Graafid, 3. kontrolltöö lahendused

15. detsember 2009

Ülesanne 1. Ramsey arv $r(k,l)$ on defineeritud kui vähim selline n, et ükskõik mis viisil me ka ei värviks graafi K_n servi kahe värviga, leidub saadud graafis kas esimest värvi koopia graafist K_k või teist värvi koopia graafist K_l. Arve $r(k,l)$ võib järgmisel viisil üldistada: iga kahe lihtgraafi G_1, G_2 jaoks olgu $r(G_1, G_2)$ vähim selline n, et ükskõik mis viisil me ka ei värviks graafi K_n servi kahe värviga, leidub selline $i \in \{1,2\}$, et graafil, mille moodustavad ainult i-ndat värvi servad, on alamgraaf (mitte tingimata indutseeritud) G_i.

Näita, et kui $m+n$ on paaritu, siis $r(K_{1,m}, K_{1,n}) = m+n$.

Tõestus. Graaf $K_{1,m}$ koosneb ühest tipust, selle tipuga intsidentsetest servadest, mida on m tükki, ja nende servade teistest otstippudest. Seega $r(K_{1,m}, K_{1,n}) \leq m+n$ tähendab, et

(*) Ükskõik millisel viisil me graafi K_{m+n} servi kahe värviga ära ei värviks, leidub seal ikkagi tipp, millega on intsidentsed m musta serva või n valget serva.

Samuti, $r(K_{1,m}, K_{1,n}) > m+n-1$ tähendab, et

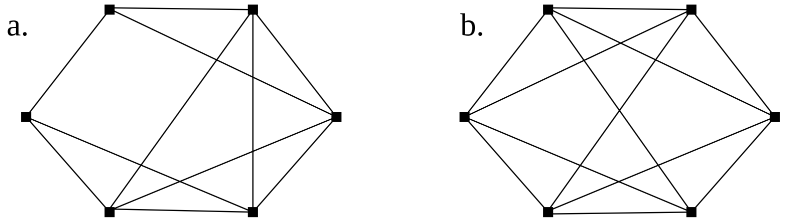
(**) Graafi K_{m+n-1} servad on võimalik kahe värviga värvida nii, et iga tipuga on intsidentsed ülimalt $m-1$ esimest ja $n-1$ teist värvi serva.

Väidete (*) ja (**) konjunktsioon on parajasti väide, mis meil tõestada tuleb.

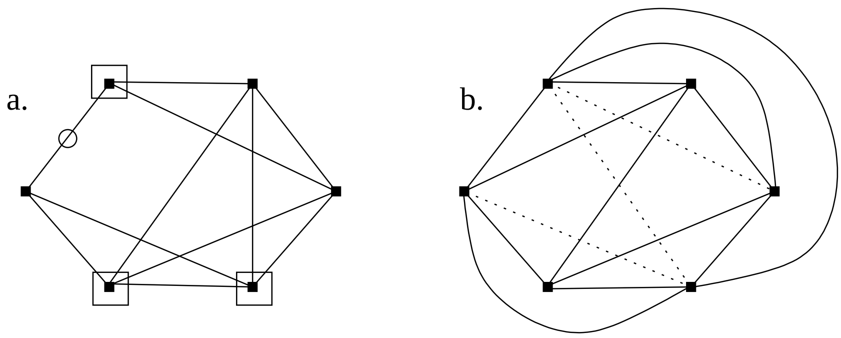
Väite (*) tõestus. Olgu K_{m+n} servad värvitud kahe värviga. Olgu v suvaline tipp graafis K_{m+n}. Selles graafis on tipuga v intsidentsed $m+n-1$ serva. Vähemalt m neist peab olema värvitud esimese värviga või vähemalt n teise värviga, sest kui esimese värviga oleks värvitud ülimalt $m-1$ serva ja teise värviga ülimalt $n-1$ serva, siis oleks tipuga v intsidentsed ülimalt $m+n-2$ serva.

Väite (**) tõestus. Vaatame graafi K_{m+n-1}. Et $m+n-1$ on paarisarv, siis on selle graafi servad korrektselt värvitavad $m+n-2$ värviga (õpikust ülesanne 79). Olgu γ' graafi K_{m+n-1} servade korrektne värvimisviis $m+n-2$ värviga. Iga värvi i ja tipu v jaoks leidub ülimalt üks (tegelikult täpselt üks) serv e, nii et $\gamma'(e) = i$ ja e on tipuga v intsidentne. Graafi K_{m+n-1} servade värvimiseks kahe värviga loeme nüüd värvimisviisi γ' esimesed $m-1$ värvi värviks number 1 ning viimased $n-1$ värvi värviks number 2. Sel juhul on iga tipuga intsidentsed täpselt $m-1$ serva, mis on värvitud värviga number 1, ning täpselt $n-1$ serva, mis on värvitud värviga number 2.

Ülesanne 2. Kas allolevad graafid on tasandilised?



<u>Vastus: a: ei, b: jah.</u>



Graafi „b“ tasandiline joonistamisviis on toodud ülaloleval joonisel. Graafi „a“ mittetasandilisuses saab veenduda mitmel eri viisil. Näiteks kui ringikesega märgitud serv kokku tõmmata, saame graafi K_5. Alternatiivselt, graaf „a“ on graaf $K_{3,3}$ (ühe aluse moodustavad ruudukestega, teise ilma ruudukesteta tipud) koos kahe täiendava servaga.

Ülesanne 3. Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ kaks graafi sama tipuhulgaga V. Olgu $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Näita, et $\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$.

<u>Tõestus.</u> Olgu $\gamma_1 : V \to \{1, \ldots, c_1\}$ graafi G_1 korrektne värvimisviis $c_1 = \chi(G_1)$ värviga ja $\gamma_2 : V \to \{1, \ldots, c_2\}$ graafi G_2 korrektne värvimisviis $c_2\chi(G_2)$ värviga. Defineerime tippude värvimisviisi γ järgmiselt:

$$\gamma : V \xrightarrow{(\gamma_1, \gamma_2)} \{1, \ldots, c_1\} \times \{1, \ldots, c_2\} \xrightarrow{\iota} \{1, \ldots, c_1 c_2\},$$

kus ι on mingi bijektsioon hulgast $\{1, \ldots, c_1\} \times \{1, \ldots, c_2\}$ hulka $\{1, \ldots, c_1 c_2\}$ ja $(\gamma_1, \gamma_2)(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v))$.

Näitame, et γ on graafi G korrektne värvimisviis. Olgu u ja v teineteise naabertipud, olgu $e \in E_1 \cup E_2$ serv tippude u ja v vahel. Kui $e \in E_1$, siis $\gamma_1(u) \neq \gamma_1(v)$, sest γ_1 on graafi G_1 korrektne värvimisviis, seega ka $\gamma(u) \neq \gamma(v)$. Kui aga $e \in E_2$, siis $\gamma_2(u) \neq \gamma_2(v)$, seega ka $\gamma(u) \neq \gamma(v)$. Järelikult omistab γ tippudele u ja v erinevad värvid.

Korrektne värvimisviis γ kasutab ülimalt $c_1 c_2$ erinevat värvi. Seega $\chi(G) \leq c_1 c_2$.

Ülesanne 4. Kas leidub graafe G, mille kromaatiline polünoom on $k^6 - 10k^5 + 37k^4 - 61k^3 + 46k^2 - 13k = k(k-1)^3(k^2 - 7k + 13)$?

Vastus: ei. Kui selline graaf leiduks, siis tal oleks n=6 tippu (polünoomi pealiikme aste) ja $m = 10$ serva (polünoomi liikme k^{n-1} kordaja absoluutväärtus). Lisaks sellele peab see graaf olema värvitav kahe värviga kuuel eri viisil (võtame polünoomis k võrdseks kahega). Kui graaf on värvitav kahe värviga, siis on ta kahealuseline. Aga kuuetipulisel kahealuselisel lihtgraafil on ülimalt üheksa serva (kuuetipulisel täielikul kahealuselisel graafil $K_{3,3}$ on üheksa serva, graafil $K_{2,4}$ on kaheksa serva, graafil $K_{1,5}$ on viis serva).