(G_1 \backslash S_1) + \cdots + odd(G_k \backslash S_k) \\ |V| = |V_1| + \cdots + |V_k| \qquad |S| = |S_1| + \cdots + |S_k| \ . \end{gathered}$$

ja seega $\nu(G) \geq \frac{1}{2}(|V| + |S| - odd(G \backslash S))$.

Võimalus 2. Ütleme, et mingi tipp $v \in V$ on *kriitiline*, kui kõik maksimaalsed kooskõlad teda katavad.

Kui G-s leidub täielik kooskõla, siis on kõik tema tipud kriitilised.

On kaks võimalust.

2.1. G on sidus ja temas leidub kriitiline tipp v.

2.2. G on sidus ja temas ei leidu kriitilisi tippe.

Võimalus 2.1. Antud juhul $\nu(G\backslash v) = \nu(G) - 1$. Rakendame induktsiooni eeldust graafile $G\backslash v$.

Leidub $S' \subseteq V\backslash\{v\}$ nii, et

$$\nu(G\backslash v) \geq \tfrac{1}{2}(|V\backslash\{v\}| + |S'| + odd(G\backslash v\backslash S')) \ .$$

Olgu $S = S' \cup \{v\}$. Siis $|S| = |S'| + 1$ ja

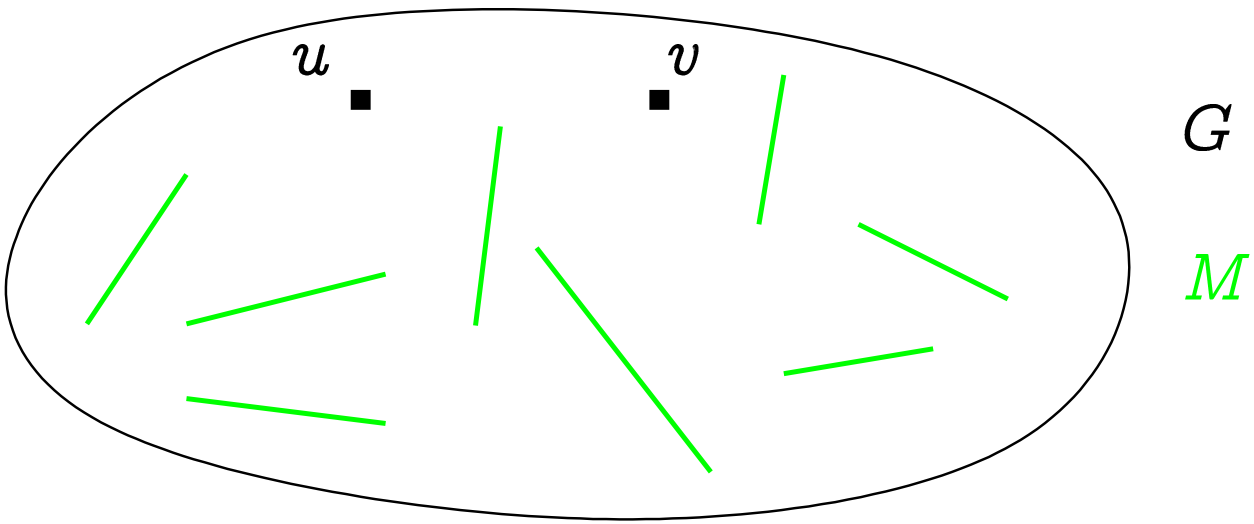
$$\begin{aligned}\nu(G) = \nu(G\backslash v) + 1 \geq \\ &\tfrac{1}{2}(|V\backslash\{v\}| + |S'| + odd(G\backslash v\backslash S')) + 1 = \\ &\tfrac{1}{2}(|V| - 1 + |S| - 1 + odd(G\backslash S)) + 1 = \\ &\qquad\qquad \tfrac{1}{2}(|V| + |S| + odd(G\backslash S)) \ .\end{aligned}$$

Võimalus 2.2. Antud juhul G-s täielikku kooskõla ei leidu, s.t. $\nu(G) < |V|/2$.

Näitame, et $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. S.t. maksimaalne kooskõla ei kata täpselt ühte tippu.

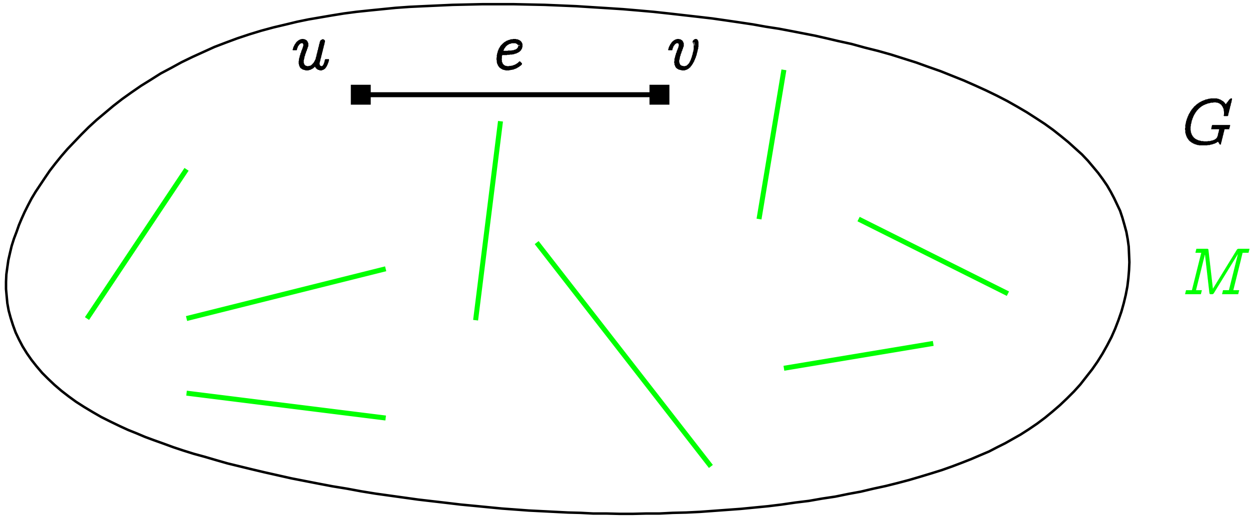
Oletame vastuväiteliselt, et $\nu(G) < (|V| - 1)/2$, s.t. maksimaalne kooskõla ei kata vähemalt kahte tippu.

Olgu M mingi maksimaalne kooskõla ning $u, v \in V$ mingid kaks tippu ($u \neq v$), mida ta ei kata. Olgu M, u, v valitud nii, et $d(u, v)$ on minimaalne võimalik.

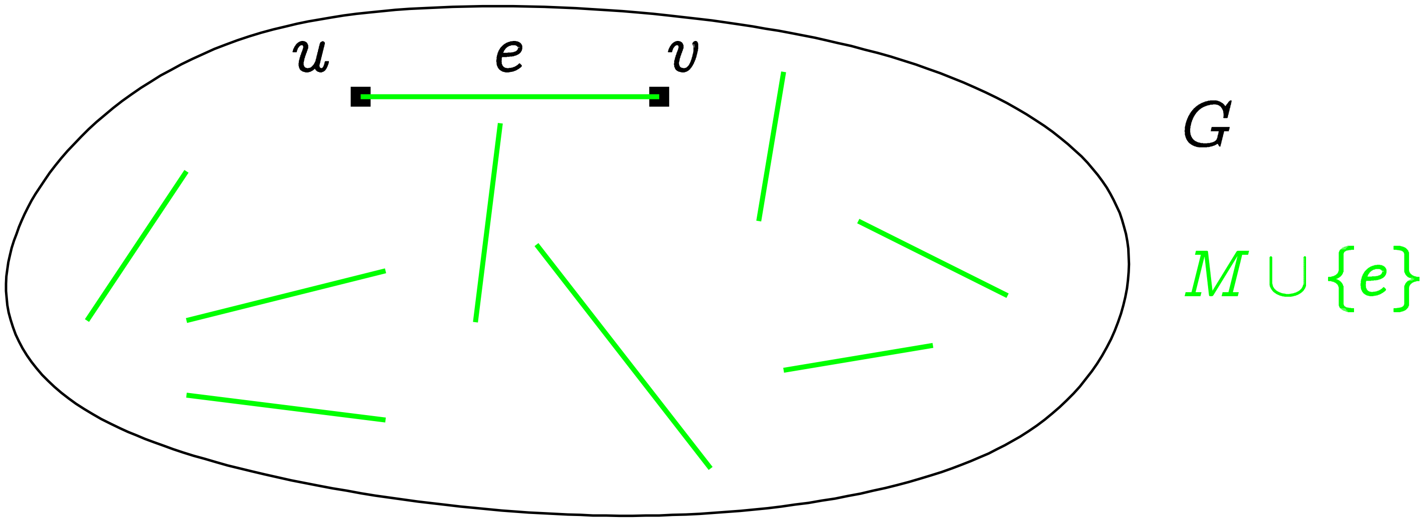


Kaks võimalust: **a.** $d(u, v) = 1$. **b.** $d(u, v) > 1$.

Võimalus a. Leidub $e \in E$ nii, et $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$.

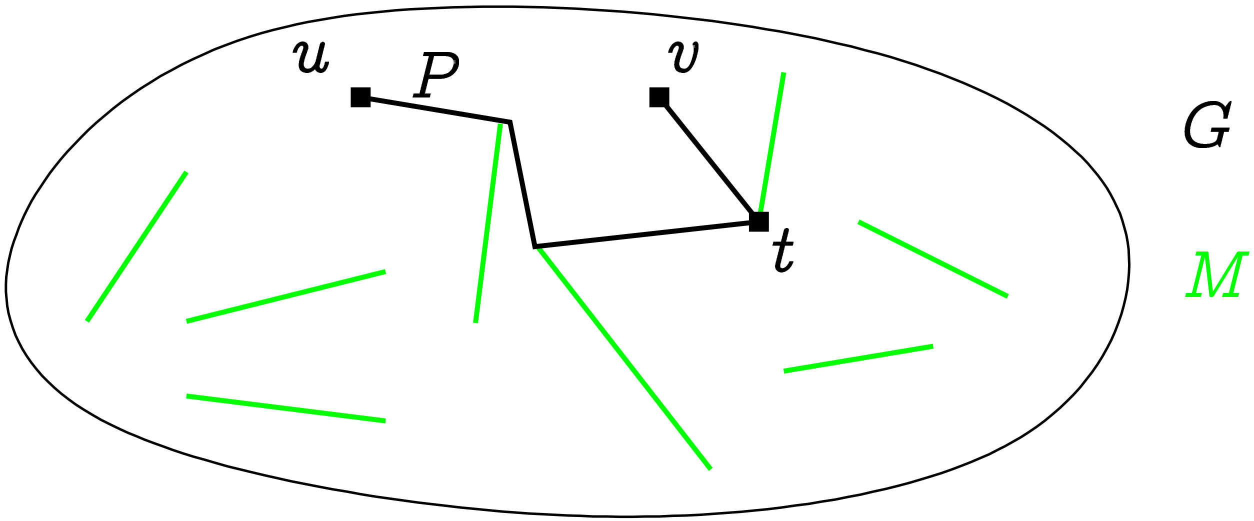


Võimalus a. Leidub $e \in E$ nii, et $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$.



Siis $M \cup \{e\}$ on kooskõla ja $|M \cup \{e\}| = |M| + 1$. Vastuolu M-i (kui maksimaalse kooskõla) valikuga.

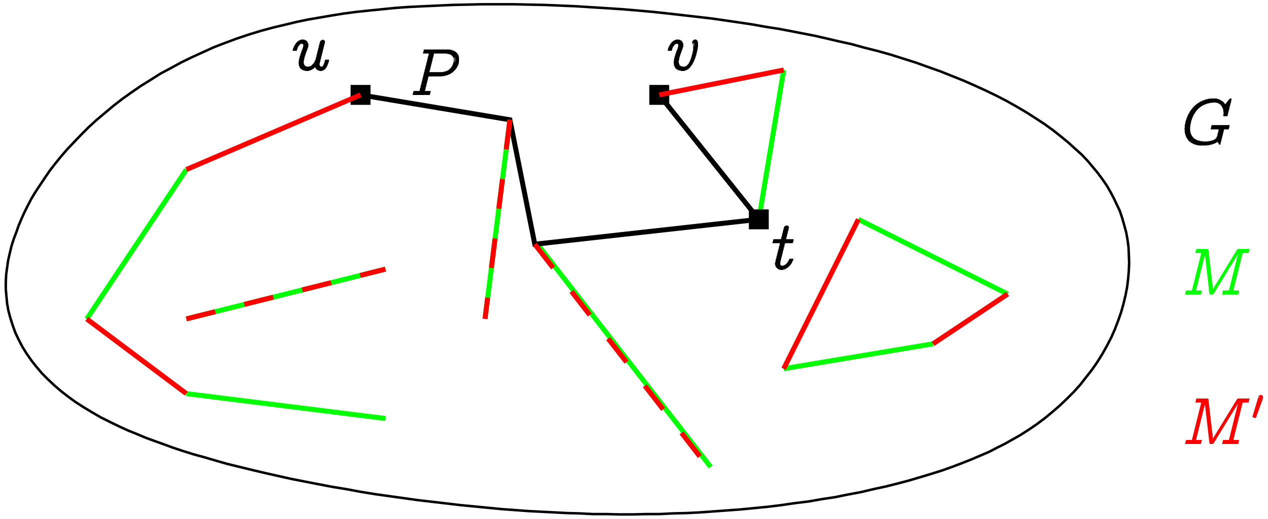
Võimalus b. Olgu P minimaalse pikkusega ahel u-st v-sse.



M katab ahela P kõik sisemised tipud, muidu oleks meil vastuolu u ja v valikuga ($d(u,v)$ on minimaalne võimalik).

Olgu t mõni ahela P sisemistest tippudest.

Olgu M' maksimaalne kooskõla, mis ei kata tippu t. Valime M' nii, et $|M \cap M'|$ oleks maksimaalne võimalik.

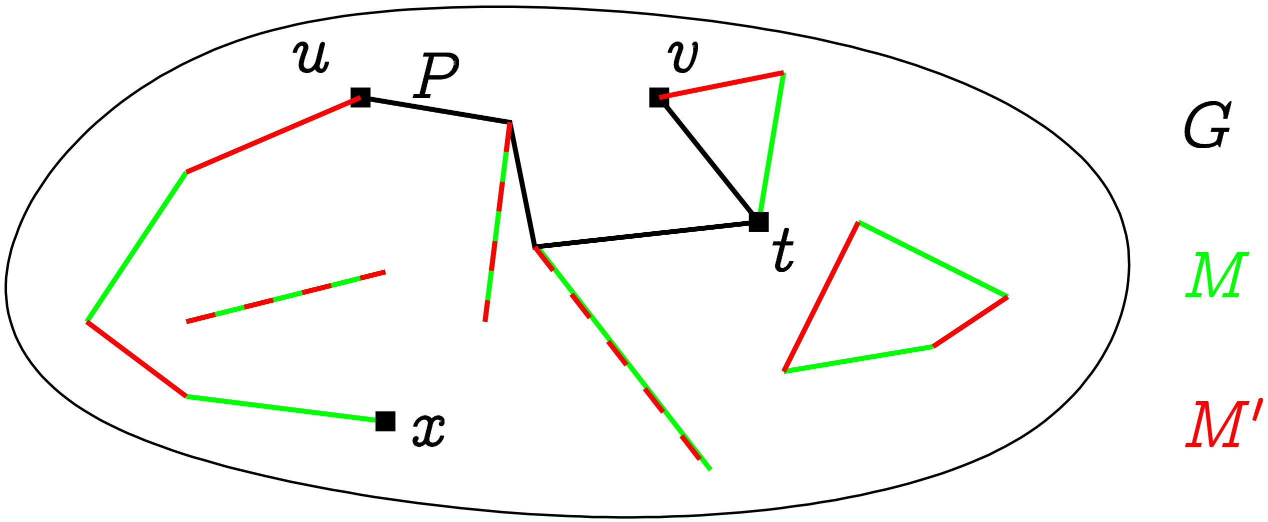


Siis M' katab ära nii u kui ka v. Muidu oleks meil vastuolu M, u, v valikuga ($d(u, v)$ on minimaalne võimalik).

M ja M' katavad ära sama palju tippe.

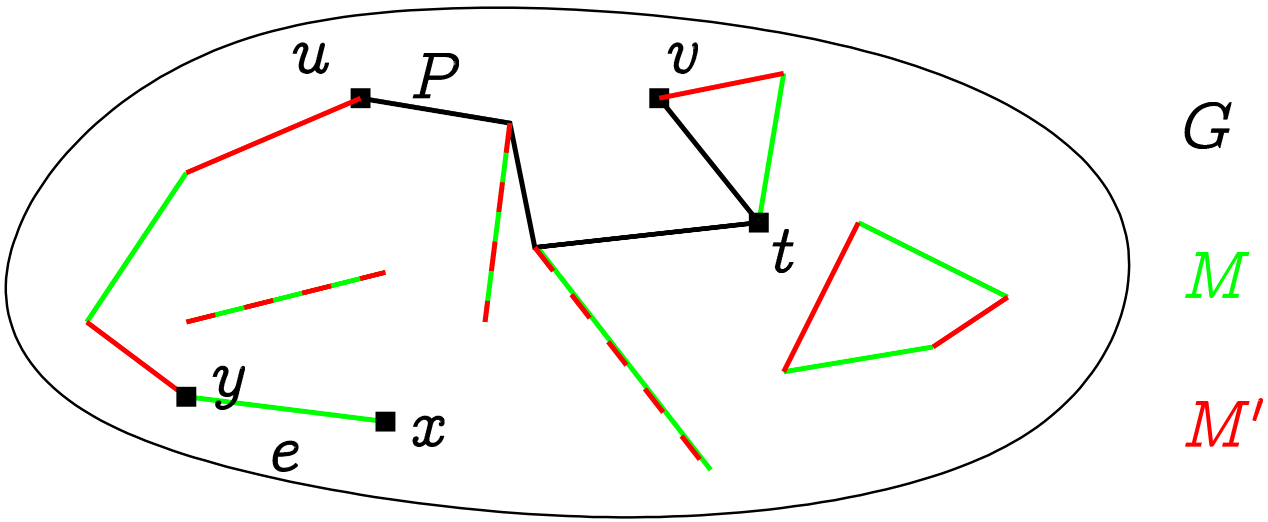
- M ei kata u-d ega v-d, katab t.
- M' ei kata t-d, katab u ja v.

Peab leiduma veel mingi tipp x, mille M katab, aga M' ei kata.



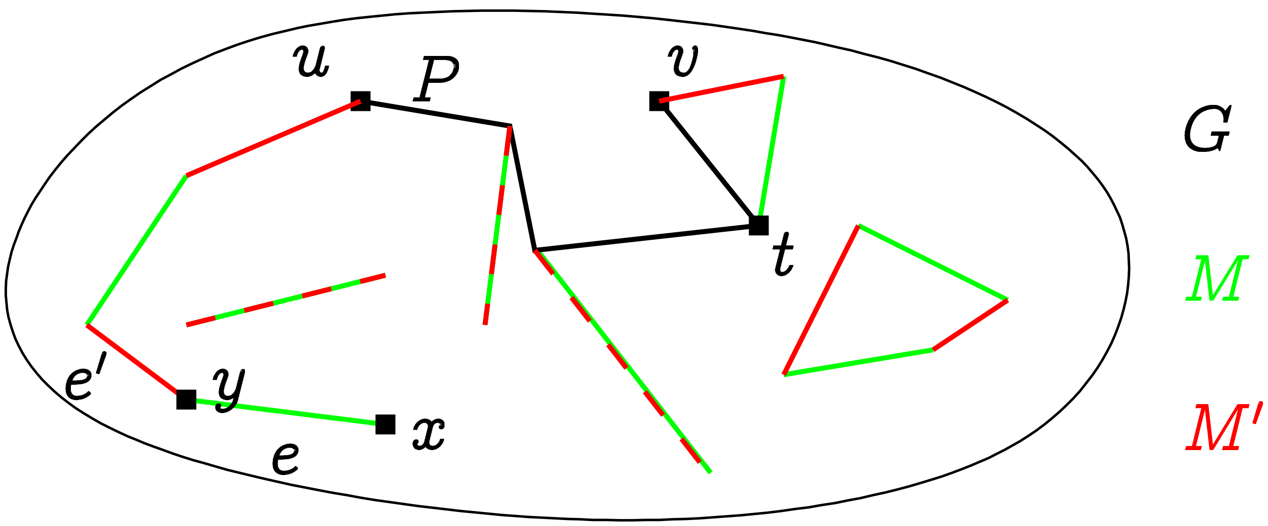
Olgu $e \in M$ tipuga x intsidentne.

Olgu y serva e teine otstipp.



Siis M' katab y-t, muidu oleks meil vastuolu M, u, v valikuga ($d(u,v)$ minimaalne võimalik; oleks pidanud võtma hoopis M', x, y).

Olgu $e' \in M'$ tipuga y intsidentne.



$M'' = M' \backslash \{e'\} \cup \{e\}$ on ka maksimaalne kooskõla, mis ei kata t-d.

$|M \cap M''| = |M \cap M'| + 1$. Vastuolu M' valikuga.

Oletus $\nu(G) < (|V| - 1)/2$ viis vastuoluni.

Oleme näidanud, et $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. Seega on $|V|$ paaritu ja $odd(G) = 1$.

Otsitavaks hulgaks S võime võtta $\emptyset$. Siis

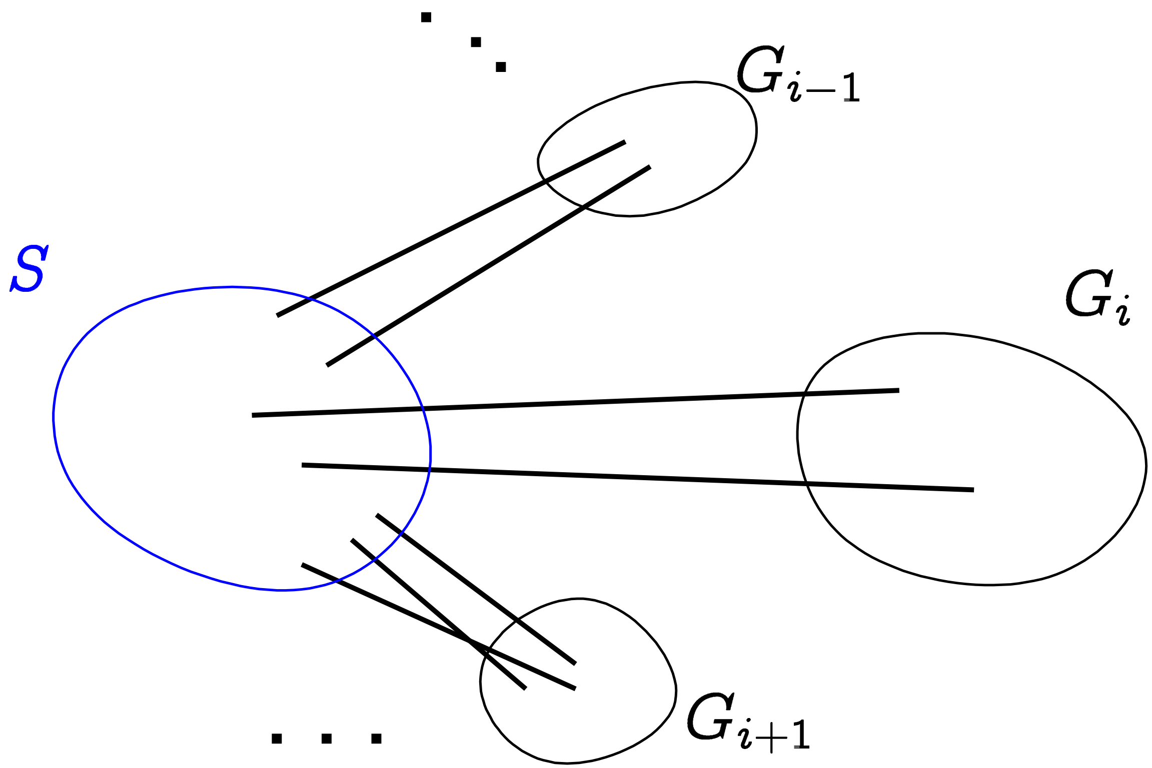
$$\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| - 1) = \frac{1}{2}(|V| + |S| - odd(G \backslash S)) \ .$$

$\square$

Järeldus. Suvalises sildadeta 3-regulaarses graafis leidub täielik kooskõla.

Tõestus. Näitame, et kui $G = (V, E)$ on sildadeta 3-regulaarne graaf, siis iga $S \subseteq V$ jaoks $odd(G \backslash S) \leq |S|$.

Olgu $G_1, \ldots, G_k$ graafi $G \backslash S$ sidususkomponendid.



Iga G_i on S-ga ühendatud vähemalt kahe servaga, sest sildu ei ole.

Kui $|V(G_i)|$ on paaritu, siis on servi, mille üks otstipp on G_i-s ja teine väljaspool, paaritu arv.

See järeldub teoreemist, et graafis on paarisarv paaritu astmega tippe.

G_i kõigi tippude aste on paaritu. Seega peab G_i-st välja jäävate servaotste arv samuti paaritu olema.

Järelikult on paaritu arvu tippudega G_i ühendatud S-ga vähemalt kolme servaga.

Olgu d_i selliste servade arv, mille üks otstipp on S-s ja teine on G_i-s.

Olgu $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ selliste indeksite hulk, et $i \in I$ parajasti siis, kui $|V(G_i)|$ on paaritu. Siis $|I| = odd(G \backslash S)$.

Siis

$$3 \cdot |S| = \sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{i=1}^{k} d_i \geq \sum_{i \in I} d_i \geq \sum_{i \in I} 3 = 3 \cdot odd(G \backslash S)$$

Seega $|S| \geq odd(G \backslash S)$, seda suvalise $S \subseteq V$ jaoks. Tutte'i teoreemi järgi leidub graafis täielik kooskõla. $\square$